平成１８年度　熊本県立保育大学校　一般入学試験問題
数学I(平成18年2月3日)60分

設問 1 次の循環小数 x を分数で表しなさい。

$$x = 0.\dot{5}6\dot{7}$$

設問 2 次のような四角形ABCDの面積を求めなさい。

$$\mathrm{AB} = 2,\ \mathrm{BC} = \sqrt{3} + 1,\ \mathrm{CD} = \sqrt{2},\ \angle\mathrm{B} = 60^\circ,\ \angle\mathrm{C} = 75^\circ$$

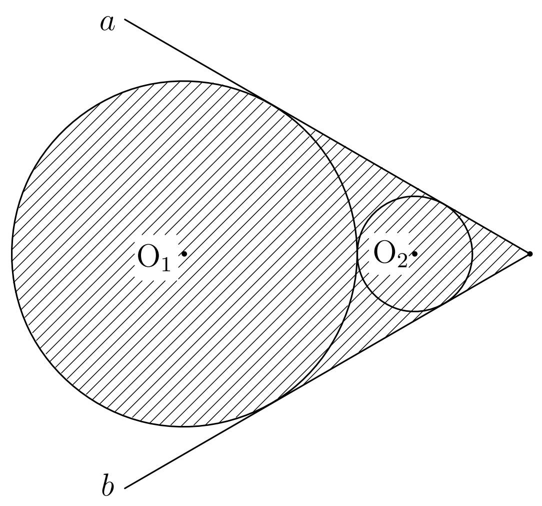
設問 3 次の不等式の解を求めなさい。

$$|x^2 - 2x - 3| \leqq x + 1$$

設問 4 任意の整数 x，y に対し，$x = a \times y + b\ (0 \leqq b < y)$ を満たす「整数 a」と「自然数か0である b」が，ただ1組存在する。いま，$x = -21$，$y = 6$ のとき，a と b を求めなさい。

設問 5 直線 $x + y = k$ が，2点 $\mathrm{A}(-5, -8)$，$\mathrm{B}(5,\ 0)$ を結ぶ線分ABと交わるとき，k の値の範囲を求めなさい。

設問 6 図のように半径6cmの円 $\mathrm{O_1}$ と半径2cmの円 $\mathrm{O_2}$ が外接していて，その共通外接線 a と b があるとき，斜線部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



解答例

設問 1 $x = 0.567567567\cdots$，$1000x = 567.567567567\cdots$ であるから

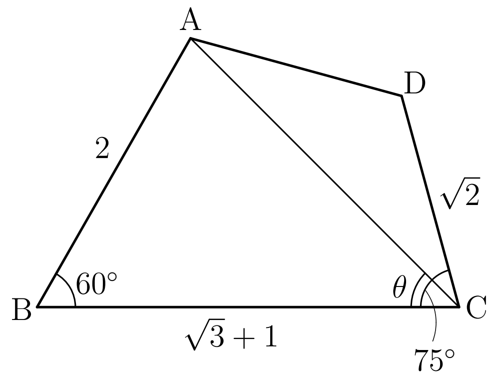
$$1000x - x = 567$$

すなわち　$999x = 567$

よって　$x = \dfrac{567}{999} = \boldsymbol{\dfrac{21}{37}}$

設問 2 $\triangle$ABC に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}^2 &= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ \\ &= 4 + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 4(\sqrt{3}+1) \times \frac{1}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$



CA > 0 であるから　CA $= \sqrt{6}$

$\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{BCA} = \theta$ とし，

正弦定理を使うと

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin\theta}$$

$$\sqrt{6}\sin\theta = 2\sin 60^\circ$$

すなわち　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

AB $<$ CA より $\theta < B$ であるから

$$\theta = 45^\circ$$

また，$\angle\mathrm{ACD} = 75^\circ - \theta = 30^\circ$

したがって，求める四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\sin 30^\circ \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{3+2\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

［補足］ A から BC に垂線を下ろすと簡単に求めることができる．

設問 3 $|x^2-2x-3| \leqq x+1$ より $-(x+1) \leqq x^2-2x-3 \leqq x+1$ であるから

$-(x+1) \leqq x^2-2x-3$ を解いて　$x \leqq -1,\ 2 \leqq x$　$\cdots$①

$x^2-2x-3 \leqq x+1$ を解いて　$-1 \leqq x \leqq 4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x=-1,\ 2 \leqq x \leqq 4}$

設問 4 $x=-21,\ y=6$ より　$-21=6a+b\ (0 \leqq b < 6)$

すなわち $b=-6a-21$　$\cdots$① であるから

$0 \leqq -6a-21 < 6$

各辺に 21 をたして　$21 \leqq -6a < 27$

各辺を -6 で割って　$-\dfrac{9}{2} \leqq a < -\dfrac{7}{2}$

a は整数であるから　$\boldsymbol{a=-4}$

$a=-4$ を ① に代入して　$\boldsymbol{b=3}$

設問 5 直線 $x+y=k$ が点 A$(-5,-8)$ を通るとき

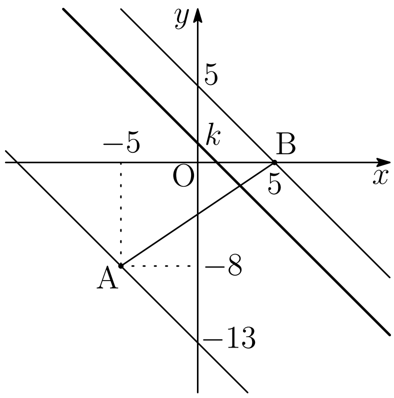
$k=-13$

直線 $x+y=k$ が点 B$(5,\ 0)$ を通るとき

$k=5$

直線 $x+y=k$ は，傾き -1，切片 k の直線であるから，線分 AB とこの直線が交わるときの k の値の範囲は

$\boldsymbol{-13 \leqq k \leqq 5}$



設問 6 $\triangle \mathrm{O_1P_1Q}$ と $\triangle \mathrm{OP_2Q}$ の相似比は $3:1$

$\mathrm{O_2Q} = x$ とすると $\mathrm{O_1Q} = 6 + 2 + x = 8 + x$ であるから

$(8 + x) : x = 3 : 1$　これを解いて　$x = 4$

したがって　$\angle \mathrm{O_2QP_2} = 30°$

ゆえに　$\triangle \mathrm{O_1P_1Q}$ は $\angle \mathrm{QO_1P_1} = 60°$, $\mathrm{P_1Q} = 6\sqrt{3}$ の直角三角形である.

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S &= \triangle \mathrm{O_1P_1Q} + \text{扇形}\,\mathrm{O_1P_1R} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3} + \pi\cdot 6^2 \times \frac{120}{360} \\ &= 18\sqrt{3} + 12\pi\end{aligned}$$

したがって　$S = \mathbf{36\sqrt{3} + 24\pi}$　$\mathbf{(cm^2)}$