平成１８年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
衛生技術学科　数学I・数学II(平成18年2月4日)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $-2 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$|x+2|+|x-2|=x+3$ を満たす x の値を求めなさい。

問 2 x^4-13x^2+36 を因数分解しなさい。

問 3 2 次方程式 $6x^2-7x+2=0$ を解きなさい。

問 4 放物線 $y=2x^2$ を平行移動したところ，点 $(2,-1)$ を通り，頂点が直線 $y=-x-2$ 上の点となった。平行移動後の放物線の方程式を求めなさい。

問 5 不等式 $ax^2-2x+a+2>0$ がすべての x に対して成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 2 次方程式 $x^2+4x-2=0$ の解を α，β とする。このとき，2 つの解が $2\alpha+1$，$2\beta+1$ で，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式を求めなさい。

問 2 整式 $f(x)$ は，$2x+1$ で割ると 2 余り，$x-3$ で割ると -5 余る。このとき，$f(x)$ を $2x^2-5x-3$ で割ったときの余りを求めなさい。

問 3 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1=0$ を満たす θ の値の求めなさい。

問 4 方程式 $2\log_3(x+2)=\log_3(4-x)$ を解きなさい。

問 5 2 点 $(-2,-1)$，$(4,\ 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathrm{AB}=10$，$\mathrm{AC}=8$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ である三角形 ABC があり，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC との交点を M とする。このとき，次の各問い (**問 1〜3**) に答えなさい。

問 1 BC の長さと三角形 ABC の外接円の半径を求めなさい。

問 2 三角形 ABC の面積を求めなさい。また，三角形 ABC の面積を利用して，AM の長さを求めなさい。

問 3 直線 AM と三角形 ABC の外接円との交点のうち A でないものを D とするとき，CD の長さを求めなさい。なお,「円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° である。」という性質を用いてもよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=\displaystyle\int_a^x (3t^2-3)\,dt$ がある。このとき，次の各問い (**問 1〜4**) に答えなさい。

問 1 $f(x)$ を計算しなさい。

問 2 関数 $y=f(x)$ のグラフが点 $(2,\ 4)$ を通るとき，定数 a の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

問 3 問 2 のとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

問 4 問 2 のとき，関数 $y=f(x)$ のグラフの接線のうち，点 $(2,\ 4)$ を通るものをすべて求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $-2 \leqq x \leqq 2$ のとき，$x+2 \geqq 0$，$x-2 \leqq 0$ であるから

$$|x+2| = x+2, \qquad |x-2| = -(x-2) = -x+2$$

したがって　　$x+2+(-x+2) = x+3$

$-2 \leqq x \leqq 2$ に注意して　　$\boldsymbol{x=1}$

問 2 $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2-4)(x^2-9)$

$$= \boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$$

問 3 左辺を因数分解すると　　$(2x-1)(3x-2) = 0$

よって　　$2x-1=0$　または　$3x-2=0$

したがって，解は　$\boldsymbol{x = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3}}$

【別解】解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} \\ &= \frac{8}{12},\ \frac{6}{12} = \boldsymbol{\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

問 4 直線 $y = -x-2$ 上に放物線の頂点があるので，頂点の座標を $(p, -p-2)$ とする．この放物線は $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものであるから

$$y = 2(x-p)^2 - p - 2 \qquad \cdots ①$$

とおける．① は点 $(2, -1)$ を通るので

$$-1 = 2(2-p)^2 - p - 2$$

整理して　　$2p^2 - 9p + 7 = 0$

左辺を因数分解して　　$(p-1)(2p-7) = 0$

したがって　　$p = 1,\ \frac{7}{2}$

よって，① から　　$\boldsymbol{y = 2(x-1)^2 - 3,\quad y = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}}$

問 5 不等式 $ax^2-2x+a+2>0$ がすべての x について成り立つためには，x^2 の係数は正，$D<0$ を満たせばよいから

x^2 の係数について　　$a>0 \quad \cdots ①$

$D<0$ であるから　　$(-2)^2-4\cdot a(a+2)<0$

整理して　　$-4a^2-8a+4<0$

-4 で割って　　$a^2+2a-1>0$

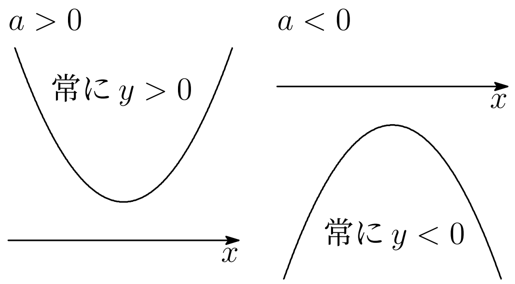
これを解いて　　$a<-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}<a \quad \cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{a>-1+\sqrt{2}}$

研究

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ は, $D<0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる．このとき a の符号により

$$a>0,\ D<0 \iff \text{常に } y>0$$
$$a<0,\ D<0 \iff \text{常に } y<0$$



２次式の定符号

常に $ax^2+bx+c>0 \iff a>0,\ D<0$

常に $ax^2+bx+c<0 \iff a<0,\ D<0$

[補足] 常に $ax^2+bx+c \geqq 0 \iff a>0,\ D \leqq 0$

常に $ax^2+bx+c \leqq 0 \iff a<0,\ D \leqq 0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ **問 1** 2 次方程式 $x^2+4x-2=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{1}=-4,\qquad \alpha\beta=\frac{-2}{1}=-2$$

ここで

$$\begin{aligned}(2\alpha+1)+(2\beta+1)&=2(\alpha+\beta)+2\\&=2\cdot(-4)+2=-6\\(2\alpha+1)(2\beta+1)&=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1\\&=4\cdot(-2)+2\cdot(-4)+1=-15\end{aligned}$$

よって，求める 2 次方程式は

$$x^2-(-6)x-15=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \boldsymbol{x^2+6x-15=0}$$

問 2 $f(x)$ を $2x^2-5x-3$ で割ったときの余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}f(x)&=(2x^2-5x-3)Q(x)+ax+b\\&=(2x+1)(x-3)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

この等式より $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}a+b,\ f(3)=3a+b$

また， $2x+1$ で割った余りが 2 であるから $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$x-3$ で割った余りが -5 であるから $\quad f(3)=-5$

よって $\quad -\frac{1}{2}a+b=2,\ 3a+b=-5$

これを解くと $\quad a=-2,\ b=1$

したがって，求める余りは $\quad \boldsymbol{-2x+1}$

問 3 与式から $\quad \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=-1$

左辺を変形すると $\quad 2\sin(\theta-60^\circ)=-1$

よって $\quad \sin(\theta-60^\circ)=-\frac{1}{2}\quad \cdots①$

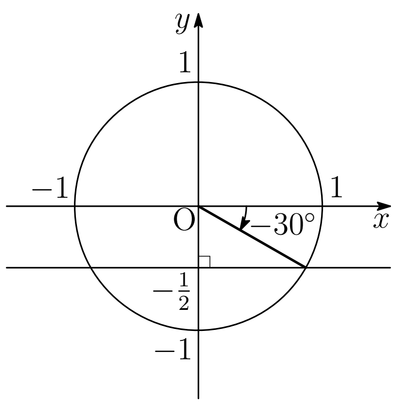
$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ のとき

$$-60^\circ \leqq \theta-60^\circ < 120^\circ$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$\theta-60^\circ=-30^\circ$$

したがって $\quad \boldsymbol{\theta=30^\circ}$



問 4 真数は正であるから　$x+2>0$　かつ　$4-x>0$

すなわち　$-2<x<4$　$\cdots$ ①

方程式を変形すると　$\log_3(x+2)^2=\log_3(4-x)$

よって　$(x+2)^2=4-x$

整理して　$x^2+5x=0$

したがって　$x(x+5)=0$

① に注意して　$\boldsymbol{x=0}$

問 5 2 点 $(-2,-1)$，$(4,\ 3)$ をそれぞれ A，B，円の中心を C，半径を r とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (1,\ 1)$$

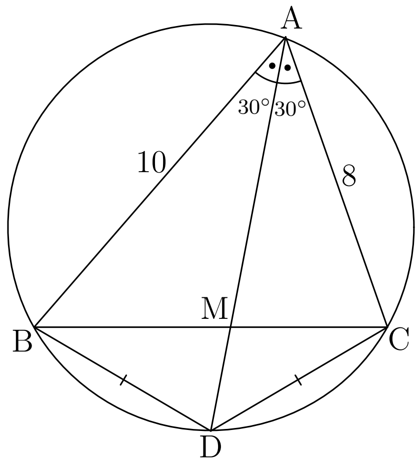
また　$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$

この円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{13}\,)^2$$

すなわち　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=13}$

$\boxed{3}$ **問 1** △ABC を余弦定理に適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\ &= 8^2 + 10^2 - 2\cdot8\cdot10\cos 60^\circ \\ &= 64 + 100 - 2\cdot8\cdot10\cdot\frac{1}{2} \\ &= 84\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから

$$\mathrm{BC} = \sqrt{84} = \mathbf{2\sqrt{21}}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，
正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{21} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{7}}\end{aligned}$$

問 2 $\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot10\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

$\mathrm{AM} = x$ とおく．$\triangle\mathrm{ABM} + \triangle\mathrm{ACM} = \triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot10x\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot8x\sin 30^\circ &= 20\sqrt{3} \\ \frac{5}{2}x + 2x &= 20\sqrt{3} \\ x &= \mathbf{\frac{40}{9}\sqrt{3}}\end{aligned}$$

問 3 $\angle\mathrm{BDC} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$，$\mathrm{BD} = \mathrm{CD}$ であるから，
$\mathrm{BD} = \mathrm{CD} = y$ とおいて，△BCD を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\cos 120^\circ \\ (2\sqrt{21})^2 &= y^2 + y^2 - 2y\cdot y \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 84 &= 3y^2 \\ y^2 &= 28\end{aligned}$$

$y > 0$ であるから　$y = 2\sqrt{7}$　すなわち　$\mathbf{CD = 2\sqrt{7}}$

$\boxed{4}$ **問 1** $f(x) = \int_a^x (3t^2-3)\,dt$

$= \Big[\ t^3 - 3t\ \Big]_a^x$

$= \boldsymbol{x^3 - 3x - (a^3 - 3a)}$

問 2 $f(2)=4$ であるから　$2^3 - 3\cdot2 - (a^3-3a) = 4$

整理して　$a^3 - 3a + 2 = 0$

左辺を因数分解して　$(a-1)^2(a+2) = 0$

$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{a = 1}$

問 3 $a=1$ から　$f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$= 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると

$x = -1,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

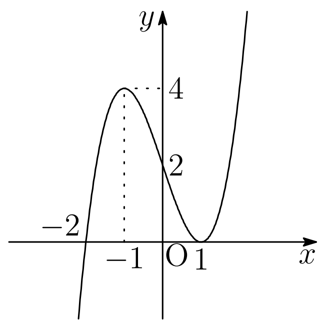
したがって，この関数は

$x=-1$ で極大値 4,

$x=1$ で極小値 0

をとる．

ゆえに，グラフは右の図のようになる．



問 4 接点の座標を $(c,\ c^3-3c+2)$ とすると，接線の傾きは $3c^2-3$ となるから，その方程式は

$$y - (c^3 - 3c + 2) = (3c^2-3)(x-c) \qquad \cdots ①$$

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るから

$$4 - (c^3 - 3c + 2) = (3c^2-3)(2-c)$$

よって　$c^3 - 3c^2 + 4 = 0$

すなわち　$(c+1)(c-2)^2 = 0$

$c = -1,\ 2$

したがって，接線の方程式は，① より

$c=-1$ のとき　$y = 4$

$c=2$ のとき　$y = 9x - 14$　　(答) $\boldsymbol{y = 4,\ y = 9x - 14}$