平成 19 年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
衛生技術学科・理学療法学専攻　数学 I・II(平成 19 年 2 月 4 日)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 2 次関数のグラフが，3 点 $(4, -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2, -1)$ を通るとき，この 2 次関数を求めなさい。

問 2 2 次方程式 $x^2 + 4kx + k - 2 = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問 3 不等式 $|\,x - 1\,| + |\,x - 3\,| \leqq 4$ を解きなさい。

問 4 $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = \mathrm{b}$，$\mathrm{AB} = c$ である三角形 ABC がある。関係式 $a\cos B - b\cos A = c$ を満たすとき，三角形 ABC はどのような三角形であるか答えなさい。

問 5 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2\theta - \cos\theta = 2$ を満たす θ の値を求めなさい。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 方程式 $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ を解きなさい。

問 2 $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とするとき，$\log_{25} 3$ を a，b を用いて表しなさい。

問 3 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めなさい。

問 4 3 次関数 $f(x) = x^3 + kx^2 + (k + 2)x$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問 5 放物線 $y = x^2$ がある。この放物線上の点 $(2,\ 4)$ における接線と放物線，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めなさい。

3 $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ である三角形 ABC がある。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線上に，$\mathrm{BD}=7$ となる点 D を辺 BC に関して点 A と反対側にとる。線分 AD と辺 BC の交点を E とする。このとき，次の各問い (**問 1〜4**) に答えなさい。

問 1 BC の長さを求めなさい。

問 2 AD の長さを求めなさい。

問 3 AE の長さを求めなさい。

問 4 三角形 ABE の面積は四角形 ABDC の面積の何倍であるかを求めなさい。

4 $0 \leqq x < 2\pi$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{4}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x$ がある。このとき，次の各問い (**問 1〜3**) に答えなさい。

問 1 $\sin x = t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めなさい。

問 2 $\sin x = t$ とおいて，$f(x)$ を t を用いて表した関数を $g(t)$ とする。関数 $g(t)$ の極大値と極小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めなさい。

問 3 方程式 $\dfrac{4}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x = a$ が異なる 4 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.

グラフが 3 点 $(4, -1)$, $(2,\ 1)$, $(-2, -1)$ を通るから

$$-1 = 16a + 4b + c \qquad \cdots ①$$
$$1 = 4a + 2b + c \qquad \cdots ②$$
$$-1 = 4a - 2b + c \qquad \cdots ③$$

① − ② から　$12a + 2b = -2$

すなわち　$6a + b = -1 \qquad \cdots ④$

② − ③ から　$4b = 2 \qquad \cdots ⑤$

④, ⑤ を解くと　$a = -\dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{1}{2}$

これらを ② に代入して　$c = 1$

よって, 求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1}$

問 2 $f(x) = x^2 + 4kx + k - 2$ とおく.

2 次方程式 $f(x) = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつ条件は, $x < -2$ と $0 < x$ の範囲で放物線 $y = f(x)$ が x 軸と交わることであるから

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 + 4k\cdot(-2) + k - 2 < 0 \\ f(0) = k - 2 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$k > \dfrac{2}{7}$,　第 2 式から　$k < 2$

求める k の値の範囲は, 上の 2 式の共通範囲で　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7} < k < 2}$

問 3 [1] $x < 1$ のとき, $|x-1| = -x+1$, $|x-3| = -x+3$ であるから

不等式は　$(-x+1) + (-x+3) \leqq 4$

これを解いて　$x \geqq 0$

このときの解は　$0 \leqq x < 1$

[2] $1 \leqq x < 3$ のとき, $|x-1| = x-1$, $|x-3| = -x+3$ であるから

不等式は　$(x-1) + (-x+3) \leqq 4$

左辺は 2 であるから, この不等式を満たす.

このときの解は　$1 \leqq x < 3$

[3] $3 \leqq x$ のとき, $|x-1| = x-1$, $|x-3| = x-3$ であるから

不等式は　$(x-1) + (x-3) \leqq 4$

これを解いて　$x \leqq 4$

このときの解は　$3 \leqq x \leqq 4$

したがって, 求める解は　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 4}$

問 4 余弦定理により，等式は　$a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

この両辺に $2c$ をかけて

$$(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

すなわち　　$a^2=b^2+c^2$

よって　$\boldsymbol{A=90^\circ}$ **の直角三角形**

問 5 左辺を変形すると　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=2$

整理すると　　　　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

$0^\circ \leqq 180^\circ$ のとき

$\cos\theta=0$ から　　　$\theta=90^\circ$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ から　　$\theta=120^\circ$

したがって　　$\boldsymbol{\theta=90^\circ,\ 120^\circ}$

$\boxed{2}$ **問 1** 方程式は

$$x^2(x-3)+4(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2+4)=0$$

よって　　$x-3=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　　$\boldsymbol{x=3,\ \pm 2i}$

問 2 $\log_{25}3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}25}=\dfrac{\log_{10}3}{2\log_{10}5}=\dfrac{\log_{10}3}{2\log_{10}\frac{10}{2}}$

$$=\frac{\log_{10}3}{2(\log_{10}10-\log_{10}2)}=\boldsymbol{\frac{b}{2(1-a)}}$$

問 3 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots①$$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$$

であるから

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき　最大値 2**

$x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ **のとき　　最大値** $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

問 4 $f'(x) = 3x^2 + 2kx + (k+2)$

$f'(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$f(x)$ が極値をもたないための条件は，すべての x に対して，$f'(x) \geqq 0$ が成り立つことである．

よって，$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　　$D \leqq 0$

$$D/4 = k^2 - 3(k+2) = k^2 - 3k - 6$$

であるから　　$k^2 - 3k - 6 \leqq 0$

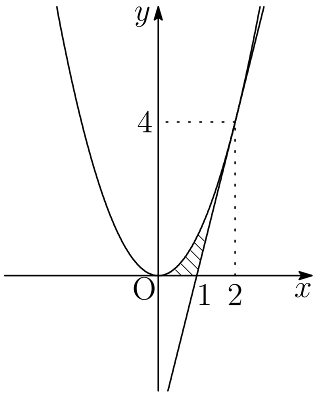
よって　　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{33}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}}$

問 5 $y' = 2x$ より，$x = 2$ のとき $y' = 4$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y - 4 = 4(x-2)$$

ゆえに　　$y = 4x - 8$



放物線 $y = x^2$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

直線 $y = 4x - 4$ の x 軸との共有点の座標は $(1,\ 0)$．

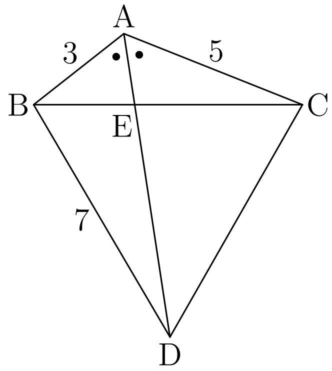
3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 4)$ を結ぶ三角形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 4 = 2$$

よって，求める面積 S は

$$S = S_1 - S_2 = \frac{8}{3} - 2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{3}$ **問 1** △ABC に余弦定理を適用すると



$$
\begin{aligned}
\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A \\
&= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos120^\circ \\
&= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 49
\end{aligned}
$$

BC > 0 であるから　$\mathbf{BC = 7}$

問 2 AD $= x$ とおく．△ABD に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cos60^\circ$$

ゆえに　$49 = 9 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}$

整理して　$x^2 - 3x - 40 = 0$

$$(x+5)(x-8) = 0$$

$x > 0$ であるから　$x = \mathbf{8}$

問 3 AE $= y$ とおく．△ABE $+$ △AEC $=$ △ABC であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot3y\sin60^\circ + \frac{1}{2}\cdot5y\sin60^\circ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120^\circ \\
3y + 5y &= 15 \\
y &= \mathbf{\frac{15}{8}}
\end{aligned}
$$

問 4 $\triangle\mathrm{ABE} = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{15}{8}\sin60^\circ = \dfrac{45}{16}\sin60^\circ$

$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin60^\circ = 12\sin60^\circ$

$\triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ = 20\sin60^\circ$

したがって，求める面積比は

$$\frac{\dfrac{45}{16}\sin60^\circ}{12\sin60^\circ + 20\sin60^\circ} = \mathbf{\frac{45}{512}}$$

$\boxed{4}$ **問1** $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$

問2 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるから

$$\begin{aligned}&\frac{4}{3}\sin^3 x - \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x - \sqrt{2}\sin x\\ =&\frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}(1-2t^2) + \sqrt{2}(1-t^2) - \sqrt{2}t\\ =&\frac{4}{3}t^3 + (1-\sqrt{2})t^2 - \sqrt{2}t - \frac{1}{2} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　$g(t) = \frac{4}{3}t^3 + (1-\sqrt{2})t^2 - \sqrt{2}t - \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

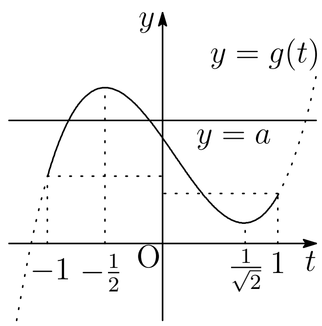
$$\begin{aligned}g'(t) &= 4t^2 + 2(1-\sqrt{2})t - \sqrt{2}\\ &= (2t+1)(2t-\sqrt{2})\end{aligned}$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$t = -\frac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$ **のとき　極大値** $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{12}}$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi}$ **のとき　極小値** $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1}$

問3 方程式 $f(x) = a$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ が異なる 4 つの実数解をもつには，関数 $y = g(t)$ $(-1 < t < 1)$ のグラフと直線 $y = a$ が異なる 2 つの共有点をもてばよい．



$$g(1) = \frac{11}{6} - \sqrt{2}$$
$$g(-1) = \sqrt{2} - \frac{5}{6}$$

$g(1) < g(-1)$ であるから，求める a の値の範囲は

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < a < g(1),\ g(-1) < a < g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

したがって　$\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1 < a < \frac{11}{6} - \sqrt{2},\ \sqrt{2} - \frac{5}{6} < a < \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{12}}$