平成１８年度　熊本保健科学大学一般推薦入学試験問題
数学I(平成17年11月19日)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の各問いの空欄に当てはまるものを下の ①〜④ の中から一つ選び，ア，イ，ウ，$\cdots$ で示された解答欄に記入しなさい。

問１ $x=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ のとき，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

① $2\sqrt{3}$　　② $22-4\sqrt{2}$

③ 22　　④ $22+4\sqrt{2}$

問２ $|x-3|<2$ を解くと $\boxed{\text{イ}}$ である。

① $x<1,\ x>5$　　② $1<x<5$

③ $x<-1,\ x>1$　　④ $-1<x<1$

問３ ２次方程式 $6x^2+5x-4=0$ を解くと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

① $x=-\dfrac{1}{2},-\dfrac{4}{3}$　　② $x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3}$

③ $x=\dfrac{1}{2},-\dfrac{4}{3}$　　④ $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3}$

問４ 放物線 $y=-x^2+2x-4$ の頂点は，点 $\boxed{\text{エ}}$ である。

① $(-1,-3)$　　② $(-1,\ 3)$

③ $(1,-3)$　　④ $(1,\ 3)$

問 5　2 次関数 $y = 2x^2 + 4x - 1$ の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

① -5　　② -3

③ -1　　④ 1

問 6　2 次不等式 $8x^2 + 18x - 5 \leqq 0$ の解は $\boxed{\text{カ}}$ である。

① $-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq -\dfrac{1}{4}$　　② $-\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{4}$

③ $-\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$　　④ $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$

問 7　三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 5$，$\angle\mathrm{C} = 30^\circ$ のとき，三角形 ABC の外接円の半径は $\boxed{\text{キ}}$ である。

① $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$　　② 5

③ $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$　　④ 10

問 8　三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 8$，$\angle\mathrm{A} = 120^\circ$ のとき，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である。

① 8　　② $8\sqrt{2}$

③ $8\sqrt{3}$　　④ 16

4 次の各問いの空欄に当てはまるものを答えなさい。なお，問題文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，数字 (0〜9)，または符号 (−) が入り，ア，イ，ウ，$\cdots$ の一つ一つには，これらのいずれか一つが対応する。それらを，ア，イ，ウ，$\cdots$ で示された解答欄に記入しなさい。

また，分数形で解答が求められる場合には，既約分数で答えなさい。

例：$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $\dfrac{23}{7}$ と答えたいときは，アに「2」，イに「3」，ウに「7」を記入する。

例：$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として，エに「−」，オに「4」，カに「5」を記入する。符号は分子につけ,分母につけてはならない。

問 1 a を定数とする。2 次方程式 $x^2 + (2a + 2)x + (1 - 3a) = 0$ が重解をもつ。このとき $a = \boxed{\text{アイ}}$ のとき，重解は $x = \boxed{\text{ウ}}$ であり，$a = \boxed{\text{エ}}$ のとき，重解は $x = \boxed{\text{オカ}}$ である。

問 2 a を正の定数とする。2 次関数 $y = ax^2 - 6ax + a^2 + 9a - 5$ がある。$1 \leqq x \leqq 6$ におけるこの関数の最小値が -1 であるとき，$a = \boxed{\text{キ}}$ である。

問 3　a を定数とする。放物線 $y = 2x^2 + (3a-1)x + a^2 + 1$ が x 軸と共有点をもたないとき，$\boxed{\text{クケ}} < a < \boxed{\text{コ}}$ である。

問 4　三角形 ABC において，$\mathrm{AC} = 6$，$\mathrm{BC} = 4$，$\cos B = \dfrac{1}{4}$ とする。

このとき，$\mathrm{AB} = \boxed{\text{サ}} + \sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である。

問 5　1 辺の長さが 1 の正三角すい O-ABC がある．OB の中点を M，OC の中点を N とするとき，三角形 AMN の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

解答例

$\boxed{\mathbf{3}}$ 問 1 $x+y=(\sqrt{3}+2\sqrt{2})+(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$$=2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} xy &= (\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2 \\ &= 3-8=-5 \end{aligned}$$

したがって　$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= (2\sqrt{3})^2-2\cdot(-5) \\ &= 12+10=\mathbf{22} \end{aligned}$

(答) ③

問 2 $|x-3|<2$ より

$-2<x-3<2$ の両辺に 3 をたして

$$\boldsymbol{1<x<5}$$

(答) ②

問 3 左辺を因数分解すると　$(2x-1)(3x+4)=0$

よって　$2x-1=0$　または　$3x+4=0$

したがって，解は　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},-\frac{4}{3}}$

(答) ③

【別解】解の公式により

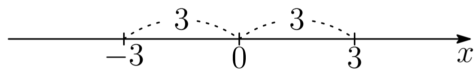
$$\begin{aligned} x &= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6\cdot(-4)}}{2\cdot6} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{121}}{12}=\frac{-5\pm11}{12} \\ &= \frac{6}{12},\ \frac{-16}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{2},-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

絶対値を含む方程式，不等式

$|\boldsymbol{a}|$ は数直線上で，実数 a に対応する点と原点との距離である．

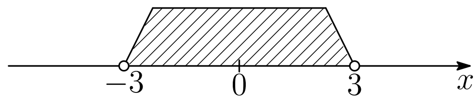
$\boxed{1}$ **方程式 $|\boldsymbol{x}| = \mathbf{3}$ の解**

3 と -3 で　$x = \pm 3$



$\boxed{2}$ **不等式 $|\boldsymbol{x}| < \mathbf{3}$ の解**

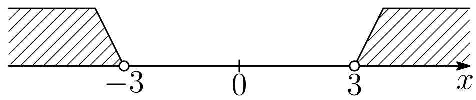
右の図より　$-3 < x < 3$



$\boxed{3}$ **不等式 $|\boldsymbol{x}| > \mathbf{3}$ の解**

右の図より　$x < -3$ と $x > 3$

これを，$x < -3,\ 3 < x$ と書く．



$c > 0$ のとき，一般に次のことがいえる．

方程式 $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{c}$ の解は　　$\boldsymbol{x = \pm c}$

不等式 $|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{c}$ の解は　　$\boldsymbol{-c < x < c}$

不等式 $|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{c}$ の解は　　$\boldsymbol{x < -c,\ c < x}$

$\boxed{4}$ **方程式 $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| = \mathbf{3}$ の解**　　　　← **$|\boldsymbol{X}| = \mathbf{3}$ の形**

$x - 2 = 3$ と $x - 2 = -3$ から

$x = 5$ と $x = -1$

これを，$x = 5,\ -1$ と書く．

$\boxed{5}$ **不等式 $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \mathbf{3}$ の解**　　　　← **$|\boldsymbol{X}| < \mathbf{3}$ の形**

$-3 < x - 2 < 3$ の各辺に 2 をたして

$-1 < x < 5$

$\boxed{6}$ **不等式 $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| > \mathbf{3}$ の解**　　　　← **$|\boldsymbol{X}| > \mathbf{3}$ の形**

$x - 2 < -3$ と $3 < x - 2$ から

$x < -1,\ 5 < x$

問 4 $y=-x^2+2x-4$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}-x^2+2x-4&=-(x^2-2x)-4\\&=-\{(x-1)^2-1^2\}-4\\&=-(x-1)^2-3\end{aligned}$$

したがって，放物線 $y=-x^2+2x-4$ の頂点の座標は $\mathbf{(1,-3)}$

(答) ③

問 5 $y=2x^2+4x-1$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}2x^2+4x-1&=2(x^2+2x)-1\\&=2\{(x+1)^2-1^2\}-1\\&=2(x+1)^2-3\end{aligned}$$

したがって，2 次関数 $y=2x^2+4x-1$ は $x=-1$ で**最小値 -3** をとる．

(答) ②

問 6 左辺を因数分解すると　$(2x+5)(4x-1)\leqq 0$

したがって　$\boldsymbol{-\frac{5}{2}\leqq x\leqq \frac{1}{4}}$

(答) ②

問 7 三角形 ABC の外接円の半径を R とすると

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=2R$

したがって

$$\begin{aligned}R&=\frac{1}{2}\times\frac{5}{\sin 30^\circ}\\&=\frac{1}{2}\times 5\div\frac{1}{2}=\mathbf{5}\end{aligned}$$

(答) ②

問 8 三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\sin 120^\circ\\&=16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{8\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(答) ③

$\boxed{4}$ 問1 重解をもつための条件は，係数について

$$(2a+2)^2-4\cdot1(1-3a)=0$$
$$4a^2+20a=0$$

が成り立つことである．これを解いて　$a=-5,\ 0$

重解は　　$x=-\dfrac{2a+2}{2\cdot1}=-a-1$

よって，重解は　$\boldsymbol{a=-5}$ **のとき** $\boldsymbol{x=4}$**，**　$\boldsymbol{a=0}$ **のとき** $\boldsymbol{x=-1}$

(答) ア．$-$　イ．5　ウ．4　エ．0　オ．$-$　カ．1

2 次方程式の係数と実数の解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数の解は，b^2-4ac の符号によって次のように分類される．$b^2-4ac=0$ のときは，2 つの解が重なったものと考えて，この解を**重解**という．

2 次方程式 $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ の実数の解と $\boldsymbol{b^2-4ac}$ の符号

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
実数の解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (異なる 2 つの解)	$-\dfrac{b}{2a}$ (重解)	ない

[注意] 上の b^2-4ac を D で表すことがある．

問2

$$\begin{aligned}y&=ax^2-6ax+a^2+9a-5\\&=a(x^2-6x)+a^2+9a-5\\&=a\{(x-3)^2-3^2\}+a^2+9a-5\\&=a(x-3)^2+a^2-5\end{aligned}$$

a は正の定数であるから，$1\leqq x\leqq6$ における最小値は a^2-5

したがって　　$a^2-5=-1$

$a>0$ に注意して　　$\boldsymbol{a=2}$

(答) キ．2

問 3 x 軸と共有点をもたないための条件は，係数について

$$(3a-1)^2-4\cdot 2(a^2+1)<0$$

整理して　$a^2-6a-7<0$

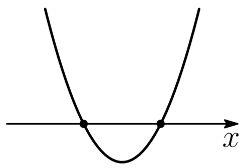
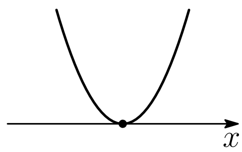
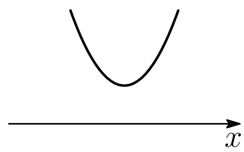
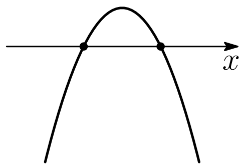
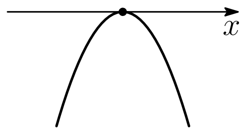
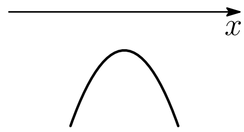
すなわち　$(a+1)(a-7)<0$

よって　$\boldsymbol{-1<a<7}$

(答) ク．－　ケ．1　コ．7

2 次関数 $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ のグラフと $\boldsymbol{x}$ 軸の位置関係

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次の表にまとめられる．

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
x 軸との 位置関係	異なる 2 点で 交わる	接する	共有点を もたない
x 軸との 共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$a>0$ のとき			
$a<0$ のとき			
$ax^2+bx+c=0$ の実数の解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない

[注意] 上の b^2-4ac を D で表すことがある．

問 4 余弦定理により　$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$$6^2 = c^2 + 4^2 - 2c \cdot 4 \times \frac{1}{4}$$
$$36 = c^2 + 16 - 2c$$

したがって，方程式 $c^2 - 2c - 20 = 0$ を解いて　$c = 1 \pm \sqrt{21}$

$c > 0$ であるから　　$\mathbf{AB = 1 + \sqrt{21}}$

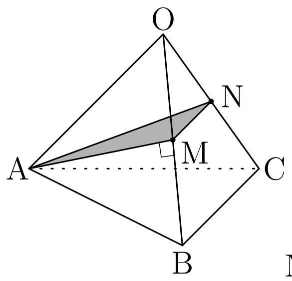
(答) サ．1　シ．2　ス．1

問 5 △OAB は正三角形で，M は OB の中点であるから，
△ABM は ∠AMB = 90° の直角三角形である．

したがって　　$\mathrm{AM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

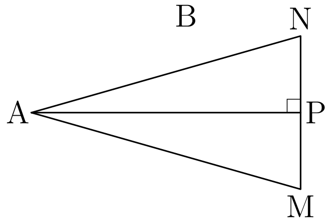
また，$\mathrm{AM} = \mathrm{AN}$，$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{1}{2}$ であるから，

MN の中点を P とすると，$\mathrm{PM} = \frac{1}{4}$ より



$$\begin{aligned}\mathrm{AP} &= \sqrt{\mathrm{AM}^2 - \mathrm{PM}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}\end{aligned}$$

よって，求める △AMN の面積 S は



$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \mathrm{MN} \times \mathrm{AP} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{16}}\end{aligned}$$

(答) セ．1　ソ．1　タ．1　チ．6