平成 19 年度　熊本県立保育大学校　一般入学試験問題
数学 I(平成 19 年 2 月 2 日)60 分

設問 1 次の式を展開しなさい。　式 : $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$

設問 2 2 桁の自然数 x と y の積は 360，最小公倍数は 120 である．このとき，x と y の和の最小値を求めなさい。

設問 3 4%の食塩水と 5%の食塩水が，200g ずつある。これから適当な量をとり，さらに 7%の食塩水をいくらか加えて，6%の食塩水を 800g 作りたい。このとき，7%の食塩水を出来るだけ多く使うとすれば，各食塩水を何 g ずつ使えばよいか求めなさい。

設問 4 三角形 ABC において，$c = 2a\cos B$ が成り立つとき，この三角形はどのような形状か求めなさい。

設問 5 次の 2 次方程式 A と B が，ともに実数解をもつような a の値をすべて求めなさい。ただし，a は整数とする．

方程式 $A : x^2 + 2ax + a + 2 = 0$

方程式 $B : x^2 - 2(a+3)x + 2(a^2+7) = 0$

解答例

設問 1 $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3 = \{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^3$

$$
\begin{aligned}
&= \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^3 \\
&= (a^4-b^4)^3 \\
&= (a^4)^3 - 3(a^4)^2b^4 + 3a^4(b^4)^2 - (b^4)^3 \\
&= \boldsymbol{a^{12} - 3a^8b^4 + 3a^4b^8 - b^{12}}
\end{aligned}
$$

設問 2 最大公約数を G，$x = Ga$，$y = Gb$ (a, b は互いに素) とおくと，

最小公倍数は Gab となる．このとき

$$xy = Ga \times Gb = G \times Gab$$

題意より $xy = 360$，$Gab = 120$ であるから　$G = 3$，$ab = 40$

ゆえに，条件を満たす a と b の組は　1 と 40，5 と 8

したがって，x と y の組は　$3{\cdot}1$ と $3{\cdot}40$，$3{\cdot}5$ と $3{\cdot}8$

よって，求める $x + y$ の最小値は　　$3{\cdot}5 + 3{\cdot}8 = \mathbf{39}$

設問 3 4%，5%，7%の食塩水を x g，y g，z g ずつ混ぜるとする．

食塩水の質量から　$x + y + z = 800$　$\cdots$①

食塩の質量から　$0.04x + 0.05y + 0.07z = 800 \times 0.06$

両辺に 100 をかけて　$4x + 5y + 7z = 4800$　$\cdots$②

①，② より　$y = 400 - \dfrac{3}{2}x$　$\cdots$③

$z = 400 + \dfrac{1}{2}x$　$\cdots$④

$0 \leqq x \leqq 200$，$0 \leqq y \leqq 200$ であるから，③ から　$\dfrac{400}{3} \leqq x \leqq 200$　$\cdots$⑤

題意より z を最大にするときの x，y，z を求めればよい．

④，⑤ から　$x = 200$ のとき z は最大となる．

これを ③，④ に代入して　$y = 100$，$z = 500$

(答) **4% : 200g，5% : 100g，7% : 500g**

設問 4 余弦定理により，与えられた等式は

$$c = 2a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

よって　$$c = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c}$$

すなわち　$c^2 = c^2 + a^2 - b^2$

ゆえに　$b^2 = a^2$

$a > 0$，$b > 0$ であるから　$a = b$

よって，三角形 ABC は　**BC = CA の二等辺三角形**

設問 5 方程式 A，B の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_1/4 &= a^2 - 1 \cdot (a+2) = a^2 - a - 2 \\ &= (a+1)(a-2) \\ D_2/4 &= \{-(a+3)\}^2 - 1 \cdot 2(a^2+7) = -a^2 + 6a - 5 \\ &= -(a-1)(a-5) \end{aligned}$$

A，B がともに実数解をもつための条件は　$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$

$D_1 \geqq 0$ から　$(a+1)(a-2) \geqq 0$
よって　$a \leqq -1$，$2 \leqq a$　$\cdots$①

$D_2 \geqq 0$ から　$-(a-1)(a-5) \geqq 0$
よって　$1 \leqq a \leqq 5$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$2 \leqq a \leqq 5$

a は整数であるから　$\boldsymbol{a = 2,\ 3,\ 4,\ 5}$