

入試の軌跡
県立技術短期大学校
2006 － 2025
数学・英語



2025 年 7 月 19 日

熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会

序

本書「入試の軌跡 県立技術短期大学校」は，熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会(工進連)がこれまでに蓄積した数学および英語の入学試験問題を元に作成したものである．本書は同会が管理する専用サイトに掲載しているものを，熊本工業高校(同会の事務局)英語科の了解により公開することができた．数学の解答および英語・数学の入力は編者が担当している．

編者はセンター試験にリスニングテストが導入された平成 18 年(2006 年)に熊本県教育委員会から ICT 事業を編者個人に委託され，授業で扱いやすいリスニング教材の作成を目指した．そこで大学入試センターが公開している PDF ファイル(問題)にプレイヤー付き音声ファイルを埋め込むことでオフラインでも利用可能となり，同時に問題・スクリプト・和訳・解答・解説にハイパーリンクを施すことで一体型の教材として授業や生徒個人で学習できるものを次に作成した．

ICT 教材(リスニング) <http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html>

また，発音・アクセント問題についても PDF ファイルに音声を埋め込み，オフラインで利用できるものも作成した．センター試験過去 30 年 60 回分(本試・追試)の発音・アクセント問題およびアクセントの基本法則を次に掲載している．これらを元にデータサイエンスの観点から分析及び対策を検討した．

過去問 60 回分 http://kumamoto.s12.xrea.com/eng/center_pro_acc.zip
アクセント法則 http://kumamoto.s12.xrea.com/eng/center_accent_rule.pdf
アクセント分析 http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2019_10_25.pdf

工進連情報共有化事業

- H8 熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会(工進連)が発足。会員校は、熊本工業高校、玉名工業高校、鹿本商工高校、翔陽高校、御船高校、小川工業高校、八代工業高校、水俣工業高校(現：水俣高校)、球磨工業高校、天草工業高校。
- H12 情報共有に必要なインフラが整備されたため、編者が勤務していた球磨工業高校進路指導部が中心となり、入試情報の共有化が開始される。ユーザー名およびパスワードが必要となる専用のサイトを開設する。以来20年余り編者が一人でサイトの管理・コンテンツの作成を担当する。
- H13 工進連模試(受験料無料)を編者が担当し、専用サイトに問題と解答を掲載する。各学校で印刷・監督・採点を行い、点数を球磨工業高校に報告して参加生徒全体の結果を各学校に返却する。得点と進路決定状況の追跡調査も実施した。
- H14 球磨工業高校が同会の事務局(事務局長は編者)を担当(～H15)
工業高校生の「進学への数学」を作成
- H15 工業高校生の「進学への英語」を荒木先生(現天草工業高校教頭)と共同で作成
- H17 「就職への数学Ⅰ・Ⅱ(問題集・解答集)」を作成
- H19 「就職への数学(総合編)」を作成
- H20 「日々の課題」を作成
- H23 「公務員合格対策ノート」を作成

ICT 事業

- H18 センターテストリスニング教材、発音・アクセント教材
数学授業教材(書き込みノート・解説・副教材)の電子文書化(PDF)
熊本県入試問題 H18(数学・英語)
- H19 熊本県入試問題 H19(数学・英語)
- H20 熊本県入試問題 H20(数学・英語)
- H21 熊本県入試問題 H21(数学・英語)
- H24 入試の軌跡 九大(数学)・熊大(数学・英語)
- H26 九州地区大学(数学)
- H28 難関大学(数学)
- H30 入試の軌跡 難関大学(数学)
入試の軌跡 九大(数学・英語)・熊大(数学・英語)

目次

序	i
工進連情報共有化事業	ii
ICT 事業	ii
第 1 章 数学	1
1.1 令和 7 年度推薦前期試験 (90 分)	1
1.2 令和 7 年度推薦後期試験 (90 分)	7
1.3 令和 7 年度一般試験 (90 分)	13
1.4 令和 6 年度推薦前期試験 (90 分)	19
1.5 令和 6 年度推薦後期試験 (90 分)	25
1.6 令和 6 年度一般試験 (90 分)	31
1.7 令和 5 年度推薦前期試験 (90 分)	38
1.8 令和 5 年度推薦後期試験 (90 分)	44
1.9 令和 5 年度一般試験 (90 分)	50
1.10 令和 4 年度推薦前期試験 (90 分)	55
1.11 令和 4 年度推薦後期試験 (90 分)	62
1.12 令和 4 年度一般試験 (90 分)	67
1.13 令和 3 年度推薦前期試験 (90 分)	75
1.14 令和 3 年度推薦後期試験 (90 分)	81
1.15 令和 3 年度一般試験 (90 分)	86
1.16 令和 2 年度推薦前期試験 (90 分)	92
1.17 令和 2 年度推薦後期試験 (90 分)	97
1.18 令和 2 年度一般試験 (90 分)	105
1.19 平成 31 年度推薦前期試験 (90 分)	112
1.20 平成 31 年度推薦後期試験 (90 分)	116
1.21 平成 31 年度一般試験 (90 分)	122
1.22 平成 30 年度推薦前期試験 (90 分)	127
1.23 平成 30 年度推薦後期試験 (90 分)	133
1.24 平成 30 年度一般試験 (90 分)	139
1.25 平成 29 年度推薦前期試験 (90 分)	146
1.26 平成 29 年度推薦後期試験 (90 分)	152
1.27 平成 29 年度一般試験 (90 分)	158
1.28 平成 28 年度推薦前期試験 (90 分)	164
1.29 平成 28 年度推薦後期試験 (90 分)	168
1.30 平成 28 年度一般試験 (90 分)	172

1.31	平成 27 年度推薦前期試験 (90 分)	178
1.32	平成 27 年度推薦後期試験 (90 分)	182
1.33	平成 27 年度一般試験 (90 分)	187
1.34	平成 26 年度推薦前期試験 (90 分)	193
1.35	平成 26 年度推薦後期試験 (90 分)	197
1.36	平成 26 年度一般試験 (90 分)	203
1.37	平成 25 年度推薦前期試験 (90 分)	209
1.38	平成 25 年度推薦後期試験 (90 分)	215
1.39	平成 25 年度一般試験 (90 分)	221
1.40	平成 24 年度推薦前期試験 (90 分)	228
1.41	平成 24 年度推薦後期試験 (90 分)	234
1.42	平成 24 年度一般試験 (90 分)	241
1.43	平成 23 年度推薦前期試験 (90 分)	248
1.44	平成 23 年度推薦後期試験 (90 分)	253
1.45	平成 23 年度一般試験 (90 分)	258
1.46	平成 22 年度推薦前期試験 (90 分)	264
1.47	平成 22 年度推薦後期試験 (90 分)	270
1.48	平成 22 年度一般試験 (90 分)	276
1.49	平成 21 年度推薦前期試験 (90 分)	282
1.50	平成 21 年度推薦後期試験 (90 分)	289
1.51	平成 21 年度一般試験 (90 分)	294
1.52	平成 20 年度推薦前期試験 (90 分)	301
1.53	平成 20 年度推薦後期試験 (90 分)	306
1.54	平成 20 年度一般試験 (90 分)	311
1.55	平成 19 年度推薦試験 (90 分)	319
1.56	平成 19 年度一般試験 (90 分)	326
1.57	平成 18 年度推薦試験 (90 分)	333
1.58	平成 18 年度一般試験 (90 分)	342
第 2 章 英語		349
2.1	令和 7 年度一般入学試験 (60 分)	349
2.2	令和 6 年度一般入学試験 (60 分)	355
2.3	令和 5 年度一般入学試験 (60 分)	361
2.4	令和 4 年度一般入学試験 (60 分)	367
2.5	令和 3 年度一般入学試験 (60 分)	372
2.6	令和 2 年度一般入学試験 (60 分)	377
2.7	平成 31 年度一般入学試験 (60 分)	382
2.8	平成 30 年度一般入学試験 (60 分)	387

2.9 平成 29 年度一般入学試験 (60 分)	392
2.10 平成 28 年度一般入学試験 (60 分)	397
2.11 平成 27 年度一般入学試験 (60 分)	402
2.12 平成 26 年度一般入学試験 (60 分)	407
2.13 平成 25 年度一般入学試験 (60 分)	412
2.14 平成 24 年度一般入学試験 (60 分)	417
2.15 平成 23 年度一般入学試験 (60 分)	422
2.16 平成 22 年度一般入学試験 (60 分)	428
2.17 平成 21 年度一般入学試験 (60 分)	434
2.18 平成 20 年度一般入学試験 (60 分)	440
2.19 平成 19 年度一般入学試験 (60 分)	446
2.20 平成 18 年度一般入学試験 (60 分)	452

第 1 章 数学

1.1 令和 7 年度推薦前期試験 (90 分)

- [1] (1) a, b を整数とする. $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (x+2)(x+a)(2x+b)$ が成り立つならば, a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) $a + \frac{1}{a} = 4$ のとき, $a^2 + \frac{1}{a^2} = \boxed{\text{ウ}}$, $a^3 + \frac{1}{a^3} = \boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) $y = 2x^2 + 4x + 1$ のグラフは $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{カ}}$ だけ平行移動したものである.
- (4) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. $\sin \theta = \frac{1}{7}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{キ}}$, $\tan \theta = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 5 つの値 1, 2, 7, a , 11 からなるデータの平均値が 6 であるとき, 定数 a の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である. また, このときのデータの分散は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) 連立不等式 $\begin{cases} x - 2 \geq -3x + 1 \\ |x - 1| < 2 \end{cases}$ を満たす整数 x は $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) a を定数とする. 2 次方程式 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ の 2 つの解がともに 0 以上 3 以下であるとき, a のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ス}} \leq a \leq \boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) 2 次不等式 $x^2 + kx + 2k - 1 > 0$ の解がすべての実数であるとき, 定数 k のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < k < \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ について, A から BC へ下ろした垂線を AH とする. $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AH = 1$ のとき, $BC = \boxed{\text{チ}}$ であり, したがって, $\sin 75^\circ = \boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) 6 つの値からなるデータ 58, 19, 74, 30, 45, 32 に関して, 次の (i)~(v) の中で正しいのは $\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ト}}$ である.
- (i) 平均値は 43 である. (ii) 中央値は 52 である.
- (iii) 四分位範囲は 28 である. (iv) 四分位偏差は $\sqrt{28}$ である.
- (v) データの範囲は 26 である.

- [3] 1個の仕入れ価格が100の商品があり，1個あたりの儲けを x ($0 \leq x \leq 100$) とし
て，1個 $100 + x$ で販売すると，1日の販売個数は $240 - 2x$ となる．1日の儲
け y は1個あたりの儲けに1日の販売個数を乗したものであり， y の2次関数
 $y = \boxed{\text{ナ}}$ で表される． y は $x = \boxed{\text{ニ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ヌ}}$ をとる． $y \geq 7000$ を
満たす最小の販売価格 $100 + x$ は $\boxed{\text{ネ}}$ である．

- [4] 円に内接する四角形 ABCD において，

$$AB = 4, \quad BC = 3, \quad CD = 3, \quad \angle B = 60^\circ$$

とする．このとき， $AC = \boxed{\text{ノ}}$ ， $\angle D = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ であり， $AD = \boxed{\text{ヒ}}$ である．
また，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である．

解答例

[1] (1) $2x^3 - x^2 - 13x - 6$ が $x + 2$ を因数にもつことに注意して

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 &= (x + 2)(2x^2 - 5x - 3) \\ &= (x + 2)(x - 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

(答) ア. -3 イ. 1

(2) $a + \frac{1}{a} = 4$ の両辺を2乗すると $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 4^2$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 16 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$$

$a + \frac{1}{a} = 4$ の両辺を3乗すると $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = 4^3$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 64 \quad \text{ゆえに} \quad a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \cdot 4 = 64$$

$$\text{よって} \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = 52$$

(答) ウ. 14 エ. 52

(3) $y = 2x^2 + 4x + 1 = 2(x + 1)^2 - 1$ の頂点は $(-1, -1)$

したがって, $y = 2x^2 + 4x + 1$ のグラフは $y = 2x^2$ のグラフを

x 軸方向に -1 , y 軸方向に -1

だけ平行移動したものである.

(答) オ. -1 カ. -1

(4) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\cos \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{7} \div \left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

(答) キ. $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ク. $-\frac{\sqrt{3}}{12}$

$$(5) \frac{1+2+7+a+11}{5} = 6 \text{ であるから } a = 9$$

1, 2, 7, 9, 11 について $E(X) = 6$

$$E(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2}{5} = 51.2$$

$$\text{したがって } E(X^2) - E(X)^2 = 51.2 - 6^2 = \mathbf{15.2}$$

(答) ケ. 9 コ. 15.2

$$[2] (1) \text{ 連立不等式 } \begin{cases} x - 2 \geq -3x + 1 \\ |x - 1| < 2 \end{cases}$$

$$\text{第1式を解くと } x \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{第2式を解くと } -2 < x - 1 < 2 \text{ ゆえに } -1 < x < 3$$

$$\text{連立不等式の解は } \frac{3}{4} \leq x < 3 \text{ これを満たす整数 } x \text{ は } \mathbf{1, 2}$$

(答) サ. シ. 1, 2

$$(2) x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \text{ より } (x - a)^2 = 1$$

$$x - a = \pm 1 \text{ ゆえに } x = a \pm 1$$

この2つの解がともに0以上3以下であるから

$$0 \leq a - 1, \quad a + 1 \leq 3 \text{ ゆえに } \mathbf{1 \leq a \leq 2}$$

(答) ス. 1 セ. 2

(3) 2次不等式 $x^2 + kx + 2k - 1 > 0$ の解がすべての実数であるから, 係数について

$$D = k^2 - 4(2k - 1) < 0 \text{ ゆえに } k^2 - 8k + 4 < 0$$

$$\text{これを解いて } \mathbf{4 - 2\sqrt{3} < k < 4 + 2\sqrt{3}}$$

(答) ソ. $4 - 2\sqrt{3}$ タ. $4 + 2\sqrt{3}$

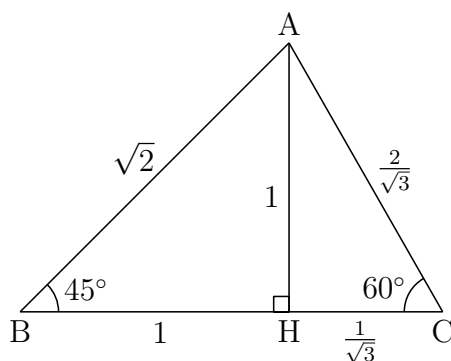
- (4) $BC = BH + CH = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $A = 75^\circ$ より, $\triangle ABC$ の面積について

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 75^\circ = \frac{1}{2}BC \cdot AH$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \frac{BC \cdot AH}{AB \cdot AC} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(答) チ. $\frac{1}{2}$ ツ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



- (5) 6つのデータ 19, 30, 32, 45, 58, 74 について

(i) 平均値 $\frac{19 + 30 + 32 + 45 + 58 + 74}{6} = 43$

(ii) 中央値 $Q_2 = \frac{32 + 45}{2} = 38.5$

(iii) $Q_1 = 30$, $Q_3 = 58$ より, 四分位範囲 $Q_3 - Q_1 = 28$

(iv) 四分位偏差 $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 14$

(v) データの範囲 $74 - 19 = 55$

(答) テ. ト. (i),(iii)

[3] 1日の儲け y は $y = x(240 - 2x) = -2x^2 + 240x$

$y = -2(x - 60)^2 + 7200$ であるから, $x = 60$ のとき, 最大値 **7200**

$y \geq 7000$ を満たすとき $-2x^2 + 240x \geq 7000$

$x^2 - 120x + 3500 \leq 0$ ゆえに $(x - 50)(x - 70) \leq 0$

これを解いて $50 \leq x \leq 70$ ゆえに $150 \leq 100 + x \leq 170$

よって, 販売価格 $100 + x$ の最小値は **150**

(答) ナ. $-2x^2 + 240x$ ニ. 60 ヌ. 7200 ネ. 150

[4] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ \\ &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13 \end{aligned}$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{13}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$AD = x$ とし, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

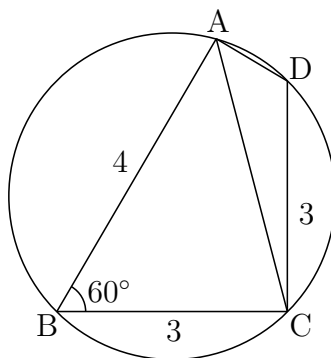
$$\begin{aligned} (\sqrt{13})^2 &= 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cos 120^\circ \\ &= 9 + x^2 + 3x \end{aligned}$$

整理すると $x^2 + 3x - 4 = 0$ ゆえに $(x+4)(x-1) = 0$

$x > 0$ であるから $AD = x = 1$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \sin 120^\circ \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



(答) ノ. $\sqrt{3}$ ハ. 120 ヒ. 1 フ. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

1.2 令和7年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) 実数を要素とする2つの集合 $A = \{-1, 2, a^2 + 1\}$, $B = \{1, a - 1, b - 1\}$ に対して, $A = B$ が成り立つとき, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) $x + y = 2\sqrt{2}$, $xy = -2$ のとき, $x^2 + y^2 = \boxed{\text{ウ}}$, $x - y = \boxed{\text{エ}}$ である. ただし, $x > y$ とする.
- (3) 放物線 $y = x^2 + 4x + 3$ を平行移動して放物線 $y = x^2 - 6x + 12$ に重ねるには, x 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{カ}}$ だけ平行移動すればよい.
- (4) $\triangle ABC$ において, $\angle B = 90^\circ$, $\sin \angle A = \frac{1}{3}$, $BC = 1$ とする. $\sin C = \boxed{\text{キ}}$, $AB = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 6つの値からなるデータ 5, 11, 6, 13, 2, 8 の中央値は $\boxed{\text{ケ}}$, 四分位偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) 1個 450 円の菓子 A と 1個 300 円の菓子 B をあわせて 10 個, 合計金額が 4000 円以下となるように買う. このとき, 菓子 A は最大で $\boxed{\text{サ}}$ 個買え, その合計金額は $\boxed{\text{シ}}$ 円である.
- (2) $y = f(x)$ は2次の項の係数が1である2次関数とする. 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標が2と6であるとき, $y = f(x)$ は $x = \boxed{\text{ス}}$ で最小値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる.
- (3) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \leq 0 \\ |2x - 3| \geq 5 \end{cases}$ の解は $\boxed{\text{ソ}} \leq x \leq \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ について, $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 3$ とする. このとき, $\cos \angle A = \boxed{\text{チ}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) 5つの値からなるデータ 1, 3, 4, a , b の平均値が3, 分散が2であれば, $a = \boxed{\text{テ}}$, $b = \boxed{\text{ト}}$ である. ただし, $a < b$ とする.

- [3] a を正の定数とする. x の2次方程式 $ax^2 - 2(a+1)x + a + \frac{3}{a} = 0$ が異なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は $a > \boxed{\text{ナ}}$ である. さらに, この2次方程式の2つの解 α, β ($\alpha < \beta$) について, $\beta - \alpha = \sqrt{2}$ となる定数 a の値は $a = \boxed{\text{ニ}}$ であり, このとき, $\beta^2 - \alpha^2 = \boxed{\text{ヌ}}$ となる. また, x の2次関数 $y = ax^2 - 2(a+1)x + a + \frac{3}{a}$ ($0 \leq x \leq 3$) が $x = 3$ のときに最大となるような定数 a の値の範囲は $a \geq \boxed{\text{ヌ}}$ である.
- [4] $\triangle ABC$ において, $AB = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 120^\circ$ とする. このとき, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ であり, $BC = \boxed{\text{ハ}}$ である. さらに, 辺 BC 上に点 D を $\angle BAD = \angle CAD$ が成り立つようにとると, $\frac{BD}{CD} = \boxed{\text{ヒ}}$, $AD = \boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $1 \in A$ かつ $1 \in B$ より $a^2 + 1 = 1$ これを解いて $a = 0$

したがって $A = \{-1, 2, 1\}$, $B = \{1, -1, b-1\}$

さらに $2 \in A$ かつ $2 \in B$ ゆえに $b-1 = 2$ すなわち $b = 3$

(答) ア. 0 イ. 3

(2) $x + y = 2\sqrt{2}$, $xy = -2$ より

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (-2) = 12,$$

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 12 - 2 \cdot (-2) = 16$$

$x > y$ より, $x - y > 0$ であるから $x - y = 4$

(答) ウ. 12 エ. 4

(3) 放物線 $C_1: y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ の頂点は $(-2, -1)$

放物線 $C_2: y = x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3$ の頂点は $(3, 3)$

したがって, C_1 を C_2 に重ねるには

x 軸方向に $3 - (-2) = 5$, y 軸方向に $3 - (-1) = 4$

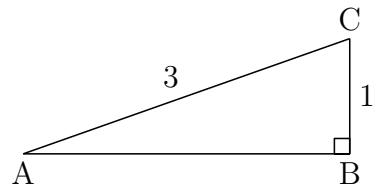
だけ平行移動すればよい.

(答) オ. 5 カ. 4

(4) 三平方の定理より $AB^2 + 1^2 = 3^2$

これを解いて $AB = 2\sqrt{2}$

したがって $\sin \angle C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



(答) キ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ク. $2\sqrt{2}$

(5) 6つのデータ 2, 5, 6, 8, 11, 13により

$$Q_1 = 5, \quad Q_2 = \frac{6+8}{2} = 7, \quad Q_3 = 11$$

$$\text{四分位偏差} \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3$$

(答) ケ. 7 コ. 3

[2] (1) 菓子 A を x 個買うとすると

$$450x + 300(10 - x) \leq 4000 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq \frac{20}{3}$$

x の最大値は **6** (個) であるから, このとき, 上式の左辺は

$$450 \times 6 + 300 \times 4 = \mathbf{3900} \text{ (円)}$$

(答) サ. 6 シ. 3900

(2) 条件より, $f(x) = (x - 2)(x - 6)$ であるから

$$f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x - 4)^2 - 4$$

よって, $x = 4$ で最小値 -4 をとる.

(答) ス. 4 セ. -4

$$(3) \begin{cases} x^2 + 2x - 15 \leq 0 \\ |2x - 3| \geq 5 \end{cases}$$

第1式から $(x + 5)(x - 3) \leq 0$ ゆえに $-5 \leq x \leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$

第2式から $2x - 3 \leq -5, 5 \leq 2x - 3$ ゆえに $x \leq -1, 4 \leq x \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通範囲を求めると $-5 \leq x \leq -1$

(答) ソ. -5 タ. -1

(4) 余弦定理により

$$\cos \angle A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{9 + 4 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{(答) チ. } \frac{1}{2} \quad \text{ツ. } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(5) \frac{1 + 3 + 4 + a + b}{5} = 3, \quad \frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + a^2 + b^2}{5} - 3^2 = 2$$

ゆえに $a + b = 7, a^2 + b^2 = 29$ $a < b$ に注意して $a = 2, b = 5$

(答) テ. 2 ト. 5

[3] 2次方程式 $ax^2 - 2(a+1)x + a + \frac{3}{a} = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (a+1)^2 - a \left(a + \frac{3}{a} \right) = 2a - 2$$

2次方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解をもつとき, $D > 0$ より

$$2a - 2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad a > 1$$

$(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2(a+1)}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{a + \frac{3}{a}}{a} = \frac{a^2 + 3}{a^2} \quad (**)$$

上の2式から

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left\{ \frac{2(a+1)}{a} \right\}^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + 3}{a^2} = \frac{8a - 8}{a^2} \end{aligned}$$

$\beta - \alpha = \sqrt{2}$ を上式に代入すると

$$2 = \frac{8a - 8}{a^2} \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

これを $(**)$ の第1式に代入すると $\alpha + \beta = 3$

$$\beta^2 - \alpha^2 = (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 3\sqrt{2}$$

2次関数 $y = ax^2 - 2(a+1)x + a + \frac{3}{a}$ の軸は $x = \frac{a+1}{a}$

定義域 $0 \leq x \leq 3$ の中央値は $\frac{3}{2}$

$x = 3$ で最大になるのとき ($a > 0$), 中央値 $\frac{3}{2}$ は軸より右側にあるから

$$\frac{a+1}{a} \leq \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a \leq 2$$

(答) ナ. 1 ニ. 2 ヌ. $3\sqrt{2}$ ネ. 2

[4] $AB = 6$, $AC = 3$, $A = 120^\circ$ より

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ \\ &= 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 63 \end{aligned}$$

$BC > 0$ であるから $BC = 3\sqrt{7}$

AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$AB : AC = BD : CD \text{ より } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3} = 2$$

$BD = \frac{2}{3}BC$, $CD = \frac{1}{3}BC$ であるから

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB \cdot AC - BD \cdot CD = AB \cdot AC - \frac{2}{9}BC^2 \\ &= 6 \cdot 3 - \frac{2}{9} \cdot 63 = 4 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = 2$

(答) ノ. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ハ. $3\sqrt{7}$ ヒ. 2 フ. 2

1.3 令和7年度一般試験(90分)

- [1] (1) $\sqrt{3}+1$ の整数部分を a , 小数部分を b とする. 整数 m, n に対して, $a+\frac{2}{b}=m+\sqrt{n}$ が成り立つとき, $m=\boxed{\text{ア}}$, $n=\boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) $0 \leq \theta \leq \pi$ とする. $\cos \theta = -\frac{24}{25}$ のとき, $\sin \theta = \boxed{\text{ウ}}$, $\tan \theta = \boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 定数 a を含む整式 $x^2+ax-a+2$ を整式 $x-1, x, x+1$ で割ったときの余りをそれぞれ p, q, r とする. p, q, r が $q^2=p+r+1$ を満たすとき, a の値は $\boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) 向かい合う2組の対辺の長さが8と3の平行四辺形が 120° の角をもつとき, その2つの対角線の長さは $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 3次関数 $y=-x^3+2x^2-x+2$ は $x=\boxed{\text{ケ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる.
- [2] (1) $f(x)=x^3+ax^2+ax-2a-1$ (a は定数) とする. $f(x)=(x-1)(x^2+\boxed{\text{サ}})$ であり, $x=1$ が3次方程式 $f(x)=0$ の2重解であれば $a=\boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 (a, b) における円の接線の方程式は $\boxed{\text{ス}}$ と表される. この接線が点 $(2\sqrt{3}, 2)$ を通るとき, (a, b) は $(0, 2)$ または $\boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) $0 \leq \theta < \pi$ のとき, 方程式 $\cos 2\theta + (\sqrt{3}-2)\sin \theta + \sqrt{3}-1=0$ を満たす θ の値は $\boxed{\text{ソ}}$ と $\boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) 次の (i)~(v) の5つの関数のうち, そのグラフが $y=4^x$ または $y=\log_4 x$ のグラフの平行移動により得られるものは, $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ である.
- (i) $y=4^{x+1}-2$ (ii) $y=2^{3x}$ (iii) $y=\log_4 2x^2$ (iv) $y=\log_4 7x-1$
(v) $y=4^{\frac{1}{2}x-2}$
- (5) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^2 (x^2-x) dx = \boxed{\text{テ}}, \quad \int_0^2 |x^2-x| dx = \boxed{\text{ト}}$$

[3] k は正の定数とする. x についての2つの不等式

$$(i) 4^x - 5 \times 2^{x+1} + 16 \leq 0 \quad (ii) (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - k^2 \leq 0$$

を考える. 不等式 (i) の解は $\boxed{\text{ナ}} \leq x \leq \boxed{\text{ニ}}$ である. 不等式 (i) を満たすすべての x が不等式 (ii) を満たすとき, k のとりうる値の範囲は $k \geq \boxed{\text{ヌ}}$ である. 不等式 (ii) を満たすすべての x が不等式 (i) を満たすとき, k のとりうる値の範囲は $0 < k \leq \boxed{\text{ネ}}$ である.

[4] 放物線 $C: y = \frac{5}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}$ 上の点 A における接線の傾きが $-\frac{1}{2}$ であるとする. このとき, 点 A の x 座標は $x = \boxed{\text{ノ}}$ である. 点 A を通り, 接線と直交する直線 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{ハ}}$ である. 放物線 C と直線 ℓ の交点で A と異なる点の x 座標は $x = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, 放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $1 < \sqrt{3} < 2$ より, $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ であるから

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} - 1) \quad \text{ゆえに} \quad a = 2, b = \sqrt{3} - 1$$

したがって

$$a + \frac{2}{b} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 3 + \sqrt{3}$$

よって $m = 3, n = 3$

(答) ア. 3 イ. 3

(2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{7}{25} \div \left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{7}{24} \end{aligned}$$

(答) ウ. $\frac{7}{25}$ エ. $-\frac{7}{24}$

(3) $f(x) = x^2 + ax - a + 2$ とおく. $f(x)$ を $x - 1, x, x + 1$ で割った余りは, それぞれ $f(1), f(0), f(-1)$ であるから

$$p = f(1) = 3, \quad q = f(0) = -a + 2, \quad r = f(-1) = -2a + 3$$

これらを $q^2 = p + r + 1$ に代入すると $(-a + 2)^2 = 3 + (-2a + 3) + 1$
整理すると $a^2 - 2a - 3 = 0$ ゆえに $(a + 1)(a - 3) = 0$

よって $a = -1, 3$

(答) オ. カ. $-1, 3$

(4) 2組の対角線の長さを x, y とすると

$$\begin{aligned} x^2 &= 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 120^\circ = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 97, \\ y^2 &= 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49 \end{aligned}$$

$x > 0, y > 0$ であるから $x = \sqrt{97}, y = 7$

(答) キ. ク. $\sqrt{97}, 7$

(5) $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ より $y' = -3x^2 + 4x - 1 = -(3x - 1)(x - 1)$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$

したがって $x = 1$ で極大値 2

(答) ケ. 1 コ. 2

[2] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + ax - 2a - 1$ より

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 1 + a(x^2 + x - 2) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + a(x - 1)(x + 2) \\
 &= (x - 1)\{x^2 + x + 1 + a(x + 2)\} \\
 &= (x - 1)\{x^2 + (a + 1)x + 2a + 1\}
 \end{aligned}$$

$g(x) = x^2 + (a + 1)x + 2a + 1$ とおくと, $x = 1$ が $f(x) = 0$ の 2 重解であるとき, $g(1) = 0$ であるから

$$3a + 3 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1$$

(答) サ. $(a + 1)x + 2a + 1$ シ. -1

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は $ax + by = 4$
この接線が点 $(2\sqrt{3}, 2)$ を通るとき

$$2\sqrt{3}a + 2b = 4 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2 - \sqrt{3}a \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 (a, b) は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点であるから $a^2 + b^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$

① を ② に代入すると $a^2 + (2 - \sqrt{3}a)^2 = 4$

$$a^2 + 4 - 4\sqrt{3}a + 3a^2 = 4 \quad \text{整理すると} \quad a(a - \sqrt{3}) = 0$$

ゆえに $a = 0, \sqrt{3}$ これらを ① に代入すると

$$(a, b) = (0, 2), (\sqrt{3}, -1)$$

(答) ス. $ax + by = 4$ セ. $(\sqrt{3}, -1)$

$$(3) \cos 2\theta + (\sqrt{3} - 2)\sin\theta + \sqrt{3} - 1 = 0 \text{ より } (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$1 - 2\sin^2\theta + (\sqrt{3} - 2)\sin\theta + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 2\sin^2\theta + (2 - \sqrt{3})\sin\theta - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{したがって} \quad (\sin\theta + 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ であるから, } \sin\theta \geq 0 \text{ より}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. タ. } \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

$$(4) \text{ (i) } y + 2 = 4^{x+1}, \text{ (iv) } y - \log_4 7 + 1 = \log_4 x \text{ であるから}$$

$$\text{(i) は } y = 4^x \text{ を } x \text{ 軸方向に } -1, y \text{ 軸方向に } -2 \text{ だけ平行移動したもの}$$

$$\text{(iv) は } y = \log_4 x \text{ を } y \text{ 軸方向に } \log_4 7 - 1 \text{ だけ平行移動したもの}$$

$$(\text{答}) \text{ チ. ツ. (i) (iv)}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 - x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \\ \int_0^2 |x^2 - x| dx &= -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{ テ. } \frac{2}{3} \quad \text{ト. } 1$$

[3] (i) $4^x - 5 \times 2^{x+1} + 16 \leq 0$

$$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x - 2)(2^x - 8) \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad 2 \leq 2^x \leq 8 \quad \text{よって} \quad 1 \leq x \leq 3$$

(ii) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 + 1 - k^2 \leq 0 \quad (k > 0)$

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x + 1 \leq k^2 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_2 x - 1)^2 \leq k^2$$

$$\text{したがって} \quad -k \leq \log_2 x - 1 \leq k$$

$$1 - k \leq \log_2 x \leq 1 + k \quad \text{よって} \quad 2^{1-k} \leq x \leq 2^{1+k}$$

(i) を満たすすべての x が (ii) を満たすとき $2^{1-k} \leq 1, 3 \leq 2^{1+k}$

$$1 - k \leq \log_2 1, \log_2 3 \leq 1 + k \quad \text{ゆえに} \quad k \geq 1$$

(ii) を満たすすべての x が (i) を満たすとき $1 \leq 2^{1-k}, 2^{1+k} \leq 3$

$$\log_2 1 \leq 1 - k, 1 + k \leq \log_2 3 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq k \leq \log_2 3 - 1$$

(答) ナ. 1 ニ. 3 ヌ. 1 ネ. $\log_2 3 - 1$

[4] $C: y = \frac{5}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}$ を微分すると $y' = \frac{5}{2}x + 2$

$$y' = -\frac{1}{2} \text{ とすると } \frac{5}{2}x + 2 = -\frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -1$$

ℓ は C 上の点 $A(-1, -1)$ を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y + 1 = 2(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x + 1$$

$$C \text{ と } \ell \text{ の交点の } x \text{ 座標は } \frac{5}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 2x + 1$$

$$\text{整理すると } x^2 - 1 = 0 \quad \text{これを解いて } x = \pm 1$$

$$\text{したがって、点 } A \text{ と異なる点の } x \text{ 座標は } x = 1$$

求める面積を S とすると、 C の x^2 の係数およびこれらの交点の x 座標から

$$S = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{4} \{1 - (-1)\}^3 = \frac{5}{3}$$

(答) ノ. -1 ハ. $2x + 1$ ヒ. 1 フ. $\frac{5}{3}$

1.4 令和6年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $a > 0$ とする. $(x+a)(x+b)^2$ を展開すると, x^2 の係数は0, x の係数は -3 である. このとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) 次の命題の真偽を述べよ. ただし, x は実数とする.
- (i) 命題「 $|x-1| < 2$ ならば, $1 < x < 2$ である。」は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
- (ii) 命題「 $x^2 < x$ ならば, $0 < x < 3$ である。」は $\boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ のグラフを x 軸方向に2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線が $y = x^2$ である. このとき, $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 4$ とする. A から辺 BC に垂線 AD を引くとき, $AD = \boxed{\text{キ}}$, $BD = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) $0 < a < b$ とする. 4つの値からなるデータ $-1, 0, a, b$ の中央値が1, 範囲が5であれば, $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) 2次方程式 $x^2 + ax + 1 - a = 0$ が重解をもつとき, $a = \boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) $x + y = 2$, $xy = -2$ のとき, $x^2 + y^2 = \boxed{\text{ス}}$, $x^3 + y^3 = \boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) 2次関数 $y = x^2 - 2x + k$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最小値は -2 である. このとき, 定数 k の値は $k = \boxed{\text{ソ}}$ であり, 最大値は $\boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ について, $AB = 2$, $BC = 4$, $CA = 2\sqrt{2}$ とする. このとき, $\cos \angle A = \boxed{\text{チ}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) 5つの値からなるデータ $13, 21, 26, 35, 40$ の平均値は $\boxed{\text{テ}}$ である. 偏差の2乗の最大値は $a = \boxed{\text{ト}}$ である.

[3] ある地点の7時から19時までの時刻 t における温度 $y(t)$ (度)は

$$y(t) = -\frac{4}{13}t^2 + \frac{108}{13}t - \frac{323}{13} \quad (7 \leq t \leq 19)$$

で表される．このとき，時刻 $t = \boxed{\text{ナ}}$ のときに最高気温 $\boxed{\text{ニ}}$ 度をとる．また，午後気温が25度になるのは時刻 $t = \boxed{\text{ヌ}}$ のときである．さらに，気温が30度以上となる時刻は $\boxed{\text{ネ}}$ 時間続く．

[4] 四角形 ABCD において

$$AB = 3, \quad AD = \sqrt{7}, \quad CD = \sqrt{2}, \quad \cos \angle A = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \angle B = 105^\circ$$

とする．このとき， $BD = \boxed{\text{ノ}}$ ， $\angle ABD = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ であり， $BC = \boxed{\text{ヒ}}$ である．また，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である．

解答例

$$[1] (1) (x+a)(x+b)^2 = (x+a)(x^2+2bx+b^2) \\ = x^3 + (a+2b)x^2 + b(2a+b)x + ab^3$$

x^2 の係数が 0, x の係数が -3 であるから

$$a+2b=0, \quad b(2a+b)=-3$$

上の第1式から, $a=-2b > 0$ ($b < 0$). これを第2式に代入すると

$$b(-4b+b)=-3 \quad \text{整理すると} \quad b^2=1$$

$b < 0$ に注意して $b=-1$ ゆえに $a=2$

(答) ア. 2 イ. -1

$$(2) (i) |x-1| < 2 \text{ より } -2 < x-1 < 2 \text{ ゆえに } -1 < x < 3 \\ \text{「} -1 < x < 3 \text{ ならば, } 1 < x < 2 \text{ である.」は偽である.}$$

$$(ii) x^2 < x \text{ より } x(x-1) < 0 \text{ ゆえに } 0 < x < 1 \\ \text{「} 0 < x < 1 \text{ ならば, } 0 < x < 3 \text{ である.」は真である.}$$

(答) ウ. 偽 エ. 真

(3) $y=x^2$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線は

$$y=(x+2)^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad y=x^2+4x+5$$

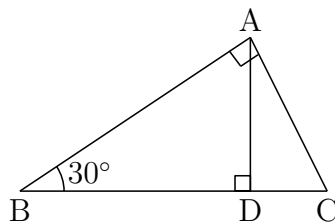
これが $y=x^2+ax+b$ であるから, 係数を比較して $a=4, b=5$

(答) オ. 4 カ. 5

$$(4) \text{ 右の図から } AB=BC \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$AD=AB \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$BD=AB \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$



(答) キ. $\sqrt{3}$ ク. 3

(5) 4つのデータ $-1, 0, a, b$ の中央値が 1 , 範囲が 5 であるから ($0 < a < b$)

$$\frac{0+a}{2}=1, \quad b-(-1)=5 \quad \text{ゆえに} \quad a=2, b=4$$

(答) ケ. 2 コ. 4

[2] (1) 2次方程式 $x^2 + ax + 1 - a = 0$ が重解をもつから、係数について

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad a = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(\text{答}) \text{ サ. シ. } -2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}$$

(2) $x + y = 2$, $xy = -2$ より

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \cdot (-2) = 8$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 2^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 = 20$$

$$(\text{答}) \text{ ス. } 8 \quad \text{セ. } 20$$

(3) $y = x^2 - 2x + k$ より $y = (x - 1)^2 - 1 + k$

$$-1 + k = -2 \quad \text{これを解いて} \quad k = -1$$

$y = (x - 1)^2 - 2$ ($-1 \leq x \leq 2$) は, $x = -1$ で, 最大値は

$$(-1 - 1)^2 - 2 = 2$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. } -1 \quad \text{タ. } 2$$

(4) 余弦定理により

$$\cos \angle A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{8 + 4 - 16}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{7}$$

$$(\text{答}) \text{ チ. } -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ツ. } \sqrt{7}$$

(5) 平均値は $\frac{13 + 21 + 26 + 35 + 40}{5} = 27$

$(13 - 27)^2 = 196$, $(40 - 27) = 169$ より, 求める最大値は 196

$$(\text{答}) \text{ テ. } 27 \quad \text{ト. } 196$$

$$[3] \quad y(t) = -\frac{4}{13}t^2 + \frac{108}{13}t - \frac{323}{13} \quad (7 \leq t \leq 19)$$

$$y(t) = -\frac{4}{13} \left(t - \frac{27}{2}\right)^2 + \frac{406}{13}$$

$t = \frac{27}{2}$ のとき最高気温 $\frac{406}{13}$ 度をとる.

$$y(t) = 25 \text{ とすると } -\frac{4}{13} \left(t - \frac{27}{2}\right)^2 + \frac{406}{13} = 25$$

$$\left(t - \frac{27}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{27 \pm 9}{2}$$

気温が25度になるのは、 $7 \leq t \leq 19$ および午後に注意して $t = 18$

$$y(t) \geq 30 \text{ とすると } -\frac{4}{13} \left(t - \frac{27}{2}\right)^2 + \frac{406}{13} \geq 30$$

$$\begin{aligned} \left(t - \frac{27}{2}\right)^2 - 4 &\leq 0 \\ \left(t - \frac{27}{2} + 2\right) \left(t - \frac{27}{2} - 2\right) &\leq 0 \\ \left(t - \frac{23}{2}\right) \left(t - \frac{31}{2}\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad \frac{23}{2} \leq t \leq \frac{31}{2}$$

よって、30度以上となる時刻は $\frac{31}{2} - \frac{23}{2}$, すなわち、4時間続く.

$$(\text{答}) \text{ ナ. } \frac{27}{2} \quad \text{ニ. } \frac{406}{13} \quad \text{ヌ. } 18 \quad \text{ネ. } 4$$

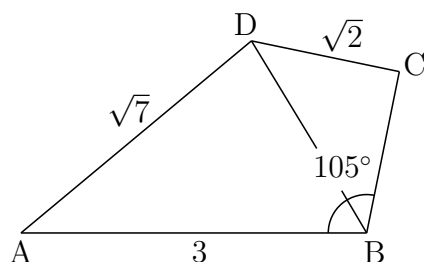
[4] $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 9 + 7 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = 4$$

$BD > 0$ であるから **$BD = 2$**

$$\cos \angle ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{9 + 4 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

したがって **$\angle ABD = 60^\circ$** , $\angle DBC = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$



$BC = x$ において, $\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cos 45^\circ \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$$

ゆえに $(x - \sqrt{2})^2 = 0$ よって $x = \mathbf{BC = \sqrt{2}}$

$\angle ABD = 60^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$ より, 四角形 ABCD の面積は

$$\triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$$

(答) ノ. 2 ハ. 60 ヒ. $\sqrt{2}$ フ. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$

1.5 令和6年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) 整数を要素とする2つの集合を $A = \{2, 5, a\}$, $B = \{1, 3, a+b\}$ とする.
 $A \cap B = \{2, 3\}$ が成り立つとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.

- (2) 連立不等式 $\begin{cases} 4x - 1 < 2x + 11 \\ 2x + 1 > x + a \end{cases}$ の解に含まれる整数が1つだけであるとき, 定数 a の範囲は $\boxed{\text{ウ}} \leq x < \boxed{\text{エ}}$ である.

- (3) 2次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの頂点が, 2次関数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ のグラフの頂点でもあるとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である.

- (4) 次の式の値を求めよ.

$$\sin 160^\circ \times \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ = \boxed{\text{キ}}, \quad \sin 140^\circ + \cos 130^\circ = \boxed{\text{ク}}$$

- (5) 4個のデータ $a+b, 3a+b, 4a+b, 8a+b$ の平均値が11, 中央値が10のとき, $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である.

- [2] (1) 方程式 $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ の解は $x = \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}$ である.

- (2) 2次関数 $y = x^2 - 4x + a$ ($1 \leq x \leq 5$) の最大値と最小値の和が9であるとき, 定数 a の値は $a = \boxed{\text{ス}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である.

- (3) 区間 $1 \leq x \leq 4$ において $x^2 - 2ax + 3a + 4 \geq 0$ であるとき, 定数 a の範囲は $\boxed{\text{ソ}} \leq a \leq \boxed{\text{タ}}$ である.

- (4) $\triangle ABC$ において, A から BC へ下ろした垂線を AH とする. $\frac{BH}{CH} = \frac{1}{2}$ が成り立つとき, $\frac{\tan \angle B}{\tan \angle C} = \boxed{\text{チ}}$ が成り立つ. $\tan \angle C = 1$ のとき, $\sin \angle B = \boxed{\text{ツ}}$ である.

- (5) 2個のデータ $2, a$ ($2 < a$) の平均値を $\bar{x}$, 標準偏差を s とする. $\bar{x} = 5s$ のとき, $a = \boxed{\text{テ}}$, $\bar{x} = \boxed{\text{ト}}$ である.

- [3] $2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ナ}}) \times (\boxed{\text{ニ}})$ である. x, y が, $2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1 = 0$ を満たすとき, xy の最大値は $\boxed{\text{ヌ}}$ であり, $x^2 + y^2$ の最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ である.

- [4] $AB = 1, BC = 2, CD = 2, DA = 3$ の四角形 $ABCD$ は円 O に内接している. 円に内接する四角形性質より, $\frac{\cos \angle B}{\cos \angle D} = \boxed{\text{ノ}}$ が成り立つ. したがって, 余弦定理より, $AC = \boxed{\text{ハ}}$ を得る. $\angle B = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ であり, 円 O の半径は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $A = \{2, 5, a\}$, $B = \{1, 3, a + b\}$

$$A \cap B = \{2, 3\} \text{ より, } 3 \in A, 2 \in B$$

$$\mathbf{a = 3, } a + b = 2 \text{ であるから } \mathbf{b = -1}$$

$$\text{(答) ア. 3 イ. } 2 - 1$$

(2) $4x - 1 < 2x + 11$ を解いて $x < 6 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$2x + 1 > x + a \text{ を解いて } x > a - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を同時に満たす整数が1個であるから,

$\textcircled{1}$ より, その整数は5である. このとき, $\textcircled{2}$ から

$$4 \leq a - 1 < 5 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{5 \leq a < 6}$$

$$\text{(答) ウ. 5 エ. 6}$$

(3) $y = -2x^2 + 4x + 1$ より, $y = -2(x - 1)^2 + 3$

したがって, 頂点の座標が $(1, 3)$ であるから, x^2 の係数に注意して

$$y = (x - 1)^2 + 3 \quad \text{ゆえに} \quad y = x^2 - 2x + 4$$

$$y = x^2 + ax + b \text{ の係数を比較して } \mathbf{a = -2, b = 4}$$

$$\text{(答) オ. } -2 \quad \text{カ. 4}$$

(4) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$, $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ より

$$\begin{aligned} \sin 160^\circ \times \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ &= \sin 20^\circ \times \sin 20^\circ + \cos^2 20^\circ \\ &= \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\sin 40^\circ = \sin 40^\circ = \cos 50^\circ, \quad \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ \text{ より}$$

$$\sin 140^\circ + \cos 130^\circ = \cos 50^\circ + (-\cos 50^\circ) = \mathbf{0}$$

$$\text{(答) キ. 1 \quad ク. 0}$$

- (5) $a + b, 3a + b, 4a + b, 8a + b$ の平均値が 11 であるから

$$\frac{(a + b) + (3a + b) + (4a + b) + (8a + b)}{4} = 11 \quad \text{ゆえに} \quad b = 11 - 4a$$

したがって、4 個のデータは

$$11 - 3a, 11 - a, 11, 11 + 4a$$

$$a > 0 \text{ のとき} \quad 11 - 3a < 11 - a < 11 < 11 + 4a$$

$$a < 0 \text{ のとき} \quad 11 + 4a < 11 < 11 - a < 11 - 3a$$

中央値が 10 であるから、 $a > 0$ より

$$\frac{(11 - a) + 11}{2} = 10 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2, \quad b = 3$$

(答) ケ. 2 コ. 3

- [2] (1) 方程式 $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ について、 $x^2 = |x|^2$ より

$$|x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (|x| + 3)(|x| - 1) = 0$$

$$|x| \geq 0 \text{ に注意して} \quad |x| = 1 \quad \text{よって} \quad x = \pm 1$$

(答) サ. シ. 1, -1

- (2) $y = (x - 2)^2 + a - 4$ ($1 \leq x \leq 5$) であるから

$$x = 5 \text{ のとき最大値 } a + 5, \quad x = 2 \text{ のとき最小値 } a - 4$$

最大値と最小値の和が 9 であるから

$$(a + 5) + (a - 4) = 9 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4, \quad \text{最小値は } 0$$

(答) ス. 4 セ. 0

- (3) $f(x) = x^2 - 2ax + 3a + 4$ とおくと $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 3a + 4$

(i) $a \leq 1$ のとき、 $f(1) \geq 0$ より

$$a + 5 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -5 \leq a \leq 1$$

(ii) $1 \leq a \leq 4$ のとき $-a^2 + 3a + 4 \geq 0$

$$(a + 1)(a - 4) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq a \leq 4$$

(iii) $4 \leq a$ のとき、 $f(4) \geq 0$ より

$$-5a + 20 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

(i)~(iii) より $-5 \leq a \leq 4$

(答) ソ. -5 タ. 4

$$(4) \frac{BH}{CH} = \frac{1}{2} \text{ より } \frac{AH}{BH} = 2 \cdot \frac{AH}{CH}$$

図1において, $\frac{BH}{CH} = \tan \angle B$, $\frac{AH}{CH} = \tan \angle C$ より

$$\tan \angle B = 2 \tan \angle C \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C} = 2$$

図2において, $\frac{BH}{CH} = \tan \angle(180^\circ - B) = -\tan \angle B$, $\frac{AH}{CH} = \tan \angle C$ より

$$-\tan \angle B = 2 \tan \angle C \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C} = -2$$

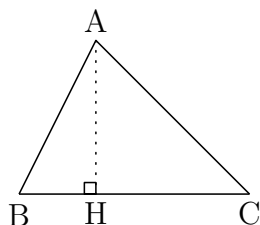


図1

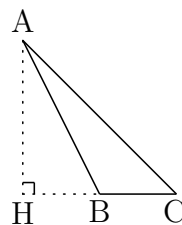


図2

図1, 図2について, ともに $BH : AH = 1 : 2$ より, $AH : AB = \sqrt{5} : 2$

$$\text{よって } \sin \angle B = \frac{AH}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(\text{答}) \text{ チ. } \pm 2 \quad \text{ツ. } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(5) 2個のデータ 2, a ($2 < a$) の平均値が $\frac{2+a}{2}$ であるから, 分散は

$$s^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 - \frac{2+a}{2} \right)^2 + \left(a - \frac{a+2}{2} \right)^2 \right\} = \left(\frac{a-2}{2} \right)^2$$

$$2 < a \text{ に注意して } s = \frac{a-2}{2}$$

$\bar{x} = 5s$ に $x = \frac{2+a}{2}$ および上式を代入すると

$$\frac{2+a}{2} = 5 \times \frac{a-2}{2} \quad \text{これを解いて } a = 3 \quad \text{ゆえに } \bar{x} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ テ. } 3 \quad \text{ト. } \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} [3] \quad 2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1 &= (x+y)(2x+y) + (x+y) - (2x+y) - 1 \\ &= \{(x+y) - 1\}\{(2x+y) + 1\} \\ &= (\mathbf{x + y - 1})(\mathbf{2x + y + 1}) \end{aligned}$$

$2x^2 + 3xy + y^2 - x - 1 = 0$ のとき, 上式から

$$y = -x + 1 \quad \text{または} \quad y = -2x - 1$$

(i) $y = -x + 1$ のとき

$$\begin{aligned} xy &= x(-x + 1) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 &= x^2 + (-x + 1)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) $y = -2x - 1$ のとき

$$\begin{aligned} xy &= x(-2x - 1) = -2x^2 - x = -2\left(x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \\ x^2 + y^2 &= x^2 + (-2x - 1)^2 = 5x^2 + 4x + 1 = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(i), (ii) から, xy の最大値は $\frac{1}{4}$, $x^2 + y^2$ の最小値は $\frac{1}{5}$

(答) ナ. ニ. $x + y - 1$, $2x + y + 1$ ス. $\frac{1}{4}$ ネ. $\frac{1}{5}$

[4] $\angle B + \angle D = 180^\circ$ より

$$\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle D) = -\cos \angle D \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos \angle B}{\cos \angle D} = -1$$

$\triangle ABC$, $\triangle CDA$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle B \\ &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \angle B \\ &= 5 - 4 \cos \angle B \\ BC^2 &= CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos \angle D \\ &= 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \angle B \\ &= 13 + 12 \cos \angle B \end{aligned}$$

上の2式から

$$5 - 4 \cos \angle B = 13 + 12 \cos \angle B \quad \text{ゆえに} \quad \cos \angle B = -\frac{1}{2}$$

したがって $\angle B = 120^\circ$, $BC^2 = 7$ すなわち $BC = \sqrt{7}$

$\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \sqrt{7} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad R = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

(答) ノ. -1 ハ. $\sqrt{7}$ ヒ. 120 フ. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

1.6 令和6年度一般試験(90分)

- [1] (1) 整式 $x^3 + 2x + 3$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商は , 余りは である.
- (2) 直線 $y = 2 - x$ 上の点で, 点 $B(4, 3)$ に最も近い点 A の座標は であり, 線分 AB の長さは である.
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $\sin 4\theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ の値は 個ある. その中で一番大きい値は $\theta =$ である.
- (4) $4^x - 2^{x-1} + 1$ は, $x =$ のとき最小値 をとる.
- (5) 関数 $f(x) = x^3 - 3px + p$ が極大値と極小値をもつような定数 p の範囲は, $p >$ である. 更に, 極大値が正, 極小値が負であるような定数 p の範囲は, $p >$ である.
- [2] (1) 方程式 $2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$ の解が, $x = 2$, $x = a \pm bi$ であるとき, 実数 a, b の値は, $a =$, $b =$ となる. ただし, i は虚数単位を表し, b は0でない実数である.
- (2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = a(x + 2)$ が異なる2点で交わる時, 実数 a の範囲は, $< a <$ である.
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $\cos 2\theta - 3\cos \theta - 1 = 0$ を満たす θ は $\theta =$ と $\theta =$ である.
- (4) 方程式 $(\log_3 x)^2 - 8\log_3 x + 3 = 0$ の解は, $x =$, $x =$ である.
- (5) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt + 3$$

を満たすとき, $\int_0^1 f(x) dx =$ であり, $f(x) =$ である.

- [3] 円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = a$ は点 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ を通るとする. このとき, 定数 a の値は $a =$ である. 原点を通りこの円に接する2本の直線の方程式は $y =$ と $y =$ となる. この2本の接線のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) について, $\tan \theta =$ である.

- [4] 放物線 $C: y = -\frac{x^2}{4} + 4$ のグラフ上の点 $(2, 3)$ における接線を l_1 とする. l_1 の方程式は, $y = \boxed{\text{ノ}}$ である. l_1 に垂直である C の接線を l_2 とする. l_2 の方程式は, $y = \boxed{\text{ハ}}$ である. 接線 l_1 と l_2 の交点の x 座標は, $x = \boxed{\text{ヒ}}$ である. 接線 l_1 と l_2 と放物線 C で囲まれた部分の面積は, $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

- [1] (1) 次の計算により, 商は $x + 2$, 余りは $6x + 3$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x^2 - 2x \overline{) x^3 + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 2x^2 + 2x \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ 6x + 3 \end{array}$$

(答) ア. $x + 2$ イ. $6x + 3$

- (2) 点 $B(4, 3)$ を通り, 直線 $y = 2 - x$ に垂直な直線は

$$y - 3 = 1(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 1$$

2 直線 $y = 2 - x$, $y = x - 1$ の交点が点 A である.

これらを連立して解くと $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

また, 線分 AB の長さは

$$AB = \sqrt{\left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

別解 線分 AB の長さは, 点 $B(4, 3)$ から直線 $y = 2 - x$ ($x + y - 2 = 0$) までの距離であるから

$$AB = \frac{|4 + 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

(答) ウ. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ エ. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$, $\sin 4\theta = \frac{1}{2} \cdots (*)$ について, $x = 4\theta$ とおくと

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq 8\pi)$$

これを満たす x は

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

したがって, $(*)$ を満たす θ は

$$\theta = \frac{\pi}{24} + \frac{n}{2}\pi, \quad \frac{5}{24}\pi + \frac{n}{2}\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

$(*)$ を満たす θ の値は 8 個ある. その中で一番大きい値は

$$\theta = \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{41}{24}\pi$$

(答) オ. 8 カ. $\frac{41}{24}\pi$

(4) $2^x = t$ とおくと, $4^x = (2^x)^2 = t^2$, $2^{x-1} = 2^{-1} \cdot 2^x = \frac{1}{2}t$

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x-1} + 1 &= t^2 - \frac{1}{2}t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{4}$, すなわち, $x = -2$ のとき, 最小値 $\frac{15}{16}$

(答) キ. -2 ク. $\frac{15}{16}$

- (5) $f(x) = x^3 - 3px + p$ より $f'(x) = 3x^2 - 3p = 3(x^2 - p)$
 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ範囲であるから

$$-p < 0 \quad \text{ゆえに} \quad p > 0$$

このとき, $f'(x) = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{p}$

$$f(-\sqrt{p}) = (-\sqrt{p})^3 - 3p(-\sqrt{p}) + p = p(2\sqrt{p} + 1) > 0$$

$$f(\sqrt{p}) = (\sqrt{p})^3 - 3p\sqrt{p} + p = p(-2\sqrt{p} + 1)$$

極大値 $f(-\sqrt{p})$ について $f(-\sqrt{p}) > 0$ である.

極小値 $f(\sqrt{p})$ について, $f(\sqrt{p}) < 0$ を満たせばよいから

$$-2\sqrt{p} + 1 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad p > \frac{1}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } 0 \quad \text{コ. } \frac{1}{4}$$

- [2] (1) $2x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$ は $x = 2$ を解にもつことに注意して

$$(x - 2)(2x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$2 \text{ 次方程式 } 2x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ を解くと } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$$

$$\text{この 2 次方程式の解が } x = a \pm bi \text{ であるから } a = \frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ サ. } \frac{1}{2} \quad \text{シ. } \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(2) $x^2 + y^2 = 1$ と $y = a(x + 2)$ から y を消去すると

$$x^2 + a^2(x + 2)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 + 1)x^2 + 4a^2x + 4a^2 - 1 = 0$$

このとき, 上の第2式の係数について

$$D/4 = (2a^2)^2 - (a^2 + 1)(4a^2 - 1) = 1 - 3a^2 > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

別解 円 $x^2 + y^2 = 1$ の半径 r は $r = 1$.

円の中心 $(0, 0)$ と直線 $ax - y + 2a = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\text{このとき, } d < r \text{ であるから} \quad \frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1$$

$$\frac{4a^2}{a^2 + 1} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3a^2 - 1 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{答}) \text{ ス. } -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{セ. } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) $\cos 2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$ より

$$(2\cos^2\theta - 1) - 3\cos\theta - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2) = 0$$

$$\cos\theta \neq 2 \text{ に注意して} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. } \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

(4) 与えられた方程式について, $\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x$ であるから

$$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 3, 27$$

$$(\text{答}) \text{ チ. ツ. } 3, 27$$

$$(5) \int_0^1 f(t) dt = a \text{ とおくと } f(x) = x^2 - 2ax + 3$$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 - 2at + 3) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - at^2 + 3t \right]_0^1 = \frac{10}{3} - a \end{aligned}$$

$$\text{したがって } a = \frac{5}{3}, \quad f(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + 3$$

$$(\text{答}) \quad \text{テ. } \frac{5}{3} \quad \text{ト. } x^2 - \frac{10}{3}x + 3$$

[3] 点 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ は、円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = a \cdots \textcircled{1}$ 上の点であるから

$$\left(\frac{4}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 = a \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{5}$$

円 $\textcircled{1}$ は、中心 $(1, 1)$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ の円である.

原点を通る直線 $mx - y = 0$ がこの円に接するとき

$$\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad 5(m-1)^2 = m^2 + 1$$

第2式を整理すると $(2m-1)(m-2) = 0$ ゆえに $m = \frac{1}{2}, 2$

求める接線の方程式は $y = \frac{1}{2}x, y = 2x$

$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 2$ とすると $(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2})$

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

(答) ナ. $\frac{1}{5}$ ニ. $\frac{1}{2}x$ ヌ. $2x$ ネ. $\frac{3}{4}$

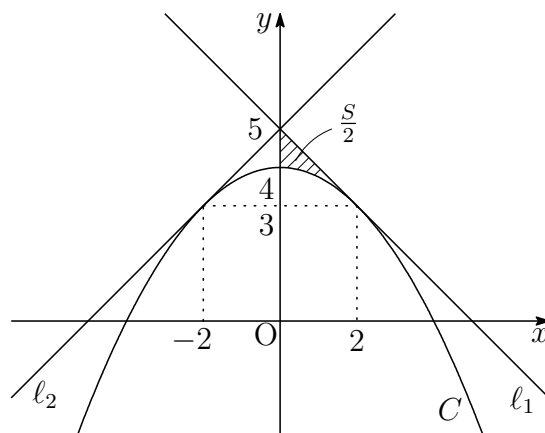
[4] $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4$ とおくと

$$f'(x) = -\frac{x}{2}$$

$f'(2) = -1$ より, ℓ_1 は点 $(2, 3)$ を通り, 傾き -1 の直線であるから

$$y - 3 = -(x - 2)$$

すなわち $\ell_1 : y = -x + 5$



ℓ_1 に対して垂直な直線 ℓ_2 の傾きは 1 であるから, $f'(x) = 1$ とすると

$$-\frac{x}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = -2$$

ℓ_2 は, C 上の点 $(-2, f(-2))$ における接線であるから, $f(-2) = 3$ より

$$y - 3 = 1(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad \ell_2 : y = x + 5$$

ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は, 2 式から y を消去すると

$$-x + 5 = x + 5 \quad \text{よって} \quad x = 0$$

求める図形の面積を S とすると, y 軸に関する対称性により

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^2 \left\{ -x + 5 - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 4 \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{12} \left[(x - 2)^3 \right]_0^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{4}{3}$$

(答) ノ. 4 ハ. ヒ. $-1, 2$ フ. $\frac{27}{4}$

1.7 令和5年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(x^2+1)(y^2+4)-(xy+2)^2=(ax+by)^2$ のとき、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし、 $a > 0$ とする。
- (2) $2 < x < 5$, $-1 < y < 3$ のとりうる値の範囲は、 $\boxed{\text{ウ}} < x - 2y < \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの頂点の座標が $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ のとき、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $AB = 3$, $AC = 4$ の $\triangle ABC$ において、 A から BC へ下ろした垂線 AH の長さが 2 であれば、 $\sin \angle B = \boxed{\text{キ}}$ であり、 $\triangle ABC$ の外接円の直径は $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $a \leq b$ とする。4つの値からなるデータ $2, 4, a, b$ の平均値が 5 、中央値が $\frac{9}{2}$ であれば、 $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 整数 a, b が、 $\frac{\sqrt{2}+a}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}+b}{\sqrt{2}+1} = 6$ を満たすとき、 $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき、定数 a の値は $a = \boxed{\text{ス}}$ であり、もう一つの解は $x = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2次関数 $y = -x^2 + 3x + k$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値は 1 である。このとき、定数 k の値は $k = \boxed{\text{ソ}}$ であり、最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $x = \sin \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) が、2次方程式 $2x^2 + 3x - 2 = 0$ の解であるとき、 $\theta = \boxed{\text{チ}}^\circ$, $\boxed{\text{ツ}}^\circ$ である。
- (5) 3つの値からなるデータ $-1, 1, a$ の平均値は $\boxed{\text{テ}}$ である。 a が実数全体を動くとき、データの分散が最小となる a の値は $a = \boxed{\text{ト}}$ である。

- [3] $0 \leq x \leq 1$ とする. 4点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$ からなる正方形 $OABC$ の辺 OA , AB 上にそれぞれ $P(x, 0)$, $Q(1, x)$ をとる. $\triangle CPQ$ の面積 S と $\triangle PAQ$ の面積 T の間には, $S = \boxed{\text{ナ}} - T$ が成り立つ. T を x を用いて表すと $T = \boxed{\text{ニ}}$ であるから, S は $x = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき最小となり, そのときの S の値は $\boxed{\text{ネ}}$ である.
- [4] $\triangle ABC$ において, $AB = 6$, $BC = 8$, $CA = 4$ とする. $\cos \angle B = \boxed{\text{ノ}}$ である. 辺 BC の中点を M とすると, $AM = \boxed{\text{ハ}}$ であり, $\sin \angle BAM = \boxed{\text{ヒ}}$ である. 辺 AM 上に点 P を, $AP = 2PM$ となるようにとると, $\triangle ABP$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

$$[1] (1) (x^2 + 1)(y^2 + 4) - (xy + 2)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2 \\ = (2x - y)^2$$

これが $(ax + by)^2$ に等しいから ($a > 0$) $a = 2, b = -1$

(答) ア. 2 イ. -1

$$(2) -1 < y < 3 \text{ より } -6 < -2y < 2$$

$$\text{これと } 2 < x < 5 \text{ より } 2 + (-6) < x + (-2y) < 5 + 2$$

$$\text{したがって } -4 < x - 2y < 7$$

(答) ウ. -4 エ. 7

$$(3) x^2 \text{ の係数が } 1 \text{ で、頂点の座標が } \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ の放物線の方程式は}$$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \text{ すなわち } y = x^2 + x + \frac{5}{4}$$

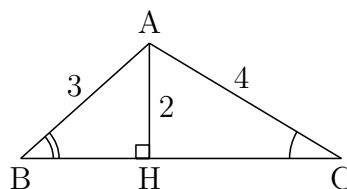
(答) オ. 1 カ. $\frac{5}{4}$

$$(4) \text{ 右の図から } \sin \angle B = \frac{2}{3}$$

$\angle C = 30^\circ$ であるから、 $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$2R = \frac{3}{\sin 30^\circ} = 3 \div \frac{1}{2} = 6$$

(答) キ. $\frac{2}{3}$ ク. 6



$$(5) a \leq b \text{ のとき、4つのデータ } 2, 4, a, b \text{ の中央値が } \frac{9}{2} \text{ であるから}$$

$$\frac{4 + a}{2} = \frac{9}{2} \text{ これを解いて } a = 5$$

このとき、4つのデータ 2, 4, 5, b の平均値が 5 であるから

$$\frac{2 + 4 + 5 + b}{4} = 5 \text{ これを解いて } b = 9$$

(答) ケ. 5 コ. 9

[2] (1) 左辺の分母をそれぞれ有利化すると

$$\frac{(\sqrt{2}+a)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{(\sqrt{2}+b)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 6$$

$$\text{したがって} \quad a+2+(a+1)\sqrt{2}+(-b+2)+(b-1)\sqrt{2}=6$$

$$\text{整理すると} \quad (a-b+4)+(a+b)\sqrt{2}=6$$

$a-b+4$, $a+b$ は有理数であるから

$$a-b+4=6, \quad a+b=0 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a=1, b=-1}$$

(答) サ. 1 シ. -1

(2) 2次方程式 $x^2+3x+a=0$ の解が $x=-1$ であるから

$$(-1)^2+3\cdot(-1)+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{a=2}$$

したがって, 2次方程式 $x^2+3x+2=0$ より

$$(x+1)(x+2)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=-1, -2$$

よって, 求める他の解は $\mathbf{x=-2}$

(答) ス. 2 セ. -2

(3) $y=-x^2+3x+k$ より $y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k+\frac{9}{4}$

$$k+\frac{9}{4}=1 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{k=-\frac{5}{4}}$$

$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1$ ($-2 \leq x \leq 2$) は, $x=-2$ で, 最小値

$$-\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2+1=-\frac{45}{4}$$

をとる.

(答) ソ. $-\frac{5}{4}$ タ. $-\frac{45}{4}$

(4) 2次方程式 $2x^2+3x-2=0$ より

$$(x+2)(2x-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=-2, \frac{1}{2}$$

$x=\sin \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) がこの方程式の解であるから

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{\theta = 30^\circ, 150^\circ}$$

(答) チ. ツ. 30, 150

(5) 3つのデータ $-1, 1, a$ の平均値は

$$E(X) = \frac{-1 + 1 + a}{3} = \frac{a}{3}$$

また、これらのデータの分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1}{3}\{(-1)^2 + 1^2 + a^2\} - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}a^2 \end{aligned}$$

よって、 $V(X)$ は、 $a = 0$ のとき、最小値 $\frac{2}{3}$ をとる.

(答) テ. $\frac{a}{3}$ ト. 0

[3] $\triangle OPC = \frac{1}{2}x$, $\triangle BCQ = \frac{1}{2}(1-x)$ より

$$\triangle OPC + \triangle BCQ = \frac{1}{2}$$

$\triangle OCP + \triangle BCQ + S + T = 1$ であるから

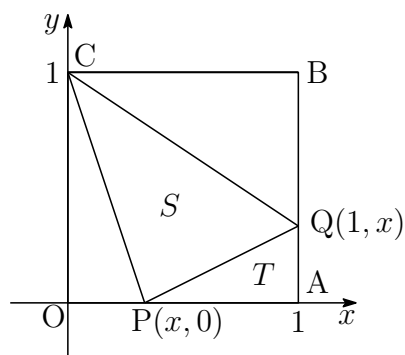
$$S = \frac{1}{2} - T$$

$T = \frac{1}{2}x(1-x)$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x(1-x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

よって、 $x = \frac{1}{2}$ のとき、 S は最小値 $\frac{3}{8}$ をとる.

(答) ナ. $\frac{1}{2}$ ニ. $\frac{1}{2}x(1-x)$ ヌ. $\frac{1}{2}$ ネ. $\frac{3}{8}$



[4] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{6^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{7}{8}$$

$\triangle ABM$ に余弦定理を適用すると

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{7}{8} = 10$$

$AM > 0$ であるから $AM = \sqrt{10}$

$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ より

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$\triangle ABM$ に正弦定理を適用すると $\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{AM}{\sin B}$

$$\frac{4}{\sin \angle BAM} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{15}}{8}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \angle BAM = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$AP = 2PM$ より $AP = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} \triangle ABP &= \frac{1}{2}AB \cdot AP \sin \angle BAM \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

(答) ノ. $\frac{7}{8}$ ハ. $\sqrt{10}$ ヒ. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ フ. $\sqrt{15}$

1.8 令和5年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $16x^4 - y^4$ を因数分解すると $(2x - y) \times (\boxed{\text{ア}}) \times (\boxed{\text{イ}})$ である.
- (2) $|2x - 1| \leq x + 1$ の解は $\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 2次関数 $y = -x^2 + 2x - 3$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q 平行移動すると, 2次関数 $y = -x^2 + 4x$ のグラフになった. このとき, 定数 p, q の値は $p = \boxed{\text{オ}}$, $q = \boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ とする. 辺 BC 上に点 D を $\angle ADC = 60^\circ$ となるようにとる. $BD = 1$ ならば, $AC = \boxed{\text{キ}}$, $BC = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 4個のデータ a, a, b, b ($a < b$) の平均値が2, 分散が1のとき, $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) a, b を自然数とする. $x = \frac{1}{a - \sqrt{b}}$, $y = \frac{1}{a + \sqrt{b}}$ に対して $x + y = 4$, $xy = 1$ であれば, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) 2次方程式 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ の2つの解を α, β とする. 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解が $2\alpha + 1$, $2\beta + 1$ であるとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) 2次関数 $y = x^2 - 4x + a - 2$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が1であるとき, 定数 a の値は, $a = \boxed{\text{ソ}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 2$ の $\triangle ABC$ について, $\cos \angle A = \boxed{\text{チ}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) a は自然数とし, 5個のデータ $4, a, 10, 2, 8$ の平均値を $\bar{x}$, 中央値を M とする. $\bar{x} + 1 = M$ であるとき, $a = \boxed{\text{テ}}$, $\bar{x} = \boxed{\text{ト}}$ である.
- [3] $a > 0$ とする. 2つの2次関数 $y = 2x^2 - (a+2)x + b - 1$, $y = x^2 - (a+4)x + b + 6$ のグラフが x 軸に接するとき, 定数 a, b の値は, $a = \boxed{\text{ナ}}$, $b = \boxed{\text{ニ}}$ である. それらの接点を2次関数 $y = -x^2 + cx + d$ のグラフが通るとき, 定数 c, d の値は, $c = \boxed{\text{ヌ}}$, $d = \boxed{\text{ネ}}$ である.
- [4] $AB = 2$, $AC = 4$, $\angle A = 120^\circ$ の $\triangle ABC$ について, $BC = \boxed{\text{ノ}}$ であり, 外接円の直径は $\boxed{\text{ハ}}$ である. $\angle A$ の二等分線と外接円の交点のうち A でない点を D とする. 外接円の中心を O とするとき, $\angle BOD = \angle COD = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ であり, 四角形 $ABDC$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

$$[1] (1) 16x^4 - y^4 = (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) \\ (2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$$

(答) ア. 1. $2x + y$, $4x^2 + y^2$

$$(2) |2x - 1| \leq x + 1 \text{ より } -(x + 1) \leq 2x - 1 \leq x + 1$$

$$\begin{cases} -x - 1 \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq x + 1 \end{cases} \quad \text{よって} \quad 0 \leq x \leq 2$$

(答) ウ. 0 エ. 2

$$(3) y = -x^2 + 2x - 3 \cdots \textcircled{1} \text{ より } y = -(x - 1)^2 - 2 \text{ 頂点 } (1, -2)$$

$$y = -x^2 + 4x \cdots \textcircled{2} \text{ より } y = -(x - 2)^2 + 4 \text{ 頂点 } (2, 4)$$

放物線①を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものが, 放物線②であるから

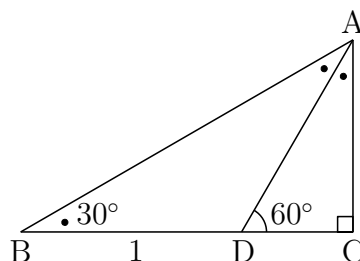
$$1 + p = 2, \quad -2 + q = 4 \quad \text{これを解いて} \quad p = 1, \quad q = 6$$

(答) オ. 1 カ. 6

$$(4) AD = BD, \quad BD = 1 \text{ より } AD = 1$$

$$AC = AD \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = AC \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$



(答) キ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ク. $\frac{3}{2}$

$$(5) 4 \text{ 個のデータ } a, a, b, b \text{ の平均値が } 2 \text{ であるから}$$

$$\frac{a + a + b + b}{4} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 分散が1であるから

$$\frac{a^2 + a^2 + b^2 + b^2}{4} - 2^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$a < b \text{ に注意して, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } a = 1, \quad b = 3$$

(答) ケ. 1 コ. 3

[2] (1) $x = \frac{1}{a - \sqrt{b}}, y = \frac{1}{a + \sqrt{b}}$ より

$$x + y = \frac{1}{a - \sqrt{b}} + \frac{1}{a + \sqrt{b}} = \frac{(a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{2a}{a^2 - b}$$

$$xy = \frac{1}{a - \sqrt{b}} \times \frac{1}{a + \sqrt{b}} = \frac{1}{a^2 - b}$$

$$x + y = 4, xy = 1 \text{ より } \frac{2a}{a^2 - b} = 4, \frac{1}{a^2 - b} = 1$$

$$\text{したがって } 2a = 4, a^2 - b = 1 \text{ ゆえに } \mathbf{a = 2, b = 3}$$

(答) サ. 2 シ. 3

- (2) 2次方程式 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = -2 \quad (*)$$

2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ であるから, 解と係数の関係により

$$(2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = -a, \quad (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = b$$

$$\text{整理すると } 2(\alpha + \beta) + 2 = -a, \quad 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = b$$

(*) を上の2式に代入すると

$$2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -a, \quad 4 \cdot (-2) + 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = b$$

$$\text{したがって } \mathbf{a = -5, b = -4}$$

(答) ス. -5 セ. -4

別解 α は $2x^2 - 3x - 4 = 0$ の解であるから

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \text{ ゆえに } \alpha^2 = \frac{3}{2}\alpha + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$2\alpha + 1$ は $x^2 + ax + b = 0$ の解であるから

$$(2\alpha + 1)^2 + a(2\alpha + 1) + b = 0$$

$$\text{ゆえに } 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 2a\alpha + a + b = 0$$

① を上式に代入して整理すると

$$(2a + 10)\alpha + (a + b + 9) = 0$$

$$\beta \text{ についても同様に } (2a + 10)\beta + (a + b + 9) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{ であるから } \mathbf{a = -5, b = -4}$$

- (3) $f(x) = x^2 - 4x + a - 2$ ($0 \leq x \leq 3$) とおくと

$$f(x) = (x-2)^2 + a - 6$$

条件から, $f(0) = 1$ であるから

$$a - 2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3$$

したがって $f(x) = (x-2)^2 - 3$ よって, 最小値は $f(2) = -3$

(答) ソ. 3 タ. -3

- (4) $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$ であるから, 余弦定理により

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$$

したがって $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

(答) チ. $-\frac{1}{4}$ ツ. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

- (5) 5個のデータ 4, a , 10, 2, 8 の平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{a + 24}{5}$$

$M = \bar{x} + 1$ より

$$M = \frac{a + 24}{5} + 1 = 5 + \frac{a + 4}{5}$$

$6 \leq M \leq 8$ であり, a が自然数であるから,

$$M = 6, 6.5, 7, 7.5, 8$$

このとき, $M = 6.5, 7.5$ を満たす a は存在しない.

- (i) $M = 6$ のとき, $a = 1$, $\bar{x} = 5$

5個のデータは 1, 2, 4, 8, 10 となり (中央値 6), 不適.

- (ii) $M = 7$ のとき, $a = 6$, $\bar{x} = 6$

5個のデータは 2, 4, 6, 8, 10 となり (中央値 6), 不適.

- (iii) $M = 8$ のとき, $a = 11$, $\bar{x} = 7$

5個のデータは 2, 4, 8, 10, 11 となり (中央値 8), 適する.

(答) テ. 11 ト. 7

[3] 2つの2次関数

$$y = 2x^2 - (a + 2)x + b - 1, \quad y = x^2 - (a + 4)x + b + 6 \quad (*)$$

のグラフが x 軸に接するから、係数について

$$(a + 2)^2 - 4 \cdot 2(b - 1) = 0, \quad (a + 4)^2 - 4(b + 6) = 0$$

したがって

$$8b = a^2 + 4a + 12, \quad 4b = a^2 + 8a - 8 \quad (**)$$

上の2式から、 b を消去すると

$$2(a^2 + 8a - 8) = a^2 + 4a + 12 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 12a - 28 = 0$$

ゆえに $(a + 14)(a - 2) = 0$ 条件 $a > 0$ より $\mathbf{a = 2}$

これを $(**)$ に代入して

$$4b = 2^2 + 8 \cdot 2 - 8 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{b = 3}$$

$a = 2, b = 3$ を $(*)$ に代入すると

$$y = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2, \quad y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$y = -x^2 + cx + d$ が2点 $(1, 0), (3, 0)$ を通るから

$$y = -(x - 1)(x - 3) = -x^2 + 4x - 3$$

よって $\mathbf{c = 4, d = -3}$

(答) ナ. 2 ニ. 3 ヌ. 4 ネ. -3

[4] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ \\ &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \left(-\frac{1}{2}\right) = 28 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ より } \mathbf{BC = 2\sqrt{7}}$$

$\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{7} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{\frac{7}{3}}$$

円周角と中心角の関係により $\angle BOD = \angle COD = \mathbf{120^\circ}$

BC と AD の交点を P , $AP = x$ とおくと, $\triangle ABP + \triangle ACP = \triangle ABC$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin 120^\circ \\ 2x + 4x &= 2 \cdot 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$BP : PC = AB : AC = 1 : 2$ および $BC = 2\sqrt{7}$ より

$$BP = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \quad PC = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

方べきの定理により $AP \cdot PD = BP \cdot PC$

$$\frac{4}{3}PD = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{7}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad PD = \frac{14}{3}$$

したがって $AD = AP + PD = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6$

四角形 $ABCD$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{AD}{AP} \triangle ABC = 6 \div \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin 120^\circ \\ &= \mathbf{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(答) ノ. $2\sqrt{7}$ ハ. $4\sqrt{\frac{7}{3}}$ ヒ. 120 フ. $9\sqrt{3}$

1.9 令和5年度一般試験(90分)

- [1] (1) 整式 $3x^3 - x^2 + 3x + 3$ を整式 $x^2 - x + 2$ で割ると、商は 、余りは である。
- (2) 2点 $A(1, 2)$, $B(3, 8)$ を通る直線に垂直で、 A , B の中点を通る直線を $y = ax + b$ と表すと、定数 a , b の値は、 $a =$ 、 $b =$ である。
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $2\cos\theta + \sqrt{3} \leq 0$ を満たす θ の範囲は、 $\leq \theta \leq$ である。
- (4) 不等式 $(\log_4 x)^2 - \log_2 x^2 + 3 \leq 0$ の解は、 $\leq x \leq$ である。
- (5) 2次関数 $f(x) = x^2 + 3x - 2$ の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きが2であるとき、定数 a の値は $a =$ であり、接線の方程式は $y =$ である。
- [2] (1) a, b は実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ が $1 + i$ を解にもつとき、定数 a, b の値は、 $a =$ 、 $b =$ である。
- (2) x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq x + 2y \leq 4$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値は 、最小値は である。
- (3) 関数 $y = \sin 2x - \cos 2x + 1$ を、 $y = 2 \sin x (\cos x + a \sin x)$ と表すとき、定数 a の値は、 $a =$ である。 $0 < x < \pi$ のとき、 $y = 0$ を満たす x の値は、 $x =$ である。
- (4) 方程式 $2^{2x+1} - 9 \times 2^x + 4 = 0$ は、 $x =$ 、 である。
- (5) $\int_0^2 (x^2 - x) dx =$ 、 $\int_0^x |x^2 - x| dx =$ である。
- [3] $a > 0, 0 < \theta < \pi$ とする。2次方程式 $4x^2 - 2(a-1)x - a = 0$ の2つの解が、 $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき、 $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ を a を用いて表すと
- $$\sin \theta + \cos \theta = \text{>}, \quad \sin \theta \cos \theta = \text{>}$$
- である。このことから、定数 a の値は、 $a =$ であり、 $\theta =$ である。
- [4] a は定数とする。3次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ の極小値が0のとき、定数 a の値は $a =$ である。このとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、 $x =$, である。さらに、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積は である。

解答例

[1] (1) 次の計算により, 商は $3x + 2$, 余りは $-x - 1$

$$\begin{array}{r} 3x + 2 \\ x^2 - x + 2 \overline{) 3x^3 - x^2 + 3x + 3} \\ \underline{3x^3 - 3x^2 + 6x} \\ 2x^2 - 3x + 3 \\ \underline{2x^2 - 2x + 4} \\ -x - 1 \end{array}$$

(答) ア. $3x + 2$ イ. $-x - 1$

(2) 2点 A(1, 2), B(3, 8) の中点は (2, 5) 直線 AB の傾きは $\frac{8-2}{3-1} = 3$

求める直線は点 (2, 5) を通り, 傾き $-\frac{1}{3}$ の直線であるから

$$y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$$

別解 求める直線は, 線分 AB の垂直二等分線である. この直線上の点を P(x, y) について, AP = BP より, $AP^2 = BP^2$ であるから

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 8)^2$$

$$\text{整理すると } x + 3y - 17 = 0 \quad \text{よって} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$$

(答) ウ. $-\frac{1}{3}$ エ. $\frac{17}{3}$

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解いて $\frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi$

(答) オ. $\frac{5}{6}\pi$ カ. $\frac{7}{6}\pi$

(4) $(\log_4 x)^2 - \log_2 x^2 + 3 \leq 0$ より $\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^2 - 2\log_2 x + 3 \leq 0$

$$t = \log_2 x \text{ とおくと } \left(\frac{t}{2}\right)^2 - 2t + 3 \leq 0$$

$$t^2 - 8t + 12 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 2)(t - 6) \leq 0$$

$$\text{これを解いて } 2 \leq t \leq 6 \quad \text{ゆえに} \quad 2 \leq \log_2 x \leq 6 \quad \text{よって} \quad 4 \leq x \leq 64$$

(答) キ. 4 ク. 64

$$(5) f(x) = x^2 + 3x - 2 \text{ より } f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(a) = 2 \text{ であるから } 2a + 3 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{13}{4}$$

求める接線は、点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$ を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y - \left(-\frac{13}{4}\right) = 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - \frac{9}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } -\frac{1}{2} \quad \text{コ. } 2x - \frac{9}{4}$$

[2] (1) $\alpha = 1 + i$ とおく. 実数を係数とする方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ が解 α をもつから, 2 次式

$$x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x + 2$$

は, 3 次式 $x^3 + ax^2 + bx - 2$ の因数であり, x^3 の係数と定数項に注意して

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx - 2 &= (x^2 - 2x + 2)(x - 1) \\ &= x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

x^2 と x の係数を比較して $a = -3, b = 4$

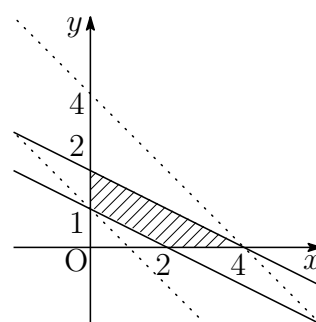
$$(\text{答}) \text{ サ. } -3 \quad \text{シ. } 4$$

(2) 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq x + 2y \leq 4$ の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含む. したがって

$x + y$ は $(x, y) = (4, 0)$ のとき最大値 4

$x + y$ は $(x, y) = (0, 1)$ のとき最小値 1

$$(\text{答}) \text{ ス. } 4 \quad \text{セ. } 1$$



(3) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ より

$$\begin{aligned} y &= \sin 2x - \cos 2x + 1 \\ &= 2 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) + 1 \\ &= 2 \sin x (\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

これが $y = 2 \sin x (\cos x + a \sin x)$ と一致するから $a = 1$

$$\text{したがって } y = \sqrt{2} \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$0 < x < \pi$ のとき $\left(\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi \right)$, $y = 0$ を満たす x の値は

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{3}{4}\pi$$

(答) ソ. 1 タ. $\frac{3}{4}\pi$

(4) $t = 2^x$ とおくと ($t > 0$), $2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ より

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 4)(2t - 1) = 0$$

$$t = 4, \frac{1}{2} \text{ より } 2^x = 2^2, 2^{-1} \quad \text{よって} \quad x = 2, -1$$

(答) チ. ツ. 2, -1

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 - x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}, \\ \int_0^2 |x^2 - x| dx &= - \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 1 \end{aligned}$$

(答) テ. $\frac{2}{3}$ ト. 1

[3] 2次方程式

$$4x^2 - 2(a-1)x - a = 0 \quad (*)$$

の2つの解が θ , $\sin \theta$, $\cos \theta$ であるから, 解と係数の関係により

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{a-1}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{a}{4}$$

上の2式を $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{a}{4}\right) = 1 \quad \text{整理すると} \quad a^2 = 3$$

$a > 0$ であるから $a = \sqrt{3}$

これを (*) に代入すると $4x^2 - 2(\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$

$$(2x - \sqrt{3})(2x + 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ であるから $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ よって $\theta = \frac{2}{3}\pi$

(答) ナ. $\frac{a-1}{2}$ ニ. $-\frac{a}{4}$ ヌ. $\sqrt{3}$ ネ. $\frac{2}{3}\pi$

[4] $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

条件から, $f(2) = 0$ であるから

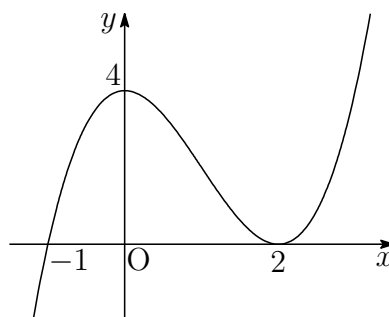
$$2^3 - 3 \cdot 2^2 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$ より, $y = f(x)$ のグラフが x 軸との共有点の x 座標は $x = -1, 2$

求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^2 (x+1)(2-x)^2 dx = \frac{1!2!}{4!} \{2 - (-1)\}^4 = \frac{27}{4}$$

(答) ノ. 4 ハ. ヒ. $-1, 2$ フ. $\frac{27}{4}$



1.10 令和4年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $2x^3 + x^2 + ax - 6$ を因数分解したものが $(2x - 3)(x^2 + bx + 2)$ であるならば、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ の値は、 $x < 1$ のときは $\boxed{\text{ウ}}$ であり、 $x > 2$ のときは $\boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 自然数全体を全体集合とし、 A を 3 の倍数の集合、 B を 4 の倍数の集合とする. $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ を用いると、12 の倍数の集合は $\boxed{\text{オ}}$ で、その補集合は $\boxed{\text{カ}}$ で表すことができる. ただし、 $\overline{A}, \overline{B}$ はそれぞれ A, B の補集合を表す.
- (4) $\triangle ABC$ において $\cos \angle A = \frac{1}{3}$ のとき、 $\cos(\angle B + \angle C) = \boxed{\text{キ}}$,
 $\tan(\angle B + \angle C) = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 4 つの値からなるデータ 171, 169, 177, a の平均値が 172 であれば、 $a = \boxed{\text{ケ}}$ である. このとき、データの標準偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) n は自然数とする. $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ の分母を有理化したものは $\boxed{\text{サ}}$ であり、
 $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ の整数部分が 3 となる n で最大のものは $n = \boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) 2 次方程式 $x^2 + ax + a - 1 = 0$ の解の 1 つが、不等式 $1 < x < 3$ を満たすとき、定数 a の範囲は $\boxed{\text{ス}} < a < \boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) $0 < a < 1$ とする. 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + b$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最大値が 2、最小値が -1 であれば、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ソ}}$, $b = \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において、 $\angle B = 90^\circ$ とする. 辺 BC 上に点 D を $\angle ADB = 60^\circ$ を満たすようにとる. $AD = 4$, $DC = 3BD$ であるとき、 $BC = \boxed{\text{チ}}$, $\sin \angle C = \boxed{1\text{cm}}$ ツ である.
- (5) 2 つの変量 (x, y) からなる 3 個の値の組のデータを $(-1, 3)$, $(0, -1)$, $(1, -2)$ とする. x と y の間には $\boxed{\text{テ}}$ がある (「正の相関」、「負の相関」のどちらかを選んで記入せよ). また、 x と y の相関係数は $\boxed{\text{ト}}$ である.

- [3] k を定数とする. 放物線 $y = x^2 - 2x + k$ のグラフが x 軸と 2 点で交わるための k の値の範囲は である. 2 次不等式 $x^2 - 2x \leq 0$ の解は である. 方程式 $|x^2 - 2x| = 2x - 1$ の解は $x =$, である.
- [4] $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$ の $\triangle ABC$ について, $\angle A =$ $^\circ$ である. $\triangle ABC$ の外接円の半径は である. $\triangle ABC$ の外接円上に A, B, D, C の順に並ぶように点 D をとるとき, $\angle BDC =$ $^\circ$ である. 点 D を $\triangle BDC$ の面積が最大になるようにとるとき, 四角形 $ABCD$ の面積は である.

解答例

[1] (1) $(2x-3)(x^2+bx+2)$ を展開して, x について整理すると

$$2x^3 + (2b-3)x^2 + (4-3b)x - 6$$

これが $2x^3 + x^2 + ax - 6$ に等しいから, x^2 と x の係数を比較すると

$$2b-3=1, \quad 4-3b=a \quad \text{これを解いて} \quad a=-2, \quad b=2$$

(答) ア. -2 イ. 2

$$(2) \sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = |x-1| - |x-2|$$

(i) $x < 1$ のとき, $x-1 < 0$, $x-2 < 0$ より

$$|x-1| = -(x-1) = -x+1, \quad |x-2| = -(x-2) = -x+2$$

$$\text{このとき} \quad |x-1| - |x-2| = -x+1 - (-x+2) = -1$$

(ii) $x > 2$ のとき, $x-1 > 0$, $x-2 > 0$ より

$$|x-1| = x-1, \quad |x-2| = x-2$$

$$\text{このとき} \quad |x-1| - |x-2| = (x-1) - (x-2) = 1$$

(答) ウ. -1 エ. 1

(3) 12 の倍数の集合は, 3 の倍数かつ 4 の倍数, すなわち, $A \cap B$

その補集合は, $\overline{A \cap B}$, すなわち, $\overline{A} \cup \overline{B}$

(答) オ. $A \cap B$ カ. $\overline{A} \cup \overline{B}$

(4) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ であるから

$$\cos(\angle B + \angle C) = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = -\frac{1}{3}$$

$\sin \angle A > 0$ であるから

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2},$$

$$\tan(\angle B + \angle C) = \tan(180^\circ - \angle A) = -\tan \angle A = -2\sqrt{2}$$

(答) キ. $-\frac{1}{3}$ ク. $-2\sqrt{2}$

(5) $m = 172$ とおくと, $171 = m - 1$, $169 = m - 3$, $177 = m + 5$ より

$$\frac{(m-1) + (m-3) + (m+5) + a}{4} = m \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3m+1+a}{4} = m$$

したがって $a = m - 1$ よって $a = 171$

また, 標準偏差 s は

$$s^2 = \frac{(171-172)^2 + (169-172)^2 + (177-172)^2 + (171-172)^2}{4} = 9$$

よって $s = 3$

(答) ケ. 171 コ. 3

[2] (1) $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$\sqrt{3} < 2 < \sqrt{5}$ より

$$2 + \sqrt{3} < 4 < \sqrt{5} + 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3+1} + \sqrt{3} < 4 < \sqrt{4+1} + \sqrt{4}$$

よって, 求める n は 3

(答) サ. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ シ. 3

(2) $x^2 + ax + a - 1 = 0$ より $(x+1)(x-1+a) = 0$

これを解いて $x = -1, 1-a$

この方程式の1つの解が $1 < x < 3$ を満たすから

$$1 < 1-a < 3 \quad \text{これを解いて} \quad -2 < a < 0$$

(答) ス. -2 セ. 0

(3) $y = x^2 - 2ax + b$ は下に凸の放物線.

$$f(x) = x^2 - 2ax + b \text{ とおくと } f(x) = (x-a)^2 + b - a^2$$

定義域 $-1 \leq x \leq 1$ の中央0は, 軸 $x = a$ ($0 < a < 1$) より左側にあるから, $f(x)$ は $x = -1$ (左端) で最大, $x = a$ で最小となる.

条件から, $f(-1) = 2$, $f(a) = -1$ であるから

$$1 + 2a + b = 2, \quad b - a^2 = -1 \tag{*}$$

(*) の第1式から $b = 1 - 2a \cdots \textcircled{1}$ $\textcircled{1}$ を (*) の第2式に代入すると

$$1 - 2a - a^2 = -1 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 2a - 2 = 0$$

$0 < a < 1$ に注意して解くと $a = -1 + \sqrt{3}$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $b = 3 - 2\sqrt{3}$

(答) ソ. $-1 + \sqrt{3}$ タ. $3 - 2\sqrt{3}$

(4) 右の図から

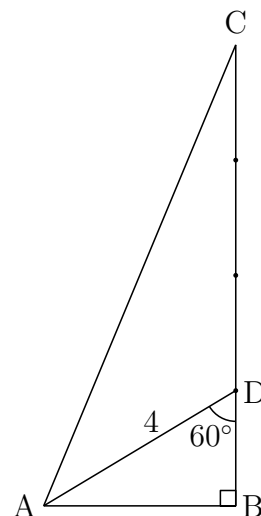
$$\begin{aligned}
 AB &= AD \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\
 BD &= AD \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\
 BC &= BD + CD \\
 &= BD + 3BD = 4BD = 4 \cdot 2 = 8
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\
 &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 8^2} = 2\sqrt{19}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sin \angle C = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\text{(答) チ. } 8 \quad \text{ツ. } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

(5) 3個の値の組 (x, y) のデータ $(-1, 3)$, $(0, -1)$, $(1, -2)$ について

$$\bar{x} = \frac{-1+0+1}{3} = 0, \quad \bar{y} = \frac{3+(-1)+(-2)}{3} = 0$$

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
-1	3	-1	3	1	9	-3
0	-1	0	-1	0	1	0
1	-2	1	-2	1	4	-2
計		0	0	2	14	-5

$$s_x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad s_y = \sqrt{\frac{14}{3}}, \quad s_{xy} = \frac{-5}{3}$$

$$\text{相関係数 } r \text{ は } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{-5}{3}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{(答) テ. 負の相関} \quad \text{ト. } -\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

[3] 放物線 $y = x^2 - 2x + k$ のグラフが x 軸と2点で交わるから、係数について

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \cdot k > 0 \quad \text{ゆえに} \quad k < 1$$

2次不等式 $x^2 - 2x \leq 0$ より

$$x(x - 2) \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 \leq x \leq 2$$

方程式 $|x^2 - 2x| = 2x - 1$ について

(i) $x^2 - 2x \leq 0$, すなわち, $0 \leq x \leq 2$ のとき

$$-(x^2 - 2x) = 2x - 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 1 = 0$$

x の値の範囲に注意して解くと $x = 1$

(ii) $x^2 - 2x \geq 0$, すなわち, $x \leq 0, 2 \leq x$ のとき

$$x^2 - 2x = 2x - 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

x の値の範囲に注意して解くと $x = 2 + \sqrt{3}$

よって $x = 1, 2 + \sqrt{3}$

(答) ナ. $k < 1$ ニ. $0 \leq x \leq 2$ ヌ. ネ. $1, 2 + \sqrt{3}$

[4] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

したがって $\angle A = 120^\circ$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により、直径 $2R$ は

$$2R = \frac{7}{\sin 120^\circ} = 7 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

点 D は $\triangle ABC$ の円周上の点であるから

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\triangle BDC$ の面積が最大となるのは、 $BD = CD$ の二等辺三角形、すなわち、1 辺の長さが 7 の正三角形のときである。このとき、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\triangle ABC + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$$

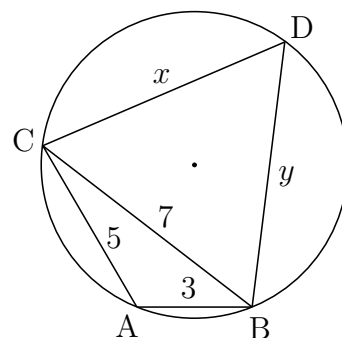
補足 $CD = x$, $BD = y$ とおき、 $\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$7^2 = x^2 + y^2 - xy \quad \text{ゆえに} \quad xy = 7^2 - (x - y)^2$$

xy は、 $x - y = 0$, すなわち、 $x = y = 7$ のとき最大となるから、このとき

$$\triangle BCD = \frac{1}{2}xy \sin 60^\circ = \frac{49}{4}\sqrt{3}$$

(答) ノ. 120 ハ. $\frac{14}{\sqrt{3}}$ ヒ. 60 フ $16\sqrt{3}$



1.11 令和4年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 3y$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ア}}) \times (\boxed{\text{イ}})$ である。
- (2) $|3x - 2| \leq x + 1$ の解は $\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの頂点が直線 $y = -x + 2$ 上にある。このとき、 b を a の関数として表すと $b = \boxed{\text{オ}}$ となるので、 b が最小となるときの a の値は $a = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 3\sin\theta = 3$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を満たす θ は $\theta = \boxed{\text{キ}}^\circ, \boxed{\text{ク}}^\circ$ である。
- (5) 3個のデータ a, b, c の平均値が3, 標準偏差が2であるとき, $2a + 3, 2b + 3, 2c + 3$ の平均値は $\boxed{\text{ケ}}$, 標準偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $A = \{1, 3, x^2 - x\}, B = \{1, x + 1, x^2 + 2x + 3\}$ とする。 $A \cap B = \{1, 2\}$ となるのは, $x = \boxed{\text{サ}}$ のときである。このとき, $A \cup B = \{1, 2, 3, \boxed{\text{シ}}\}$ である。
- (2) 2次関数 $y = -x^2 + ax + b$ のグラフと x 軸との2つの共有点があり, 2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフと x 軸との2つの共有点と一致するとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ス}}, b = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $a > 0$ とする。2次関数 $y = x^2 - ax + 4$ ($2a \leq x \leq 3a$) の最小値が12であるとき, 定数 a の値は $a = \boxed{\text{ソ}}$ である。このとき, 最大値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $AB = 5, AC = 8, \angle A = 60^\circ$ の $\triangle ABC$ について, $BC = \boxed{\text{チ}}$ である。頂点 A から辺 BC へ下した垂線を AH としたとき, $AH = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 5つの値からなるデータ $2, 1, 3, a, b$ ($a < b$) の平均値が2で, 四分位範囲が4であれば, $a = \boxed{\text{テ}}, b = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 2次方程式 $3x^2 - 4px + 2p^2 - 6 = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき, 定数 p の値の範囲は $\boxed{\text{ナ}} < p < \boxed{\text{ニ}}$ である。異なる2つの実数解を α, β とする。 p がこの範囲を動くとき, $\alpha^2 + \beta^2$ は, $p = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。
- [4] $\triangle ABC$ において, $AB = \sqrt{6}$ とする。辺 BC 上に, 点 D を $\angle ADB = 120^\circ$ を満たすようにとる。 $BD = 2$ であるとき, $AD = \boxed{\text{ノ}}, \angle BAD = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ である。さらに, $\angle BAD = \angle C$ であるとき, $AC = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

$$\begin{aligned}
 [1] \quad (1) \quad x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 3y &= (x + 3y)(x + 2y) + (x + 3y) \\
 &= (x + 3y)\{(x + 2y) + 1\} \\
 &= (x + 3y)(x + 2y + 1)
 \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $x + 3y$, $x + 2y + 1$

$$(2) \quad |3x - 2| \leq x + 1 \text{ より } -(x + 1) \leq 3x - 2 \leq x + 1$$

$$\begin{cases} -x - 1 \leq 3x - 2 \\ 3x - 2 \leq x + 1 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$(答) \quad \text{ウ. } \frac{1}{4} \quad \text{エ. } \frac{3}{2}$$

$$(3) \quad y = x^2 + ax + b \quad \text{ゆえに} \quad y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

頂点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$ が直線 $y = -x + 2$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\left(-\frac{a}{2}\right) + 2 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + 2$$

上の第2式から $b = \frac{1}{4}(a + 1)^2 + \frac{7}{4}$ b が最小となるとき $a = -1$

$$(答) \quad \text{オ. } \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + 2 \quad \text{カ. } -1$$

$$(4) \quad 3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 3\sin\theta = 3 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \text{ を } \sin\theta \text{ について整理すると}$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\text{したがって} \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \theta = 30^\circ, 150^\circ$$

(答) キ. ク. 30, 150

$$(5) \quad \text{与えられた条件から} \quad E(X) = 3, \quad V(X) = 2^2 = 4$$

$$\text{これから} \quad E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

$$V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 16 \quad \text{よって} \quad \sqrt{V(2X + 3)} = \sqrt{16} = 4$$

(答) ケ. 9　コ. 4

- [2] (1) $A = \{1, 3, x^2 - x\}$, $B = \{1, x + 1, x^2 + 2x + 3\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$ より,
 $2 \in A$ であるから

$$x^2 - x = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)(x - 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1, 2$$

(i) $x = -1$ のとき $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ より, 条件に適する.

(ii) $x = 2$ のとき $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 11\}$ より, 条件に反する.

よって $x = -1$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

(答) サ. -1 シ. 0

- (2) $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は $x = 1, 3$
 $y = -x^2 + ax + b$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標も $x = 1, 3$ より

$$-1 + a + b = 0, \quad -9 + 3a + b = 0$$

これを解いて $a = 4, b = -3$

(答) ス. 4 セ. -3

- (3) $y = x^2 - ax + 4$ ($2a \leq x \leq 3a$) より $y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 4$
 $x = 2a$ ($a > 0$) で最小値 12 をとるから

$$(2a)^2 - a \cdot 2a + 4 = 12 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

したがって, $y = x^2 - 2x + 4$ ($4 \leq x \leq 6$) の最大値は

$$x = 6 \text{ のとき } y = 6^2 - 2 \cdot 6 + 4 = 28$$

(答) ソ. 2 タ. 28

- (4) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 60^\circ = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

$BC > 0$ であるから $BC = 7$

$$\triangle ABC \text{ の面積 } S \text{ は } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \text{ より}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AH \quad \text{よって} \quad AH = \frac{20\sqrt{3}}{7}$$

(答) チ. 7 ツ. $\frac{20\sqrt{3}}{7}$

(5) データ 2, 1, 3, a , b ($a < b$) の平均値が 2 であるから

$$\frac{2+1+3+a+b}{5} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a+b=4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

条件より, $a < 2 < b$ であるから

$$\text{第1四分位数} = \frac{a+1}{2}, \quad \text{第3四分位数} = \frac{b+3}{2}$$

四分位範囲が 4 であるから

$$\frac{b+3}{2} - \frac{a+1}{2} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad b-a=6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = -1, b = 5$

(答) テ. -1 ト. 5

[3] $3x^2 - 4px + 2p^2 - 6 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから, 係数について

$$D/4 = (-2p)^2 - 3(2p^2 - 6) = -2p^2 + 18 > 0$$

これを解いて $-3 < p < 3$

解と係数の関係により $\alpha + \beta = \frac{4p}{3}, \alpha\beta = \frac{2p^2 - 6}{3}$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{4p}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2p^2 - 6}{3} = \frac{4}{9}p^2 + 4$$

よって, $p = 0$ のとき, 最小値 4 をとる.

(答) ナ. -3 ニ. 3 ス. 0 ネ. 4

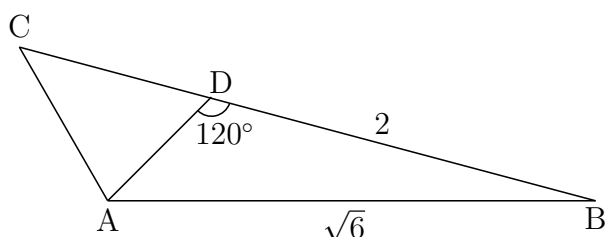
[4] $\triangle ABD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin \angle BAD} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \angle BAD = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\angle BAD < 60^\circ$ であるから $\angle BAD = 45^\circ$ また $\angle B = 15^\circ$

$\triangle ABD$ に第1余弦定理を適用すると

$$AD = AB \cos 45^\circ + BD \cos 120^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - 1$$



$\angle C = \angle BAD = 45^\circ$, $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\triangle ACD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad AC = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\angle B = 15^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ より $\angle BAC = 120^\circ$

よって, $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(3 - \sqrt{3})}{4}$$

(答) ノ. $\sqrt{3} - 1$ ハ. 45 ヒ. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ フ. $\frac{3(3 - \sqrt{3})}{4}$

1.12 令和4年度一般試験(90分)

- [1] (1) $-x^3 + 2x^2 - x + 2$ を $x^2 + x - 1$ で割ったとき, 商は , 余りは である.
- (2) a は 0 でない定数とする. 2 直線 $4x + 6y = -3$, $-x + ay = 4$ が垂直のとき, $a =$, 交点の座標は である.
- (3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする. $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ である.
- (4) $t = \log_2 x$ とおく. 関数 $f(x) = 4(\log_4 x)^2 - 6\log_2 \sqrt{x} + 2$ を t を用いて表すと, $f(x) =$ である. $2 \leq x \leq 8$ のとき, $f(x)$ の最小値は である.
- (5) 関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ の極大値は , 極小値は である.
- [2] (1) 方程式 $x^3 + ax^2 + 9x + b = 0$ の解の 1 つが $1 + 2i$ であるとき, 実数 a, b の値は, $a =$, $b =$ である.
- (2) 直線 $y = 2x + 5$ が, 原点を中心とする半径 r の円に接するとき, $r =$ であり, 接点の x 座標は である.
- (3) 任意の x に対して $A \sin(x + \theta) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ が成り立つとき, 定数 A, θ の値は $A =$, $\theta =$ である. ただし, $A > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ とする.
- (4) 不等式 $2^x + \frac{1}{2^{x-1}} \leq 3$ の解は $\leq x \leq$ である.
- (5) $F(x) = \int (x^2 - 4x + 3) dx$, $F(0) = 2$ であるとき, $F(x) =$ である.
 正の定数 a が, $\int_0^a (x^2 - 4x + 3) dx = 0$ を満たすとき, $a =$ である.
- [3] $a > 0$ とする. 点 $A(2a, a)$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるとき, $a >$ である. 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (s, t) における円の接線の方程式は $= 1$ である. この接線が点 $(2, 1)$ を通るとき, 接点の座標 (s, t) は $(0, 1)$ または であり, 接線の方程式は, $y = 1$ または $y =$ である.

- [4] $a > 0$ とする. 2 曲線 $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$, $C_2 : y = \frac{1}{2}(x - a)^2$ の交点で, それぞれの曲線に引いた接線が垂直になるとき, 定数 a の値は, $a = \boxed{\text{ノ}}$ である. このとき曲線 C_1 に引いた接線 ℓ の方程式は, $y = \boxed{\text{ハ}}$ である. 曲線 C_1 と C_2 の交点の交点以外で, 接線 ℓ と曲線 C_2 の交点の x 座標は $\boxed{\text{ヒ}}$ であり, 接線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) 次の計算により, 商は $-x + 3$, 余りは $-5x + 5$

$$\begin{array}{r} -x \quad +3 \\ x^2 + x - 1 \overline{) -x^3 + 2x^2 - x + 2} \\ \underline{-x^3 \quad -x^2 \quad +x} \\ 3x^2 - 2x + 2 \\ \underline{3x^2 + 3x - 3} \\ -5x + 5 \end{array}$$

(答) ア. $-x + 3$ イ. $-5x + 5$

(2) $4x + 6y = -3$, $-x + ay = 4$ をそれぞれ変形すると ($a \neq 0$)

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{a}x + \frac{4}{a}$$

これらの2直線が垂直であるから

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{2}{3}$$

2直線 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}x + 6$ の交点の座標は $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

別解 2直線 $4x + 6y = -3$, $-x + ay = 4$ の法線ベクトルは, それぞれ, $(4, 6)$, $(-1, a)$ であり, これらが垂直であるから

$$4(-1) + 6 \cdot a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{2}{3}$$

(答) ウ. $\frac{2}{3}$ エ. $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから, $\cos \theta < 0$ より

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

したがって

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{3}{5}$$

(答) オ. $-\frac{4}{5}$ カ. $\frac{3}{5}$

(4) $t = \log_2 x$ より

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}, \quad \log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{t}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(\log_4 x)^2 - 6 \log_2 \sqrt{x} + 2 \\ &= 4 \left(\frac{t}{2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{t}{2} + 2 = t^2 - 3t + 2 \end{aligned}$$

$2 \leq x \leq 8$ より, $g(t) = t^2 - 3t + 2$ とおくと ($1 \leq t \leq 3$)

$$g(t) = \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって, 求める最小値は $-\frac{1}{4}$

(答) キ. $t^2 - 3t + 2$ ク. $-\frac{1}{4}$

(5) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

したがって, $f(x)$ の増減表は

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって, 極大値 $f(-1) = 4$, 極小値 $f(1) = 0$

(答) ケ. 4 コ. 0

- [2] (1) $\alpha = 1 + 2i$ とおく. 実数を係数とする方程式 $x^3 + ax^2 + 9x + b = 0$ が解 α をもつから, 2次式

$$x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x + 5$$

は, 3次式 $x^3 + ax^2 + 9x + b$ の因数であり, x^3 の係数と定数項に注意して

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 9x + b &= (x^2 - 2x + 5) \left(x + \frac{b}{5} \right) \\ &= x^3 + \left(\frac{b}{5} - 2 \right) x^2 + \left(5 - \frac{2}{5}b \right) x + b \end{aligned}$$

x^2 と x の係数を比較して

$$a = \frac{b}{5} - 2, \quad 9 = 5 - \frac{2}{5}b \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = -4, \mathbf{b = -10}}$$

(答) サ. -4 シ. -10

- (2) 原点から直線 $y = 2x + 5$ ($2x - y + 5 = 0$) までの距離 d は

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

この直線と原点を中心とする半径 r の円が接するから $r = d = \sqrt{5}$

接点と原点を結ぶ直線は $y = -\frac{1}{2}x$

求める接点の x 座標は, 2直線 $y = 2x + 5$, $y = -\frac{1}{2}x$ から y を消去して

$$2x + 5 = -\frac{1}{2}x \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{x = -2}$$

(答) ス. $\sqrt{5}$ セ. -2

- (3) $A \sin(x + \theta) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ の右辺を変形すると $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

よって $\mathbf{A = 2, \theta = \frac{\pi}{6}}$

(答) ソ. 2 タ. $\frac{\pi}{6}$

$$(4) \ t = 2^x \text{ とおくと } (t > 0), \ 2^x + \frac{2}{2^x} \leq 3 \text{ より } t + \frac{2}{t} \leq 3$$

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(t-2) \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad 1 \leq 2^x \leq 2 \quad \text{よって} \quad 0 \leq x \leq 1$$

(答) チ. 0 ツ. 1

$$(5) \ F(x) = \int (x^2 - 4x + 3) dx \text{ より}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$F(0) = 2$ であるから

$$C = 2 \quad \text{よって} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$$

$$\int_0^a (x^2 - 4x + 3) = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^a = \frac{a^3}{3} - 2a^2 + 3a = 0 \text{ より}$$

$$a^3 - 6a^2 + 9a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-3)^2 = 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $a = 3$

$$(答) \text{ テ. } \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2 \quad \text{ ト. } 3$$

[3] 点 $A(2a, a)$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるとき ($a > 0$)

$$(2a)^2 + a^2 > 1 \quad \text{これを解いて} \quad a > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (s, t) における接線は $sx + ty = 1$

この接線が点 $(2, 1)$ を通るから $2s + t = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

接点 (s, t) は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるから $s^2 + t^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② を解いて $(s, t) = (0, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

したがって $\begin{cases} \text{接点 } (0, 1) \\ \text{接線 } y = 1 \end{cases}, \begin{cases} \text{接点 } \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \\ \text{接線 } \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$

③ より, 求める接線は $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

別解 円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部の点 $(2, 1)$ を極とする極線¹は $2x + y = 1$

求める接点は, 円と極線の交点として求めることもできる.

(答) ナ. $\frac{1}{\sqrt{5}} \quad$ ニ. $sx + ty \quad$ ス. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad$ ネ. $\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

[4] $C_1: y = \frac{x^2}{2}, C_2: y = \frac{1}{2}(x - a)^2$ の交点の x 座標は

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x - a)^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{a}{2}$$

$f(x) = \frac{x^2}{2}, g(x) = \frac{1}{2}(x - a)^2$ とおくと

$$f'(x) = x, \quad g'(x) = x - a$$

条件から, $f'\left(\frac{a}{2}\right)g'\left(\frac{a}{2}\right) = -1$ より ($a > 0$)

$$\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - a\right) = -1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2012.pdf (p.13 を参照)

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\frac{a}{2} = 1$ また $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = 1$

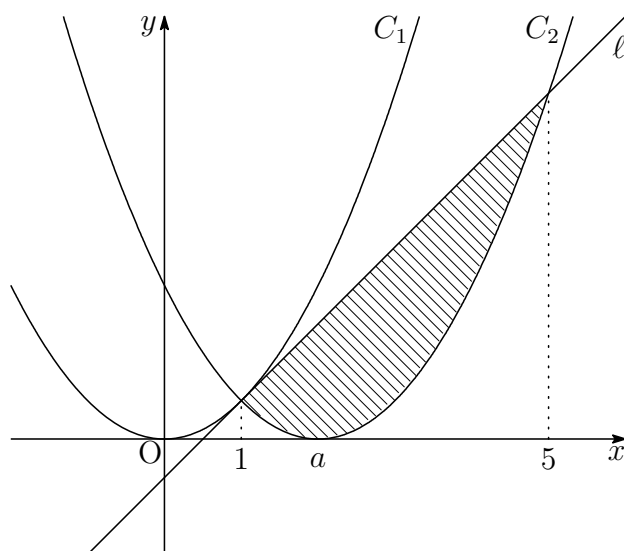
ℓ は点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を通り, 傾き 1 の直線であるから

$$y - \frac{1}{2} = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{1}{2}$$

$\ell: y = x - \frac{1}{2}$ と $C_2: y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ の交点の x 座標は

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \quad \text{整理すると} \quad (x - 1)(x - 5) = 0$$

求める交点の x 座標は **5**



ℓ と C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \left\{ x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 2)^2 \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^5 (x - 1)(x - 5) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (5 - 1)^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(答) ノ. 2 ハ. $x - \frac{1}{2}$ ヒ. 5 フ. $\frac{16}{3}$

1.13 令和3年度推薦前期試験(90分)

[1] (1) $\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である, ただし, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ は整数とする.

(2) $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を全体集合とし, A, B をその部分集合とする.

$$A \cap B = \{1\}, A \cap \overline{B} = \{2\}, \overline{A} \cap \overline{B} = \{4\} \text{ のとき, } A = \{\boxed{\text{ウ}}\},$$

$$B = \{\boxed{\text{エ}}\} \text{ である.}$$

(3) 頂点が $(-2, 1)$ の放物線が点 $(1, -2)$ を通るとき, 放物線の方程式の x^2 の係数は $\boxed{\text{オ}}$ であり, 放物線と x 軸の2つの交点の x 座標のうち -2 と 1 の間にあるのは $\boxed{\text{カ}}$ である.

(4) 次の式の値を求めよ.

$$\sin 75^\circ + \cos 165^\circ = \boxed{\text{キ}}, \quad \cos 135^\circ \times \tan 150^\circ = \boxed{\text{ク}}$$

(5) $a < b$ とする. データ $a, b, 1, 3$ の平均値が 5 , 中央値が 4 であれば,

$$a = \boxed{\text{ケ}}, b = \boxed{\text{コ}} \text{ である.}$$

[2] (1) $a < 2\sqrt{5} < a+1$ を満たす整数 a の値は $\boxed{\text{サ}}$ である. このとき, $\frac{1}{2\sqrt{5}-a}$ の分母を有理化すると $\boxed{\text{シ}}$ である.

(2) a, b は定数とし, $a > 0$ とする. 関数 $y = ax^2 - 4ax + b$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が 5 , 最小値 -3 であるとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である.

(3) 2次方程式 $x^2 - 2x + a = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき, 定数 a の値の範囲は $a < \boxed{\text{ソ}}$ である. 更に, 2つの解の差が 4 であるとき, $a = \boxed{\text{タ}}$ である.

(4) $AB = 5\sqrt{3}$, $AC = 2$, $\angle A = 30^\circ$ の $\triangle ABC$ について, $BC = \boxed{\text{チ}}$ であり, 外接円の半径 R は $R = \boxed{\text{ツ}}$ である.

(5) データ $a, a, a, 1-a, 1-a, 1-a$ の分散を s^2 とする. $s^2 < \frac{1}{4}$ であるとき, a の値の範囲は, $\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ である.

[3] 連立不等式

$$7x - 10 \leq x^2 \leq x + 12$$

を解くと、 $\boxed{\text{ナ}} \leq x \leq \boxed{\text{ニ}}$ である。この範囲の x に対して、

$$x^2 - 6x - a^2 + 10 \geq 0$$

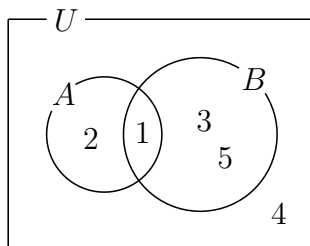
が成り立つとき、定数 a の値の範囲は、 $\boxed{\text{ヌ}} \leq a \leq \boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 3$ の $\triangle ABC$ について、 $\angle A = \boxed{\text{ノ}}^\circ$ であり、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である。 $\angle A$ を二等分する直線と辺 BC の交点を D とするとき、 $\triangle ABD$ の面積は $\boxed{\text{ヒ}}$ であり、 $AD = \boxed{\text{フ}}$ となる。

解答例

$$[1] (1) \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{(4 - 9) + (2 - 3)\sqrt{6}}{2 - 3} = 5 + \sqrt{6}$$

(答) ア. 5 イ. 6

(2) ベン図を用いると $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 

(答) ウ. 1, 2 エ. 1, 3, 5

補足 $A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ $\bar{B} = (A \cup \bar{A}) \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \{2\} \cup \{4\} = \{2, 4\}$ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ であるから $B = \{1, 3, 5\}$

分配法則

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(3) 頂点が $(-2, 1)$ の放物線の方程式を

$$y = a(x + 2)^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと, これが点 $(1, -2)$ を通るから

$$-2 = a(1 + 2)^2 + 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } y = -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$$

$$y = 0 \text{ とすると } 0 = -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$$

$$\text{ゆえに } (x + 2)^2 = 3 \quad \text{これを解いて } x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$-2 \text{ と } 1 \text{ の間にあるのは } -2 + \sqrt{3}$$

$$(\text{答}) \text{ オ. } -\frac{1}{3} \quad \text{カ. } -2 + \sqrt{3}$$

$$(4) \cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{よって } \cos 165^\circ + \sin 75^\circ = 0$$

$$\cos 135^\circ \times \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } 0 \quad \text{ク. } \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(5) \text{ データ } a, b, 1, 3 \text{ の平均値が } 5 \text{ であるから}$$

$$\frac{a+b+1+3}{4} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a+b}{2} = 8$$

$$a < b \text{ より, } a < 8 < b \text{ に注意すると, 中央値が } 4 \text{ であるから}$$

$$\frac{3+a}{2} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a = 5 \quad \text{これから} \quad b = 11$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } 5 \quad \text{コ. } 11$$

$$[2] (1) 2\sqrt{5} = \sqrt{20} \text{ より, } 4 < \sqrt{20} < 5 \text{ であるから, 整数 } a \text{ は } a = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{5}-a} &= \frac{1}{2\sqrt{5}-4} = \frac{1}{2(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+2}{2(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{ サ. } 4 \quad \text{シ. } \frac{\sqrt{5}+2}{2}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= ax^2 - 4ax + b \quad (0 \leq x \leq 3) \\ &= a(x-2)^2 - 4a + b \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ より, } x = 0 \text{ で最大値 } b, x = 2 \text{ で最小値 } -4a + b$$

$$\text{条件から } b = 5, -4a + b = -3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

$$(\text{答}) \text{ ス. } 2 \quad \text{セ. } 5$$

- (3) 2次方程式 $x^2 - 2x + a = 0 \cdots \textcircled{1}$ が異なる2つの実数解をもつから

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a > 0 \quad \text{これを解いて} \quad a < 1$$

$\textcircled{1}$ に解の公式を適用すると

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-a)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$$

2つの解の差が4であるから

$$(1 + \sqrt{1-a}) - (1 - \sqrt{1-a}) = 2\sqrt{1-a} = 4$$

ゆえに $\sqrt{1-a} = 2$ 両辺を平方すると $1-a = 4$

これを解いて $a = -3$

(答) ソ. 2 タ. -3

- (4) $b = 2$, $c = 5\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$ を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 2^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} \cos 30^\circ \\ &= 4 + 75 - 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $BC = a = 7$

正弦定理 $2R = \frac{a}{\sin A}$ より

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \sin 30^\circ} = \frac{7}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 7$$

(答) チ. 7 ツ. 7

- (5) データ $a, a, a, 1-a, 1-a, 1-a$ の平均 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{a + a + a + (1-a) + (1-a) + (1-a)}{6} = \frac{1}{2}$$

したがって、分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{6} \left\{ 3 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(1 - a - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$s^2 < \frac{1}{4} \quad \text{より} \quad \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$a^2 - a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-1) < 0 \quad \text{よって} \quad 0 < a < 1$$

(答) テ. 0 ト. 1

[3] $7x - 10 \leq x^2 \leq x + 12$ より $(*) \begin{cases} 7x - 10 \leq x^2 \\ x^2 \leq x + 12 \end{cases}$

$(*)$ の第1式より $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

$(x - 2)(x - 5) \geq 0$ これを解いて $x \leq 2, 5 \leq x \cdots \textcircled{1}$

$(*)$ の第2式より $x^2 - x - 12 \leq 0$

$(x + 3)(x - 4) \leq 0$ これを解いて $-3 \leq x \leq 4 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-3 \leq x \leq 2$

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 10$ とおくと $f(x) = (x - 3)^2 - a^2 + 1$

$-3 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 2 - a^2$

条件を満たすとき, $f(2) \geq 0$ であればよいから

$2 - a^2 \geq 0$ ゆえに $a^2 - 2 \leq 0$

したがって $(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) \leq 0$ よって $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

(答) ナ. -3 ニ. 2 ヌ. $-\sqrt{2}$ ネ $\sqrt{2}$

[4] $a = 7, b = 3, c = 8$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

よって $A = 60^\circ$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$AD : DC = AB : AC = 8 : 3$ であるから

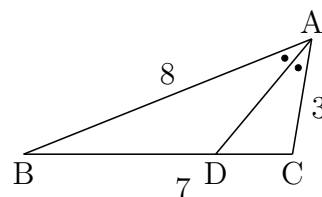
$$\triangle ABD = \frac{8}{8+3}S = \frac{8}{11} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{48}{11}\sqrt{3}$$

$x = AD$ とおくと, $\triangle ABD + \triangle ACD = S$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 8x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3x \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{11}{4}x = 6\sqrt{3}$$

よって $AD = x = \frac{24}{11}\sqrt{3}$

(答) ノ. 60 ハ. $6\sqrt{3}$ ヒ. $\frac{48}{11}\sqrt{3}$ フ $\frac{24}{11}\sqrt{3}$



1.14 令和3年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $(x+a)(x^2-3x+b)$ を展開すると x^3+27 になった. このとき, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) 不等式 $|2x+1| \leq -x$ の解は, $\boxed{\text{ウ}} \leq x \leq \boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 2つの2次関数 $y = -2x^2 + (a+2)x + b$, $y = x^2 - ax + 2b + 2$ のグラフの頂点が一致するとき, 定数 a , b の値は $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 6$, $BC = 4$, $\angle B = 60^\circ$ とする. $\triangle ABC$ の面積は, $\boxed{\text{キ}}$ である. 辺 BC の点 D を $\triangle ABD$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の半分になるようにとる. このとき, $AD = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) データ $-1, a, 2, 3$ の平均値が 1 であるとき, $a = \boxed{\text{ケ}}$ であり, 標準偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$, $y = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ のとき, $x+y = \boxed{\text{サ}}$, $x^2+y^2 = \boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) $y = x^2 + 3x + a$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最小値が 0 のとき, $a = \boxed{\text{ス}}$ であり, 最大値は $\boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) a を実数とする. $A = \{x \mid x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$ とおく. $A \subset B$ であるための必要十分条件は $\boxed{\text{ソ}} \leq a \leq \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. $\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} \cos \theta$ を満たす θ は, $\theta = \boxed{\text{チ}}^\circ$ と $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ である.
- (5) $a < b$ とする. データ $a, b, 1, 3, 5$ の中央値, 四分位範囲がともに 4 であれば, $a = \boxed{\text{テ}}$, $b = \boxed{\text{ト}}$ である.
- [3] $t = x^2 + 2x + 2$ とおく. $y = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 8$ を t の2次式で表すと $y = \boxed{\text{ナ}}$ である. x が実数全体を動くときの t の最小値は $\boxed{\text{ニ}}$ であるから, x が実数全体を動くときの y の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である. また, $y = 15$ を満たす実数 x のうち最も大きいのは $x = \boxed{\text{ネ}}$ である.
- [4] $\triangle ABC$ において, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ とする. 頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とし, $AH = a$ とおく. BH, HC を a を用いて表すと, $BH = \boxed{\text{ノ}}$, $HC = \boxed{\text{ハ}}$ である. $BC = 8$ とすると, $a = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, $\sin \angle A = \boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $(x+a)(x^2-3x+b)$ を展開すると

$$(x+a)(x^2-3x+b) = x^3 + (a-3)x^2 + (-3a+b)x + ab$$

上式の右辺が $x^3 + 27$ に等しいから、同じ次数の項の係数を比較すると

$$a-3=0, \quad -3a+b=0, \quad ab=27$$

第1式と第2式を連立すると $a=3, b=9$ これは第3式を満たす.

よって **$a=3, b=9$**

(答) ア. 3 イ. 9

(2) $|2x+1| \leq -x$ より $-(-x) \leq 2x+1 \leq -x$

したがって $x \leq 2x+1 \leq -x$ これを解いて **$-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$**

(答) ウ. -1 エ. $-\frac{1}{3}$

(3) 2つの2次関数 $y = -2x^2 + (a+2)x + b$, $y = x^2 - ax + 2b + 2$ の軸の方程式が一致するから

$$-\frac{a+2}{2 \cdot (-2)} = -\frac{-a}{2 \cdot 1} \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a=2}$$

したがって、それぞれの2次関数は

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x + b & y &= x^2 - 2x + 2b + 2 \\ &= -2(x-1)^2 + b + 2 & &= (x-1)^2 + 2b + 1 \end{aligned}$$

これらの頂点の y 座標が一致するから

$$b+2 = 2b+1 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{b=1}$$

(答) オ. 2 カ. 1

補足 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$

- (4) $c = 6$, $a = 4$, $B = 60^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ の面積を S とすると

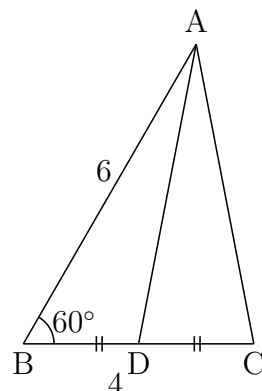
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin 60^\circ \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

点 D は BC の中点であるから $BD = 2$
 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cos 60^\circ \\ &= 36 + 4 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 28 \end{aligned}$$

よって $AD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(答) キ. $6\sqrt{3}$ ク. $2\sqrt{7}$



- (5) -1 , a , 2 , 3 の平均値が 1 であるから

$$\frac{-1 + a + 2 + 3}{4} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0$$

したがって, データ -1 , 0 , 2 , 3 分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{(-1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 1)^2}{4} = \frac{10}{4}$$

よって, 標準偏差は $s = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(答) ケ. 0 コ. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

[2] (1) $x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$, $y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ より

$$x + y = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{12}{2} = 6$$

$xy = 1$ であるから $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \cdot 1 = 34$

(答) サ. 6 シ. 34

(2) $f(x) = x^2 + 3x + a$ とおくと

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{9}{4}$$

$-2 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値が 0 であるから

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = a - \frac{9}{4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{9}{4}$$

最大値は $f(1) = 4 + a = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

(答) ス. $\frac{9}{4}$ セ. $\frac{25}{4}$

(3) $A = \{x \mid x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$ について

$$A = \{x \mid a \leq x \leq a+1\}, \quad B = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

$A \subset B$ より $-1 \leq a$, $a+1 \leq 2$ よって $-1 \leq a \leq 1$

(答) ソ. -1 タ. 1

(4) $\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} \cos \theta$ より $1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} \cos \theta$

$$\cos \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = 0, \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 60^\circ, 90^\circ$

(答) チ. ツ. 60, 90

(5) 奇数個のデータであるから中央値 4 のデータがあり, $a < b$ に注意すると

$a = 4$, データを小さい順に並べると 1, 3, 4, 5, b

第 1 四分位数 $\frac{1+3}{2} = 2$, 第 3 四分位数 $\frac{5+b}{2}$

四分位範囲が 4 であるから

$$\frac{5+b}{2} - 2 = 4 \quad \text{これを解いて} \quad b = 7$$

(答) テ. 4 ト. 7

[3] $t = x^2 + 2x + 2$ の両辺を平方すると

$$\begin{aligned} t^2 &= (x^2 + 2x + 2)^2 \\ &= (x^2)^2 + (2x)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot x^2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } y &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 8 \\ &= x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 + 2x^2 + 4x + 4 \\ &= (x^2 + 2x + 2)^2 + 2(x^2 + 2x + 2) \\ &= t^2 + 2t \end{aligned}$$

$$t = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \text{ より, } t \text{ の最小値は } 1$$

$$y = (t + 1)^2 - 1 \ (t \geq 1) \text{ であるから, } y \text{ は } t = 1 \text{ のとき最小値 } 3$$

$$\text{また, } y = 15 \text{ のとき } t^2 + 2t = 15$$

$$(t + 5)(t - 3) = 0 \quad t \geq 1 \text{ に注意して } t = 3$$

$$\text{このとき } x^2 + 2x + 2 = 3 \text{ これを解いて } x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{このうち, 最も大きい解は } x = -1 + \sqrt{2}$$

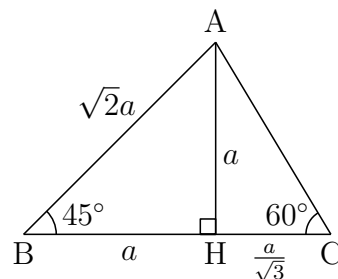
$$(\text{答}) \text{ ナ. } t^2 + 2t \quad \text{ニ. } 1 \quad \text{ヌ. } 3 \quad \text{ネ. } -1 + \sqrt{2}$$

$$[4] \text{ BH} = \text{AH} = a, \text{ HC} = \text{AH} \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{BC} = 8 \text{ のとき}$$

$$a + \frac{a}{\sqrt{3}} = 8 \quad \text{ゆえに } (\sqrt{3} + 1)a = 8\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } a &= \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= 4(3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$



$$\triangle ABC \text{ に正弦定理を適用すると } \frac{\text{BC}}{\sin A} = \frac{\text{AC}}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{a + \frac{a}{\sqrt{3}}}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}a}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに } \sqrt{2} \sin A = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } \sin A = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ ノ. } a \quad \text{ハ. } \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{ヒ. } 4(3 - \sqrt{3}) \quad \text{フ. } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

1.15 令和3年度一般試験(90分)

- [1] (1) $(2a - 3b)^3$ を展開すると、 a^2b の係数は であり、 ab^2 の係数は である。
- (2) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = -2$ のとき、 $\frac{x+y+z}{a+b+c} =$, $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} =$ である。
- (3) $9^x - 10 \times 3^{x-1} + 1 = 0$ を解くと、 $x =$, である。
- (4) $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$ を用いると $\sin 165^\circ =$, $\cos 165^\circ =$ である。
- (5) 曲線 $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ 上の点 $(0, -1)$ における接線の傾きは である。点 $(0, -1)$ でない曲線上の点で $(0, -1)$ と同じ傾きの接線をもつ点の x 座標は である。
- [2] (1) 方程式 $x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$ の解は $x = -3$, $x =$, $x =$ である。
- (2) 点 $(2, 4)$ を通り、直線 $2x + 3y + 2 = 0$ に垂直な直線の方程式を $y = ax + b$ とすると、定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である。
- (3) $x > 0$ で定義される関数 $\left(\log_2 \frac{x}{2}\right) \left(\log_4 \frac{x}{4}\right)$ は、 $x =$ のとき最小値 をとる。
- (4) $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ とする。 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\sin \theta + \cos \theta =$ であり、 $\sin \theta =$ である。
- (5) 関数 $f(x)$ と定数 a に対して、 $\int_0^x f(t) dt = x^3 + x^2 - x + a$ が成り立つ。このとき、 $f(x) =$, $a =$ である。
- [3] 3点 $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、頂点 A と辺 BC の距離は であり、 $\triangle ABC$ の面積は である。辺 BC に平行な直線 ℓ で $\triangle ABC$ の面積を2等分する。このとき、頂点 A と直線 ℓ の距離は であり、直線 ℓ の方程式は $y =$ である。
- [4] a は定数とする。2つの放物線 $y = x^2 + 2x - 1$ と $y = 2x^2 + x + a$ が共有点をもたないとき、 a のとりうる値の範囲は である。一方、2つの放物線が $x = -1$ を x 座標にもつ点を共有するとき、 $a =$ である。このとき、もう一方の交点の x 座標は $x =$ となり、2つの放物線で囲まれる部分の面積は である。

解答例

$$[1] (1) (2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a(3b)^2 - (3b)^3 \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

よって、 a^2b の係数は -36 、 ab^2 の係数は 54

(答) ア. -36 イ. 54

$$(2) \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = -2 \text{ より, } x = -2a, y = -2b, z = -2c \text{ であるから}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{-2a-2b-2c}{a+b+c} = \frac{-2(a+b+c)}{a+b+c} = -2, \\ \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(-2a)^2+(-2b)^2+(-2c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 4$$

(答) ウ. -2 エ. 4

$$(3) t = 3^{x-1} \text{ とおくと } (t > 0), 9^x = (3^x)^2 = (3 \cdot 3^{x-1})^2 = (3t)^2 = 9t^2 \text{ より}$$

$$9^x - 10 \times 3^{x-1} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 9t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$\text{したがって } (t-1)(9t-1) = 0 \quad \text{これを解いて } t = 1, \frac{1}{9}$$

$$\text{よって } 3^{x-1} = 3^0, 3^{-2} \quad \text{すなわち } x = 1, -1$$

(答) オ. カ. $1, -1$

(4) 加法定理により

$$\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ク. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(5) y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \text{ より } y' = 3x^2 - 4x + 3$$

$$x = 0 \text{ における接線の傾きは } y' = 3$$

$$y' = 3 \text{ とすると } 3x^2 - 4x + 3 = 3$$

$$x(3x-4) = 0 \quad x \neq 0 \text{ より } x = \frac{4}{3}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } 3 \quad \text{コ. } \frac{4}{3}$$

- [2] (1) 方程式 $x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$ の解の1つが $x = -3$ であるから, 3次式 $x^3 + x^2 - 7x - 3$ は $x + 3$ を因数にもつ.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 1 \\
 x + 3 \overline{) x^3 + x^2 - 7x - 3} \\
 \underline{x^3 + 3x^2} \\
 -2x^2 - 7x \\
 \underline{-2x^2 - 6x} \\
 -x - 3 \\
 \underline{-x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

3次方程式 $(x + 3)(x^2 - 2x - 1) = 0$ を解いて $x = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

(答) サ. シ. $1 \pm \sqrt{2}$

- (2) 直線 $2x + 3y + 2 = 0$, すなわち, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ の傾きは $-\frac{2}{3}$
 点 $(2, 4)$ を通り, これに垂直な直線は

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{2}x + 1$$

(答) ス. $\frac{3}{2}$ セ. 1

- (3) $t = \log_2 x$ とおくと, $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}$ より

$$\begin{aligned}
 \left(\log_2 \frac{x}{2}\right) \left(\log_4 \frac{x}{4}\right) &= (\log_2 x - \log_2 2)(\log_4 x - \log_4 4) \\
 &= (t - 1) \left(\frac{t}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t) + 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

よって $t = \frac{3}{2}$ すなわち $x = 2\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる.

(答) ソ. $2\sqrt{2}$ タ. $-\frac{1}{8}$

(4) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$ であるから

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{7}{4}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ より, $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{上式と } \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \sin \theta = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ 㐅. } -\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{㐃. } \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$$

(5) (*) $\int_0^x f(t) dt = x^3 + x^2 - x + a$ の両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

(*) に $x = 0$ を代入すると $a = 0$

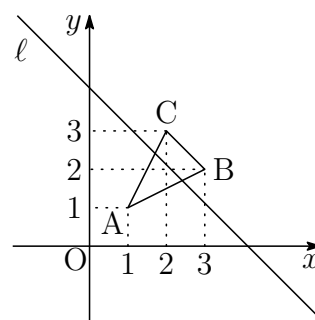
(答) テ. $3x^2 + 2x - 1$ ト. 0

[3] 2点 $B(2, 3)$, $C(3, 2)$ を通る直線の方程式は

$$x + y - 5 = 0$$

点 A から直線 BC までの距離 d は

$$d = \frac{|1 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



$$\text{また } BC = \sqrt{(2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

直線 ℓ の方程式を $y = -x + k$ ($x + y - k = 0$) とすると ($k > 2$)

点 A から直線 ℓ までの距離が $\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$ であればよいから

$$\frac{|1 + 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |k - 2| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$k > 2 \text{ であるから } k - 2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad k = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } \ell : y = -x + 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(\text{答}) \text{ ナ. } \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{ニ. } \frac{3}{2} \quad \text{ヌ. } \frac{3}{2} \quad \text{ネ. } -x + 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

[4] 2つの放物線の方程式 $y = x^2 + 2x - 1$ と $y = 2x^2 + x + a$ から y を消去すると

$$x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + x + a \quad \text{整理すると} \quad x^2 - x + a + 1 = 0 \quad (*)$$

これらが共有点をもたないとき、係数について

$$(-1)^2 - 4(a + 1) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad a > -\frac{3}{4}$$

$x = -1$ を共有するとき、方程式 $(*)$ が $x = -1$ を解にもつから

$$(-1)^2 - (-1) + a + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -3$$

このとき $x^2 - x - 2 = 0$ ゆえに $(x + 1)(x - 2) = 0$

したがって、もう一方の交点の x 座標は $x = 2$

よって、2つの放物線で囲まれる部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(x^2 + 2x - 1) - (2x^2 + x - 3)\} dx \\ &= - \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx \\ &= \frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(答) ノ. $a > -\frac{3}{4}$ ハ. -3 ヒ. 2 フ. $\frac{9}{2}$

1.16 令和2年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(x+2y)(x-2y)(x^2+y^2)$ を展開したとき, y^4 の係数は , x^2y^2 の係数は である.
- (2) 2次方程式 $x^2 - mx + m = 0$ が0でない重解をもつとき, 定数 m の値は であり, 重解は $x =$ である.
- (3) a は正の実数とする. 2次関数 $y = x^2 + 2ax - 2$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値と最小値の差が9である. このとき, $a =$, 最大値は である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $\angle C = 60^\circ$, $AC = \sqrt{2}$, その外接円の半径が1のとき, $AB =$, $BC =$ である.
- (5) 5個のデータ 3, 5, 4, 1, 7 の平均値は , 標準偏差は である.
- [2] (1) $A = \{x | a \leq x \leq b, x \text{ は実数}\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$ とする.
- $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$, $A \cup B = \{x | 0 \leq x \leq 3, x \text{ は実数}\}$
- (2) 不等式 $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ の解は $\leq x \leq$ である.
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ は点 $(1, 1)$ を通り, その頂点は x 軸上にある. このとき, 定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である. ただし, $a \neq 0$ とする.
- (4) $\triangle ABC$ において $AB = 7$, $BC = 13$, $AC = 8$ であるとき $\angle A =$ $^\circ$ であり, $\triangle ABC$ の外接円の半径は である.
- (5) 4個のデータ 4, 6, a , 20 の中央値を M , 四分位範囲を Q とする. ただし, $6 < a < 20$ である. $Q = \frac{5}{4}M$ であるとき, $a =$, $M =$ である.
- [3] $P = 5x^2 + 12y^2 + 12xy + 8x + 10$, $A = x + 2$, $B = x + 2y$ とする. P を A, B を用いて表すと $P = 2A^2 + 3B^2 +$ である. x, y が実数全体を動くとき P の最小値は $(x, y) =$ のときにとる. x, y のとる値は整数とする. このとき $P = 14$ を満たす x, y の値は , である.
- [4] $\triangle ABC$ において, $AB = 3$, $AC = 5$ とする. $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし, $\triangle ABD$ の面積を S_1 , $\triangle ADC$ の面積を S_2 とする. このとき, $\frac{S_2}{S_1} =$ である. $\angle B = 90^\circ$ であるとき, $S_1 =$ であり, $AD =$, $\cos \angle BAD =$ である.

解答例

[1] (1) $(x+2y)(x-2y)(x^2+y^2) = (x^2-4y^2)(x^2+y^2) = x^4-3x^2y^2-4y^4$

(答) ア. -4 イ. -3

(2) 2次方程式 $x^2 - mx + m = 0$ が重解をもつから、係数について

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m-4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = 0, 4$$

このとき、重解は $x = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2}$

0でない重解をもつから、 $m \neq 0$ により

$$m = 4, \quad \text{重解は} \quad \frac{m}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

(答) ウ. 4 エ. 2

(3) $f(x) = x^2 + 2ax - 2$ とおくと $f(x) = (x+a)^2 - a^2 - 2$

$$f(-a) = -a^2 - 2, \quad f(-2) = -4a + 2, \quad f(2) = 4a + 2$$

$-2 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とする.

(i) $-a \leq -2$, すなわち, $a \geq 2$ のとき

$M = f(2)$, $m = f(-2)$ より, $f(2) - f(-2) = 9$ であるから

$$(4a+2) - (-4a+2) = 9 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{9}{8}$$

これは, $a \geq 2$ に反するから不適.

(ii) $-2 \leq -a \leq 0$, すなわち, $0 \leq a \leq 2$ のとき

$M = f(2)$, $m = f(-a)$ より, $f(2) - f(-a) = 9$ であるから

$$(4a+2) - (-a^2-2) = 9 \quad \text{ゆえに} \quad (a+5)(a-1) = 0$$

$0 \leq a \leq 2$ に注意して $a = 1$ このとき $M = 4 \cdot 1 + 2 = 6$

(答) オ. 1 カ. 6

(4) $b = \sqrt{2}$, $C = 60^\circ$, $R = 1$

正弦定理により $\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 1$ ゆえに $c = \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B} = 2 \cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$b < c$ より, $B < C$ であるから $B = 45^\circ$

($C = 60^\circ$ より, $B < 120^\circ$ であるから)

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B = \sqrt{2} \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

(答) キ. $\sqrt{3}$ ク. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

第1余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A$$

なお, 余弦定理とは, 第2余弦定理のことである.

(5) 平均値は $\frac{3+5+4+1+7}{4} = 4$

したがって, 標準偏差 s は

$$s^2 = \frac{1}{5} \{ (3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (1-4)^2 + (7-4)^2 \} = 4$$

よって $s = 2$

(答) ケ. 4 コ. 2

[2] (1) $A, B, A \cap B$ より $a = 1$

$3 \notin B, 3 \in A \cup B$ より, $3 \in A$ であるから $b = 3$

(答) サ. 1 シ. 3

(2) 不等式 $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ において, $x^2 = |x|^2$ であるから

$$|x|^2 - 2|x| - 3 \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (|x| + 1)(|x| - 3) \leq 0$$

$|x| + 1 > 0$ であるから $|x| - 3 \leq 0$ ゆえに $|x| \leq 3$

これを解いて $-3 \leq x \leq 3$

(答) ス. -3 セ. 3

- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ は点 $(1, 1)$ を通るから

$$1 = 1^2 + a \cdot 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = -a \quad \cdots \textcircled{1}$$

放物線 $y = x^2 + ax + b$ は x 軸に接するから $a^2 - 4b = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

① を ② に代入すると

$$a^2 + 4a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a + 4) = 0$$

$a \neq 0$ に注意して $a = -4$ ① より $b = 4$

(答) ソ. -4 タ. 4

- (4) $a = 13$, $b = 8$, $c = 7$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad A = 120^\circ$$

外接円の半径を R とすると, 正弦定理により $2R = \frac{a}{\sin A}$

$$\text{ゆえに} \quad R = \frac{a}{2R \sin A} = \frac{13}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

(答) チ. 45 ツ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

- (5) 4個のデータ $4, 6, a, 20$ について ($6 < a < 20$)

$$M = \text{中央値} = \frac{a + 6}{2}$$

$$\text{第1四分位数} = \frac{4 + 6}{2} = 5, \quad \text{第3四分位数} = \frac{a + 20}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad Q = \text{四分位範囲} = \frac{a + 20}{2} - 5 = \frac{a + 10}{2}$$

$$Q = \frac{5}{4}M \text{ より } \frac{a + 10}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{a + 6}{2}$$

したがって $4(a + 10) = 5(a + 6)$ これを解いて $a = 10$

$$\text{よって} \quad M = \frac{10 + 6}{2} = 8$$

(答) テ. 10 ト. 8

[3] $P = 5x^2 + 12y^2 + 12xy + 8x + 10$, $A = x + 2$, $B = x + 2y$ より

$$\begin{aligned} P - 2A^2 - 3B^2 &= 5x^2 + 12y^2 + 12xy + 8x + 10 - 2(x + 2)^2 - 3(x + 2y)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

したがって $P = 2A^2 + 3B^2 + 2$

P が最小となるとき, $A = B = 0$ であるから

$$x + 2 = x + 2y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2, y = 1$$

x, y が整数のとき, A, B は整数であるから, $P = 14$ のとき

$$2A^2 + 3B^2 = 12 \quad \text{ゆえに} \quad A = 0, B = \pm 2$$

したがって $x + 2 = 0, x + 2y = \pm 2$ ゆえに $x = -2, y = 1 \pm 1$

よって $(x, y) = (-2, 2), (-2, 0)$

(答) ナ. 2 ニ. $(-2, 1)$ ヌ. ネ. $(-2, 2), (-2, 0)$

[4] 線分 AD は, $\angle A$ の二等分線であるから

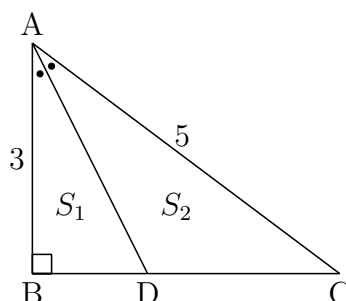
$$BD : DC = AB : AC = 3 : 5 \quad \text{よって} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{DC}{BD} = \frac{5}{3}$$

右の図から

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$BD = BC \times \frac{3}{3+5} = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2},$$

$$S_1 = \frac{1}{2}BD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$$



$$\text{よって} \quad AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \angle BAD = \frac{AB}{AD} = 3 \div \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(答) ノ. $\frac{5}{3}$ ハ. $\frac{9}{4}$ ヒ. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ フ. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

1.17 令和2年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $4a^2 + 4ab + b^2 - 4c^2$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) 1 以上 2020 以下の自然数の中に, 12 の倍数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個, 「4 または 6」の倍数は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある.
- (3) 関数 $f(x) = |x-1| - |x+2|$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 5$ のとき, $\sin \angle A = \boxed{\text{キ}}$ であり, この三角形に内接する円の直径は $\boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) データ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の四分位範囲は $\boxed{\text{ケ}}$, 分散は $\boxed{\text{コ}}$ である.

- [2] (1) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする. $\sin \theta = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ のとき, $\cos^2 \theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{15}$ であり, $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{15}}$ である. ただし, $\boxed{\text{シ}}$ は $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (a, b は実数) の形で表せ.
- (2) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ について, y 軸との交点の y 座標が -2 で, x 軸との2つの交点の x 座標の差が 4 のとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である. ただし, $a > 0$ とする.
- (3) 2 次関数 $y = -x^2 + ax + b$ の最大値は 7 であり, $x \leq 0$ における最大値は 3 である. このとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ソ}}$, $b = \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$ とする. 辺 BC 上に点 D を $\angle ADC = 45^\circ$ となるようにとる. このとき $BD = \boxed{\text{チ}}$ である, 点 D から辺 AB に垂線 DE を下ろすとき, $DE = \boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) 右の表は 5 人の生徒が短距離と長距離の 2 つの距離で競争したときの順位のデータである. 2 つの順位の和が最も小さい生徒は $\boxed{\text{テ}}$ である. また, 2 つの順位の相関係数は $\boxed{\text{ト}}$ となる.

生徒	A	B	C	D	E
短距離	1	2	3	4	5
長距離	3	1	4	2	5

- [3] 実数 a, b に対して $f(x) = x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - ax + 1$, $h(x) = bx^2 - 2x$ とおく. まず, すべての実数 x に対して $g(x) \leq f(x)$ となる a の値は $\boxed{\text{ナ}}$ であり, $0 \leq x \leq 1$ をみたす実数 x に対して $g(x) \leq f(x)$ となる a の値の範囲は $a \geq \boxed{\text{ニ}}$ である. 次に, すべての実数 x に対して $h(x) \leq f(x)$ となる b の範囲は $b \leq \boxed{\text{ヌ}}$ である. また, 関数 $h(x)$ の最大値が存在して, その最大値が関数 $f(x)$ の最小値以下となる b の範囲は $b \leq \boxed{\text{ネ}}$ である.

- [4] 1辺の長さが2の正四面体 ABCD の辺 BC 上に点 E をとる．まず，AE の長さが最小となるように点 E をとる．このとき， $AE = \boxed{\text{ノ}}$ ， $\cos \angle AED = \boxed{\text{ハ}}$ である．次に， $\cos \angle AED = \frac{2}{5}$ となるように点 E をとる．このとき， $AE = \boxed{\text{ヒ}}$ であり， $\triangle AED$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ となる．

解答例

$$[1] \quad (1) \quad 4a^2 + 4ab + b^2 - 4c^2 = (2a + b)^2 - (2c)^2 \\ = (2a + b + 2c)(2a + b - 2c)$$

(答) ア. イ. $2a + b + 2c$, $2a + b - 2c$

- (2) 1以上2020以下の自然数の集合を U とし, U の部分集合で,4の倍数の集合を A ,6の倍数の集合を B とすると,12の倍数の集合は $A \cap B$,4または6の倍数の集合は $A \cup B$ である. 集合 X の要素の個数を $n(X)$ とおくと

$$n(A) = 505, \quad n(B) = 336, \quad n(A \cap B) = 168$$

$$\text{ゆえに} \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 505 + 336 - 168 = 673$$

(答) ウ. 168 エ. 673

$$(3) \quad |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & (x \leq 1) \\ x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}, \quad |x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & (x \leq -2) \\ x + 2 & (x \geq -2) \end{cases}$$

(i) $x \leq -2$ のとき

$$f(x) = |x - 1| - |x + 2| \\ = (-x + 1) - (-x - 2) = 3$$

(ii) $-2 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = |x - 1| - |x + 2| \\ = (-x + 1) - (x + 2) = -2x - 1$$

(iii) $1 \leq x$ のとき

$$f(x) = |x - 1| - |x + 2| \\ = (x - 1) - (x + 2) = -3$$

(i)~(iii)より, $f(x)$ の最大値は**3**,最小値は**-3**

(答) オ. 3 カ. -3

(4) $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{したがって} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15}{4}\sqrt{7}$$

三角形 ABC の内接円の半径を r , $2s = a + b + c$ とすると $s = \frac{15}{2}$

$$S = rs \text{ であるから } \frac{15}{4}\sqrt{7} = r \cdot \frac{15}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 2r = \sqrt{7}$$

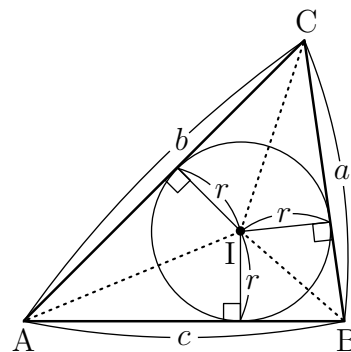
$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{3\sqrt{7}}{8} \quad \text{ク. } \sqrt{7}$$

解説 三角形 ABC の内接円の中心を I , 内接円の半径を r , $2s = a + b + c$ とする. このとき, $\triangle IBC$, $\triangle ICA$, $\triangle IAB$ の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar, \quad \frac{1}{2}br, \quad \frac{1}{2}cr$$

であり, 三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a + b + c) = rs \end{aligned}$$



別解 $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$

$$2s = a + b + c \text{ とおくと } s = \frac{15}{2}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は, ヘロンの公式により

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 6 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 4 \right)} = \frac{15}{4}\sqrt{7} \end{aligned}$$

(5) 7個のデータ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7について

第1四分位数 2, 第3四分位数 6, 四分位範囲は $6 - 2 = 4$

平均値 $= \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$ より, 分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{7}\{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2\} = 4$$

(答) ケ. 4 コ. 4

[2] (1) $\sin \theta = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ より

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{15}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より, $\cos \theta \geq 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{15}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

(答) サ. $8+4\sqrt{2}$ シ. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(2) $y = x^2 + ax + b$ のグラフと y 軸との交点 $(0, -2)$ を通るから $b = -2$

$y = x^2 + ax - 2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$

これらの x 座標の差が 4 であるから

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 8}}{2} - \frac{-a - \sqrt{a^2 + 8}}{2} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{a^2 + 8} = 4$$

したがって $a^2 + 8 = 16$ $a > 0$ に注意して $a = 2\sqrt{2}$

(答) ス. $2\sqrt{2}$ セ. -2

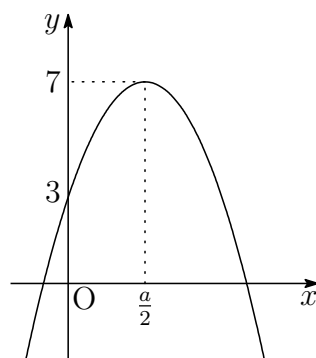
$$(3) \quad y = -x^2 + ax + b$$

$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b$$

最大値7をとるから $\frac{a^2}{4} + b = 7 \quad \cdots \textcircled{1}$

$x \leq 0$ における最大値が3であるから

$$\frac{a}{2} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a > 0$$



$x = 0$ で $y = 3$ であるから $b = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$

②を①に代入すると $\frac{a^2}{4} + 3 = 7$ ゆえに $a^2 = 16$

$a > 0$ であることに注意して $a = 4$

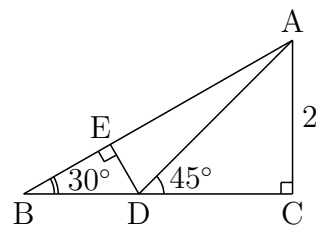
(答) ソ. 4 タ. 3

(4) 右の図から $DC = AC = 2$

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{BC} \quad \text{ゆえに} \quad BC = 2\sqrt{3}$$

したがって $BD = BC - DC = 2\sqrt{3} - 2$

$$\text{また} \quad DE = BD \sin 30^\circ = (2\sqrt{3} - 2) \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1$$



(答) チ. $2\sqrt{3} - 2$ ツ. $\sqrt{3} - 1$

(5) 短距離, 長距離の順位のデータをそれぞれ x, y とし, これらの分散 s_x^2, s_y^2 , 共分散 s_{xy} について

$$s_x^2 = s_y^2 = \frac{1}{5} \{ (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 \} = 2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5} \{ (1-3)(3-3) + (2-3)(1-3) + (3-3)(4-3) \\ + (4-3)(2-3) + (5-3)(5-3) \} = 1$$

$s_x = s_y = \sqrt{2}$, $s_{xy} = 1$ より, 相関係数 r は

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0.5$$

(答) テ. B ト. 0.5

[3] $f(x) = x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - ax + 1$, $h(x) = bx^2 - 2x$

$$f(x) - g(x) = (x^2 - x + 2) - (x^2 - ax + 1) = (a - 1)x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) - h(x) = (x^2 - x + 2) - (bx^2 - 2x) = (1 - b)x^2 + x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

すべての実数 x に対して, $g(x) \leq f(x)$, すなわち, $f(x) - g(x) \geq 0$ のとき

① より $a - 1 = 0$ ゆえに $a = 1$

$0 \leq x \leq 1$ に対して, $g(x) \leq f(x)$, すなわち, $f(x) - g(x) \geq 0$ のとき

$$(a - 1) \cdot 0 + 1 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad (a - 1) \cdot 1 + 1 \geq 0 \quad \text{よって} \quad a \geq 0$$

すべての実数 x に対して, $h(x) \leq f(x)$, すなわち, $f(x) - h(x) \geq 0$ のとき,
② より

$$1 - b > 0 \quad \text{かつ} \quad 1^2 - 4(1 - b) \cdot 2 \leq 0 \quad \text{よって} \quad b \leq \frac{7}{8}$$

関数 $h(x)$ の最大値が存在するから $b < 0$

$$h(x) = bx^2 - 2x = b \left(x^2 - \frac{2}{b}x \right) = b \left(x - \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{1}{b}$$

$$f(x) = x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}$$

$h(x)$ の最大値 $-\frac{1}{b}$ が $f(x)$ の最小値 $\frac{7}{4}$ 以下であるから

$$-\frac{1}{b} \leq \frac{7}{4} \quad \text{両辺に } b < 0 \text{ を掛けると} \quad -1 \geq \frac{7}{4}b \quad \text{よって} \quad b \leq -\frac{4}{7}$$

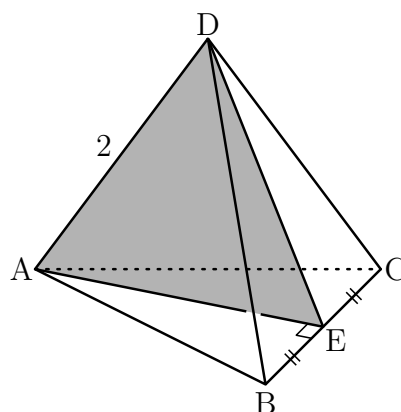
(答) ナ. 1 ニ. 0 ヌ. $\frac{7}{8}$ ネ. $-\frac{4}{7}$

[4] 右の図の直角三角形 ABE に着目すると,

$$AB = 2, \angle B = 60^\circ \text{ より } \mathbf{AE = \sqrt{3}}$$

$\triangle AED$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos \angle AED &= \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2AE \cdot DE} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$AE = DE = x$ とおき, $\cos \angle AED = \frac{2}{5}$ を $\triangle AED$ に余弦定理を適用すると

$$\frac{2}{5} = \frac{x^2 + x^2 - 2^2}{2x^2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

また, $\sin \angle AED = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ より, $\triangle AED$ の面積は

$$\frac{1}{2}x^2 \sin \angle AED = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

(答) ノ. $\sqrt{3}$ ハ. $\frac{1}{3}$ ヒ. $\frac{\sqrt{30}}{3}$ フ. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

1.18 令和2年度一般試験(90分)

- [1] (1) a を実数とする. 3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + 7x + a = 0$ の 1 つの解が $x = 2$ であるとき, 他の解は $x =$, である.
- (2) 原点を通り, 直線 $x + 2y = 4$ に垂直な直線の方程式は $y =$ である. 直線 $x + 2y = 4$ に関して, 原点と対称な点の座標は である.
- (3) 関数 $\sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) は, $x =$ のとき最大値 をとる.
- (4) 相加平均と相乗平均の大小関係より, $\frac{2^x}{8} + 2^{1-x}$ は $x =$ のとき最小値 をとる.
- (5) 曲線 $y = x^2 + 2x + 1$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の方程式は $y =$ である. さらに, この直線が曲線 $y = -x^2 + 4x + a$ の接線であるとき, $a =$ である.
- [2] (1) 整式 $2x(x+2)(x-1)$ を $(x-2)(x+1)$ で割ったときの余りは $x +$ である.
- (2) 2 点 $(0, 7)$, $(4, 1)$ を通る円の中心が直線 $y = x + 2$ 上にあるとき, 円の中心の座標は であり, 円の半径は である.
- (3) $0^\circ < \theta < 360^\circ$ のとき, $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta > \sqrt{2}$ を満たす θ の範囲は $< \theta <$ $^\circ$ である.
- (4) 次の方程式を満たす正の実数 a, b の値は $a =$, $b =$ である.
- $$2 \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{a}{2} = 1, \quad (\log_2 3)(\log_7 8)(\log_9 b) = \frac{3}{2}$$
- (5) $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 1) dx$ の値を S とすると, $S =$ である.
- $$\int_1^a (3x^2 - 4x + 1) dx = \frac{S}{6}$$
- を満たす定数 a の値は $a =$ である.
- [3] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ における接線と x 軸の交点を A とする. A の座標は である. また, 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を点 B が動くとき, 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C の軌跡は, 点 を中心とする半径 の円となる. C の軌跡と円 $x^2 + y^2 = 1$ が外接するのは, $\theta =$ のときである.

- [4] p を正の定数とする. 関数 $f(x)$ が $f'(x) = 3x^2 - 3p^2$, $f(0) = p^2$ を満たすとき, $f(x) = \boxed{\text{ノ}}$ である. $f(x)$ の極大値が 20 であるとき, $p = \boxed{\text{ハ}}$ である. このとき, 区間 $1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ヒ}}$, 最大値は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $x = 2$ は3次方程式 $x^3 - 4x^2 + 7x + a = 0$ の解であるから

$$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -6$$

3次方程式 $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$ は $(x - 2)(x^2 - 2x + 3) = 0$

求める他の解は、方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ を解いて $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

(答) ア. イ. $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$

(2) 原点を通り、直線 $x + 2y = 4$ ($y = -\frac{1}{2}x + 2$) に垂直な直線は $y = 2x$

直線 $x + 2y = 4$ と直線 $y = 2x$ の交点を M とすると $M\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

直線 $x + 2y = 4$ に関して原点 O と対称な点を P(a , b) とすると、M は線分 OP の中点であるから

$$\frac{0+a}{2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{0+b}{2} = \frac{8}{5} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{8}{5}, \quad b = \frac{16}{5}$$

よって、直線 $x + 2y = 4$ に関して、原点と対称な点は $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

(答) ウ. $2x$ エ. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

(3) $t = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とすると $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1 &= (1 - \cos^2 x) + \sqrt{3}x + 1 \\ &= -t^2 + \sqrt{3}t + 2 = -\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, すなわち, $x = \frac{\pi}{6}$ のとき, 最大値 $\frac{11}{4}$ をとる.

(答) オ. $\frac{\pi}{6}$ カ. $\frac{11}{4}$

(4) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2^x}{8} + 2^{1-x} = 2^{x-3} + 2^{1-x} \geq 2\sqrt{2^{x-3} \cdot 2^{1-x}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } 1$$

上式で等号が成立するとき

$$2^{x-3} = 2^{1-x} \quad \text{すなわち} \quad x = 2$$

(答) キ. 2 ク. 1

- (5) $y = x^2 + 2x + 1$ より $y' = 2x + 2$ $x = 0$ のとき $y' = 2$
 求める接線は、点 $(0, 1)$ を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y - 1 = 2(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x + 1$$

この直線と曲線 $y = -x^2 + 4x + a$ から y を消去すると

$$2x + 1 = -x^2 + 4x + a \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 2x + 1 - a = 0$$

このとき、上の第 2 式の判別式を D とすると

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \cdot (1 - a) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0$$

(答) ケ. $2x + 1$ コ. 0

- [2] (1) $2x(x+2)(x-1) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$, $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$
 したがって、上の第 1 式を第 2 式で割った余りは

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 2 \overline{) 2x^3 + 2x^2 - 4x} \\ \underline{2x^3 - 2x^2 - 4x} \\ 4x^2 \\ \underline{4x^2 - 4x - 8} \\ 4x + 8 \end{array}$$

(答) サ. 4 シ. 8

- (2) 2 点 $A(0, 7)$, $B(4, 1)$ とし、直線 $y = x + 2$ 上の中心 C を $(a, a + 2)$ とおく.
 $AC^2 = BC^2$ であるから

$$a^2 + \{(a+2) - 7\}^2 = (a-4)^2 + \{(a+2) - 1\}^2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

したがって、 $C(2, 4)$. 半径は $AC = \sqrt{2^2 + (4-7)^2} = \sqrt{13}$

(答) ス. $(2, 4)$ セ. $\sqrt{13}$

- (3) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$ より、不等式 $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta > \sqrt{2}$ は

$$2 \sin(\theta + 30^\circ) > \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin(\theta + 30^\circ) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ より、 $30^\circ < \theta + 30^\circ < 390^\circ$ であるから

$$45^\circ < \theta + 30^\circ < 135^\circ \quad \text{よって} \quad 15^\circ < \theta < 105^\circ$$

(答) ソ. 15 タ. 105

$$(4) \quad 2\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{a}{2} = 1 \text{ より } \log_2 \frac{2a}{9} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2a}{9} = 2 \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = 9}$$

$$(\log_2 3)(\log_7 8)(\log_9 b) = \frac{3}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\log_7 3}{\log_7 2} \cdot \frac{\log_7 8}{\log_7 7} \cdot \frac{\log_7 b}{\log_7 9} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\log_7 3}{\log_7 2} \cdot \frac{3\log_7 2}{1} \cdot \frac{\log_7 b}{2\log_7 3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{整理すると } \log_7 b = 1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{b = 7}$$

別解 積における真数の交換法則 $\log_a M \log_b N = \log_a N \log_b M$ を適用すると

$$\begin{aligned} \log_2 3 \log_7 8 \log_9 b &= \log_2 8 \log_7 3 \log_9 b = 3 \log_7 3 \log_9 b \\ &= 3 \log_7 b \log_9 3 = \frac{3}{2} \log_7 b \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \frac{3}{2} \log_7 b = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{b = 7}$$

(答) チ. 9 ツ. 7

$$(5) \quad S = \int_1^3 (3x^2 - 4x + 1) dx = \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_1^3 = \mathbf{12}$$

$$\int_1^a (3x^2 - 4x + 1) dx = \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_1^a = a^3 - 2a^2 + a$$

$$\text{上式が} \frac{S}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ であるから}$$

$$a^3 - 2a^2 + a = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)(a^2+1) = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = 2}$$

(答) テ. 12 ト. 2

[3] $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ における接線の方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

この直線と x 軸との共有点 A では, $y = 0$ であるから

$$x \cos \theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1}{\cos \theta}$$

よって, 点 A の座標は $\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$

点 B が $(1, 0)$ にあるとき, AB を $2:1$ に内分する点は $\left(\frac{2}{3 \cos \theta} + \frac{1}{3}, 0\right)$

点 B が $(-1, 0)$ にあるとき, AB を $2:1$ に内分する点は $\left(\frac{2}{3 \cos \theta} - \frac{1}{3}, 0\right)$

C の軌跡は上の 2 点を直径の両端とする円であるから

$$\text{中心} \left(\frac{2}{3 \cos \theta}, 0 \right), \quad \text{半径} \frac{1}{3}$$

C の軌跡と円 $x^2 + y^2 = 1$ が外接するとき, 2 円の中心間の距離が, 2 円の半径の和に等しいから

$$\frac{2}{3 \cos \theta} = 1 + \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

これを $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意して解くと $\theta = \frac{\pi}{3}$

(答) ナ. $\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$ ニ. $\left(\frac{2}{3 \cos \theta}, 0\right)$ ヌ. $\frac{1}{3}$ ネ. $\frac{\pi}{3}$

[4] $f'(x) = 3x^2 - 3p^2$ を $f(0) = p^2$ に注意して積分すると

$$f(x) = x^3 - 3p^2x + p^2$$

$f'(x) = 3(x+p)(x-p)$ であるから ($p > 0$), $f(-p) = 20$ であるから

$$(-p)^3 - 3p^2(-p) + p^2 = 20 \quad \text{ゆえに} \quad (p-2)(2p^2 + 5p + 10) = 0$$

方程式 $2p^2 + 5p + 10 = 0$ の判別式は $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -55 < 0$

p は実数であるから $\mathbf{p = 2}$

$f(x) = x^3 - 12x + 4$ より, $1 \leq x \leq 3$ において

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-7	$\searrow$	-12	$\nearrow$	-5

よって, 最小値 $f(2) = -\mathbf{12}$, 最大値 $f(3) = -\mathbf{5}$

(答) ノ. $x^3 - 3p^2x + p^2$ ハ. 2 ヒ. -12 フ. -5

1.19 平成31年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $\sqrt{2} = 1.4142$, $\sqrt{3} = 1.7321$ とするとき, 分母の有利化を利用して $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ の値を小数で表すと, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\text{ア}}$, $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \boxed{\text{イ}}$ である.
- (2) 方程式 $|2x - 1| = 2 - x$ の解は, $x = \boxed{\text{ウ}}$ と $x = \boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) 放物線 $y = x^2 - 3x + 1$ を x 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{カ}}$ だけ平行移動した放物線は $y = x^2 + 5x + 2$ である.
- (4) $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $BC = 5\sqrt{6}$ の $\triangle ABC$ について, $AB = \boxed{\text{キ}}$, $AC = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) データ $-7, -3, -1, 0, 1, 3, 4, 6, 9, 10$ の中央値は $\boxed{\text{ケ}}$, 四分位範囲は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 2) = x^4 + ax^2 + bx - 4$ ならば, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) 連立1次不等式 $x - 1 \leq \frac{1}{2}x \leq 2x + 1$ の解と2次不等式 $x^2 + ax + b \leq 0$ の解が一致するとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である.
- (3) 関数 $y = x^2 - 2x + a$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が6である. このとき, 定数 a の値は $\boxed{\text{ソ}}$ であり, 関数の最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする. x の2次方程式 $x^2 - 2(\cos \theta)x + \sin^2 \theta = 0$ が重解をもつとき, $\theta = \boxed{\text{チ}}^\circ$ である. また, そのときの重解は $\boxed{\text{ツ}}$ である.
- (5) a, b は実数で, $a > 0$ とする. データ $a + b, 2a + b, 3a + b$ の平均値は7, 分散は6であるとき, $a = \boxed{\text{テ}}$, $b = \boxed{\text{ト}}$ である.
- [3] $U = \{10 \text{ 以下の自然数} \}$ を全体集合とし, U の部分集合 A, B を
- $$A = \{2, 3, n^2 - 3n + 8\}, \quad B = \{1, n + 1, 2n + 2, n^3 + 2\}$$
- とする. ただし, n は自然数である. $A \cap B = \{3, 6\}$ となるのは, $n = \boxed{\text{ナ}}$ のときである. このとき, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, \boxed{\text{ニ}}\}$ であり, A の補集合を $\bar{A}$ と表すと $\bar{A} \cap B = \{\boxed{\text{ヌ}}, \boxed{\text{ネ}}\}$ である.
- [4] $\triangle ABC$ において, $\angle B = 22.5^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$ とする. BC 上に $\angle ADC = 45^\circ$ となるように点 D をとると, $DC = \boxed{\text{ノ}}$, $\angle DAB = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ である. $AD = \boxed{\text{ヒ}}$ であるから, $\tan 22.5^\circ = \boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

$$[1] (1) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4142}{2} = \mathbf{0.7071}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= 1.7321 - 1.4142 = \mathbf{0.3179} \end{aligned}$$

(答) ア. 0.7071 イ. 0.3179

$$(2) |2x - 1| = 2 - x \geq 0 \text{ より } x \leq 2$$

$$(i) 2x - 1 \geq 0, \text{ すなわち, } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{ のとき}$$

$$2x - 1 = 2 - x \quad \text{ゆえに} \quad x = 1$$

$$(ii) 2x - 1 < 0, \text{ すなわち, } x < \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$-(2x - 1) = 2 - x \quad \text{ゆえに} \quad x = -1$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{x = 1, -1}$$

(答) ウ. エ. 1, -1

$$(3) \quad y = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{頂点} \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$y = x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \quad \text{頂点} \left(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$$

求める平行移動は

$$x \text{ 軸方向に } -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \mathbf{-4}, \quad y \text{ 軸方向に } -\frac{17}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \mathbf{-3}$$

(答) オ. -4 カ. -3

$$(4) a = 5\sqrt{6}, \quad A = 60^\circ, \quad C = 45^\circ$$

$$\text{正弦定理により} \quad \frac{5\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$$

$$c = \frac{5\sqrt{6} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{10}$$

第 1 余弦定理により $b = c \cos A + a \cos C$

$$b = 10 \cos 60^\circ + 5\sqrt{6} \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} + 5\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{5(1 + \sqrt{3})}$$

(答) キ. 10 ク. $5(1 + \sqrt{3})$

(5) 中央値は $\frac{1+3}{2} = 2$

第1四分位数 -1 , 第3四分位数 6 より, 四分位範囲は $6 - (-1) = 7$

(答) ケ. 2 コ. 7

[2] (1) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 2) = \{x^2 + (2x - 2)\}\{x^2 - (2x - 2)\}$
 $= x^4 - (2x - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 8x - 4$

$x^4 + ax^2 + bx - 4$ と同じ次数の項の係数を比較して $a = -4$, $b = 8$

(答) サ. -4 シ. 8

(2) $x - 1 \leq \frac{1}{2}x \leq 2x + 1$ より $\begin{cases} x - 1 \leq \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x \leq 2x + 1 \end{cases}$ ゆえに $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

これを解とする2次不等式は, x^2 の係数が 1 であることに注意して

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2) \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \leq 0$$

これが $x^2 + ax + b \leq 0$ と一致するから $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$

(答) ス. $-\frac{4}{3}$ セ. $-\frac{4}{3}$

(3) 関数 $y = x^2 - 2x + a = (x - 1)^2 + a - 1$ ($0 \leq x \leq 3$) より,
 $x = 3$ のとき最大値 6 をとるから

$$a + 3 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad a = 3 \quad \text{すなわち} \quad y = (x - 1)^2 + 2$$

よって, $x = 1$ のとき, 最小値 2 をとる.

(答) ソ. 3 タ. 2

(4) $x^2 - 2(\cos \theta)x + \sin^2 \theta = 0$ が重解をもつから, 係数について

$$(-2 \cos \theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sin^2 \theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ より } \cos \theta = \sin \theta \geq 0$$

上式から, $\theta \neq 90^\circ$ に注意して $\tan \theta = 1$ よって $\theta = 45^\circ$

重解は $x = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(答) チ. 45 ツ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) データ $a + b$, $2a + b$, $3a + b$ の平均値が 7 であるから

$$\frac{(a + b) + (2a + b) + (3a + b)}{3} = 7 \quad \text{ゆえに} \quad 2a + b = 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a + b = (2a + b) - a = 7 - a, \quad 2a + b = 7, \quad 3a + b = (2a + b) + a = 7 + a$$

これに注意して, 分散が 6 であるから

$$\frac{(7 - a - 7)^2 + (7 - 7)^2 + (7 + a - 7)^2}{3} = 6 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 9$$

$$a > 0 \text{ に注意して } a = 3 \quad \text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } b = 1$$

(答) テ. 3 ト. 1

[3] A は 6 を要素 (元) にもつから

$$n^2 - 3n + 8 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad (n - 1)(n - 2) = 0$$

$n = 1$ とすると, 要素 2 は A , B の共通の要素となり, 不適.

$n = 2$ のとき, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 6, 10\}$ より

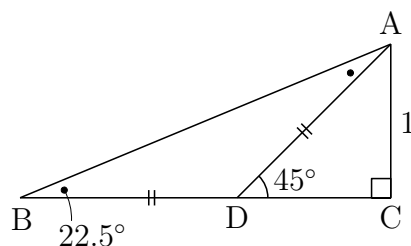
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 10\}, \quad \overline{A} \cap B = \{1, 10\}$$

(答) ナ. 2 ニ. 10 ヌ. 1 ネ. 10

[4] 右の図から

$$DC = 1, \quad \angle DAB = 22.5^\circ,$$

$$AD = BD = \sqrt{2}$$



$$\text{よって} \quad \tan 22.5^\circ = \frac{AC}{BD + DC} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

(答) ノ. 1 ハ. 22.5 ヒ. $\sqrt{2}$ フ. $\sqrt{2} - 1$

1.20 平成31年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})$ の値は である. $\frac{1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}}$ の値は分母を有理化すると である.
- (2) a, b は整数とする. 条件「 a, b がともに偶数である」は「 $a + b$ が偶数である」ための 条件であり, 「 ab が偶数である」は「 a, b がともに偶数である」ための 条件である. 「必要」, 「十分」, 「必要十分」から選んで答えよ.
- (3) 不等式 $|2x + a| \leq b$ の解が $-3 \leq x \leq 2$ であるとき, 定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である.
- (4) $\triangle ABC$ において, $0^\circ \leq \angle A \leq 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$, $\triangle ABC$ の面積が $6\sqrt{3}$ であるとき, $\angle A =$ °, $BC =$ である.
- (5) 4個のデータ $4, a, b, 24$ が大きさの順に並んでいる. 中央値が 14 , 四分位範囲が 12 であるとき, $a =$, $b =$ である.
- [2] (1) 放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線は 2 点 $(-2, -2)$, $(-1, -1)$ を通る. このとき, 定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である.
- (2) 2次関数 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ において $f(a+3) - f(a) = 3$ が成り立つとき, $a =$ である. このとき, 関数 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq a+3$) の最大値と最小値の差は である.
- (3) a を正の定数とする. 2次方程式 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解を持つとき, a の範囲は, $< a <$ である.
- (4) $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$ である直角三角形 ABC の外接円の半径は , 内接円の半径は である.
- (5) a を正の実数とし, データ $a, 2a, 3a, 4a, 5a$ を考える. 平均値が 5 となるのは $a =$ のときである. また, 分散が 1 となるのは $a =$ のときである.
- [3] 2直線 $y = -x + 1$ と $y = \frac{x}{2} - 1$ の交点の x 座標は であり, この値を a とおく. $-1 \leq x \leq a$ に対して2直線上の点 $A(x, -x + 1)$, $B\left(x, \frac{x}{2} - 1\right)$ をとり, 定点 $C(-1, 0)$ を加えて $\triangle ABC$ を考える. $\triangle ABC$ の面積 S は, x の2次式 で表すことができるので, $x =$ のとき最大値 をとる.

- [4] 四角形 ABCD において, $AB = 8$, $BC = 4$, $CD = 4$, $AD = 6$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$ であるとき, $\cos \angle B = \boxed{\text{ノ}}$, $\cos \angle D = \boxed{\text{ハ}}$, $AC = \boxed{\text{ヒ}}$ である. また, 四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

$$[1] (1) \quad (1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}) = (1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 2\sqrt{5}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}} &= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}}{(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5} - \sqrt{30}}{10} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{ ア. } 2\sqrt{5} \quad \text{イ. } \frac{5 + \sqrt{5} - \sqrt{30}}{10}$$

- (2) 「 a, b がともに偶数である」は「 $a + b$ が偶数である」ための十分条件.
「 ab が偶数である」は「 a, b がともに偶数である」ための必要条件.

(答) ウ. 十分 エ. 必要

- (3) $|2x + a| \leq b$ より

$$-b \leq 2x + a \leq b \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{b+a}{2} \leq x \leq \frac{b-a}{2}$$

これが $-3 \leq x \leq 2$ であるから

$$-\frac{b+a}{2} = -3, \quad \frac{b-a}{2} = 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1, b = 5$$

(答) オ. 1 カ. 5

- (4) $b = 6, c = 4, 0^\circ \leq A \leq 90^\circ, S = 6\sqrt{3}$ を $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ に代入すると

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \sin A = 6\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad A = 60^\circ$$

余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 60^\circ = 28$$

$a > 0$ であるから $BC = a = 2\sqrt{7}$

(答) キ. 60 ク. $2\sqrt{7}$

(5) 4 個のデータ 4, a , b , 24 について,

第 1 四分位数 $\frac{4+a}{2}$, 中央値 $\frac{a+b}{2}$, 第 3 四分位数 $\frac{b+24}{2}$

四分位範囲は $\frac{b+24}{2} - \frac{4+a}{2} = \frac{b-a}{2} + 10$

条件から $\frac{a+b}{2} = 14$, $\frac{b-a}{2} + 10 = 12$ よって $a = 12$, $b = 16$

(答) ケ. 12 コ. 16

[2] (1) 与えられた 2 点を x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動した点は

$(0, -5)$, $(1, -4)$

$y = -x^2 + ax + b$ はこの 2 点を通るから

$b = -5$, $-1 + a + b = -4$ ゆえに $a = 2$

(答) サ. 2 シ. -5

(2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $f(a+3) - f(a) = 3$ より

$(a+3)^2 + 4(a+3) + 3 - (a^2 + 4a + 3) = 3$ ゆえに $a = -3$

ゆえに $f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ ($-3 \leq x \leq 0$)

最大値 $f(0) = 3$, 最小値 $f(-2) = -1$ よって $f(0) - f(-2) = 4$

(答) ス. -3 セ. 4

(3) $f(x) = x^2 - 2ax + 4$ とおくと $f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 4$

このとき, $a > 1$, $f(1) > 0$, $f(a) < 0$ であるから

$f(1) = 1 - 2a + 4 > 0$, $f(a) = -a^2 + 4 < 0$

上の第 1 式から $a < \frac{5}{2}$, 第 2 式から $a < -2$, $2 < a$

$a > 1$ および上の 2 式から $2 < a < \frac{5}{2}$

(答) ソ. 2 タ. $\frac{5}{2}$

(4) $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$ より, $AB^2 + CA^2 = BC^2$ であるから, BC

は $\triangle ABC$ の外接円の直径であるから, その半径は $\frac{13}{2}$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると

$\frac{1}{2}r(AB + BC + CA) = \triangle ABC$ ゆえに $\frac{1}{2}r(5 + 13 + 12) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12$

これを解いて $r = 2$

(答) チ. $\frac{13}{2}$ ツ. 2

(5) データ $a, 2a, 3a, 4a, 5a$ の平均値 $3a$ が 5 であるとき $a = \frac{5}{3}$

データ $a, 2a, 3a, 4a, 5a$ の分散は

$$\frac{(a-3a)^2 + (2a-3a)^2 + (3a-3a)^2 + (4a-3a)^2 + (5a-3a)^2}{5} = 2a^2$$

これが 1 であるとき $2a^2 = 1$ よって $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(答) テ. $\frac{5}{3}$ ト. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[3] $y = -x + 1$ と $y = \frac{x}{2} - 1$ から y を消去すると

$$-x + 1 = \frac{x}{2} - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{4}{3}$$

$-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ に対して, 3 点 $A(x, -x + 1)$, $B\left(x, \frac{x}{2} - 1\right)$, $C(-1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \{x - (-1)\} \left\{ (-x + 1) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (x + 1) \left(-\frac{3}{2}x + 2 \right) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1 \\ &= -\frac{3}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3}x \right) + 1 = -\frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{49}{48} \end{aligned}$$

よって, $x = \frac{1}{6}$ のとき, 最大値 $\frac{49}{48}$ をとる.

(答) ナ. $\frac{4}{3}$ ニ. $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$ ヌ. $\frac{1}{6}$ ネ. $\frac{49}{48}$

[4] $\triangle ABC$ および $\triangle ADC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\ &= 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos B = 80 - 64 \cos B, \\ AC^2 &= CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cos(180^\circ - B) \\ &= 4^2 + 6^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos B = 52 + 48 \cos B \end{aligned}$$

上の 2 式から $\cos B = \frac{1}{4}$, $\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\frac{1}{4}$, $AC = 8$

また $\sin B = \sin D = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

よって、四角形 ABCD の面積は

$$\triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2}(8 \cdot 4 + 4 \cdot 6) \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 7\sqrt{15}$$

(答) ノ. $\frac{1}{4}$ ハ. $-\frac{1}{4}$ ヒ. 8 フ. $7\sqrt{15}$

1.21 平成31年度一般試験(90分)

- [1] (1) 3次方程式 $(x+1)(x^2-2x+a+1)=0$ が重解をもつのは $a = \boxed{\text{ア}}$ または $a = \boxed{\text{イ}}$ のときである.
- (2) 3点 $O(0, 0)$, $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$ を頂点とする $\triangle OAB$ において, 点 O と直線 AB の距離は $\boxed{\text{ウ}}$ であり, $\triangle OAB$ の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である.
- (3) $0 < \theta < \pi$ のとき, 不等式 $3\sin\theta - 2\cos^2\theta > 0$ の解は $\boxed{\text{オ}} < \theta < \boxed{\text{カ}}$ である.
- (4) $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ とおく. a, b を用いて表すとき, $\log_5 24 = \boxed{\text{キ}}$, $\log_4 \sqrt{3} = \boxed{\text{ク}}$ である.
- (5) 曲線 $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ 上の点 $(-1, 0)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{ケ}}$ である. この接線と曲線の接点以外の交点の x 座標は $\boxed{\text{コ}}$ である.
- [2] (1) a を正の実数とする. $(ax+3)^5$ の展開式で x^2 の係数が 1080 であるとき, $a = \boxed{\text{サ}}$ である. このとき x^3 の係数は $\boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) 2つの円 $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$ と $x^2 + 2x + y^2 - 2ay = 1 - a^2$ が異なる2点で交わるのは, $\boxed{\text{ス}} < a < \boxed{\text{セ}}$ のときである.
- (3) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < 0\right)$ のとき $\sin(\alpha + \beta) = \boxed{\text{ソ}}$, $\cos(\alpha - \beta) = \boxed{\text{タ}}$ である.
- (4) 関数 $y = 2^{2x+1} - 2^{x+2} + 6$ ($-1 \leq x \leq 1$) は, $x = \boxed{\text{チ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ツ}}$ をとる.
- (5) $x \geq 0$ のとき, 関数 $f(x) = \int_0^x t(1-t) dt$ は, $x = \boxed{\text{テ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ト}}$ をとる.
- [3] $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $t = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ とおくと, t の範囲は $\boxed{\text{ナ}} \leq t \leq \boxed{\text{ニ}}$ である. $y = \sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta - 4\cos\theta - 2$ を t の式で表すと $y = \boxed{\text{ヌ}}$ であり, y の最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ である.
- [4] 放物線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(-1, 0)$ を通る直線 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{ノ}}$ である. また, 放物線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(a, a^2 + a)$ を通る接線の傾きが 5 となるのは $a = \boxed{\text{ハ}}$ のときである. このとき, 2本の接線の交点の x 座標は $\boxed{\text{ヒ}}$ であり, 2本の接線と放物線で囲まれる領域の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である.

解答例

[1] (1) $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ が重解をもつとき、係数について

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1(a + 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 0$$

$x^2 - 2x + a + 1 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき

$$(-1)^2 - 2(-1) + a + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -4$$

(答) ア. イ. 0, -4

(2) 2 点 A(-2, 3), B(1, 2) を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{2 - 3}{1 + 2}(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad x + 3y - 7 = 0$$

原点 O とこの直線の距離は $\frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$

AB = $\sqrt{(1 + 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{10}$ より、求める面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7}{2}$$

(答) ウ. $\frac{7}{\sqrt{10}}$ エ. $\frac{7}{2}$

(3) $3 \sin \theta - 2 \cos^2 \theta > 0$ より

$$3 \sin \theta - 2(1 - \sin^2 \theta) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

$0 < \theta < \pi$ より, $0 < \sin \theta < 1$ に注意して $\sin \theta > \frac{1}{2}$ よって $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

(答) オ. $\frac{\pi}{6}$ カ. $\frac{5}{6}\pi$

(4) $\log_5 24 = \log_5 2^3 \cdot 3 = 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$

$$\log_4 \sqrt{3} = \frac{\log_5 3^{\frac{1}{2}}}{\log_5 2^2} = \frac{\log_5 3}{4 \log_5 2} = \frac{b}{4a}$$

(答) キ. $3a + b$ ク. $\frac{b}{4a}$

(5) $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ より $y' = 3x^2 - 4x - 3$

$x = -1$ のとき, $y' = 4$ であるから, 曲線上の点 $(-1, 0)$ における接線の方程式は

$$y = 4(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 4x + 4$$

曲線と上の接線の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 4x + 4 \quad (x + 1)^2(x - 4) = 0$$

よって, 求める交点の x 座標は $x = 4$

(答) ケ. $4x + 4$ コ. 4

[2] (1) $(ax + 3)^5$ の x^2 の係数は ${}_5C_2 a^2 \cdot 3^3 = 270a^3$

これが 1080 であるから, $a > 0$ に注意して

$$270a^2 = 1080 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 4 \quad \text{よって} \quad a = 2$$

$$(2x + 3)^3 \text{ の } x^3 \text{ の係数は} \quad {}_5C_3 2^3 \cdot 3^2 = 720$$

(答) サ. 2 シ. 720

(2) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$ より

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{中心 } (1, 1), \text{ 半径 } \sqrt{2}$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 2ay = 1 - a^2 \text{ より}$$

$$(x + 1)^2 + (y - a)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{中心 } (-1, a), \text{ 半径 } \sqrt{2}$$

$$2 \text{ 円の中心間の距離は } \sqrt{4 + (a - 1)^2}$$

2 円が異なる 2 点で交わるとき

$$\sqrt{4 + (a - 1)^2} < \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad |a - 1| < 2$$

これを解いて $-1 < a < 3$

(答) ス. -1 セ. 3

$$(3) \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \text{ より } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{3} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < 0\right) \text{ より } \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

加法定理により

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3 - 8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4 - 6\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{ ヲ. } \frac{3 - 8\sqrt{2}}{15} \quad \text{タ. } \frac{4 - 6\sqrt{2}}{15}$$

(4) 関数 $y = 2^{2x+1} - 2^{x+2} + 6$ ($-1 \leq x \leq 1$) について, $t = 2^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= 2t^2 - 4t + 6 \quad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 2\right) \\ &= 2(t-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$t = 2$, すなわち, $x = 1$ のとき, 最大値 **6**

(答) チ. 1 ツ. 6

$$(5) f(x) = \int_0^x t(1-t) dt \text{ より } (x \geq 0) \quad f'(x) = x(1-x)$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	最大	↘

$$\text{最大値 } f(1) = \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{6}$$

(答) テ. 1 ト. $\frac{1}{6}$

[3] $t = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より

$$t = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)^2 = 3\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= -\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta + 2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 2 - t^2$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad y &= (\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta) + 4(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) - 2 \\ &= (2 - t^2) + 4t - 2 = -t^2 + 4t \end{aligned}$$

$y = -(t-2)^2 + 4$ ($-1 \leq t \leq 2$) であるから, $t = -1$ のとき, 最小値 -5

(答) ナ. -1 二. 2 ヌ. $-t^2 + 4t$ ネ. -5

[4] $y = x^2 + x$ を微分すると $y' = 2x + 1$

$$x = -1 \text{ のとき } y' = -1$$

放物線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(-1, 0)$ における接線の方程式は

$$y = -(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x - 1$$

$$x = a \text{ のとき, } y' = 2a + 1$$

$$\text{これが5であるから} \quad 2a + 1 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

$$2 \text{ 直線の交点の } x \text{ 座標は } \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

求める面積は, x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{12} (2 - (-1))^3 = \frac{9}{4}$$

$$\text{(答) ノ. } -x - 1 \quad \text{ハ. } 2 \quad \text{ヒ. } \frac{1}{2} \quad \text{フ. } \frac{9}{4}$$

1.22 平成 30 年度推薦前期試験 (90 分)

- [1] (1) $4x^3 + ax^2 + 2x - 3$ を因数分解すると $(4x^2 + x + 3)(x + b)$ となった。このとき、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 次の命題の真偽を述べよ。ただし、 x, y は実数とする。
- (i) 命題「 $x^2 = x$ ならば、 $x = 1$ である。」は $\boxed{\text{ウ}}$ である。
- (ii) 命題「 $x + y = 2$ かつ $xy = 1$ ならば、 $x = y = 1$ である。」は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + 1$ の頂点が直線 $y = x + 1$ 上にあるとき、定数 a の値は $\boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形とする。 $\sin A = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin B = \boxed{\text{キ}}$, $\tan B = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) データ 4, 1, 2, 1, -2, 0 の平均値は $\boxed{\text{ケ}}$, 分散は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $|x - 1| + |x - 2| = x$ を満たす x の値は $x = \boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $x = 1$ が 2 次方程式 $x^2 + ax + 3 = 0$ の解であるとき、 $a = \boxed{\text{ス}}$ であり、もう 1 つの解は $x = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において、 $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$ のとき、 $AC = \boxed{\text{ソ}}$ である。頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線を AD とするとき、 $\triangle ADC$ の面積は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 2 次関数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$, $g(x) = x^2 + ax + 1$ において、 $f(x) > g(x)$ が全ての実数 x で成り立つとき、定数 a の範囲は $\boxed{\text{チ}} < a < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 10 個のデータ $a, a, a, a, a, b, b, 7, 8, 10$ の平均値は 5, 中央値は 4 である。ただし、 $a < b < 7$ とする。このとき、 $a = \boxed{\text{テ}}$, $b = \boxed{\text{ト}}$ である。

- [3] ある商品は1個の価格が100円のとき1日に600個売れ、価格を1円あげるとに1日に売れる個数が4個ずつ減る. この商品1個の価格を x 円($x \geq 100$)に設定したときの1日の売上個数を y 個とする。 y を x の式で表すと、 $y =$ である。1日の売上総額 z 円を x の式で表すと、 $z =$ である。1日の売上総額を最大にするには、1個の価格を $x =$ とすればよい。このときの1日の売上個数は、 $y =$ である。
- [4] 四角形ABCDにおいて、 $\angle B = 120^\circ$ ， $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $AD = CD$ である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積はであり、 $AC =$ である。また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径はである。点Dが $\triangle ABC$ の外接円の円周上にあるとき、四角形ABCDの面積はである。

解答例

[1] (1) $4x^3 + ax^2 + 2x - 3 = (4x^2 + x + 3)(x + b) \cdots (*)$

(*) の定数項を比較すると $-3 = 3b$ ゆえに $b = -1$

これを (*) に代入して右辺を展開すると

$$(4x^2 + x + 3)(x - 1) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = -3$$

(答) ア. -3 イ. -1

(2) (i) $x^2 = x$ を解くと $x = 0, 1$ $x^2 = x \not\Rightarrow x = 1$ よって 偽
($x = 0$ が反例である)

(ii) $x + y = 2, xy = 1$ を解くと $x = y = 1$ よって 真

(答) ウ. 偽 エ. 真

(3) $y = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 1$

放物線の頂点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 1\right)$ が直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + 1 = -\frac{a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a(a - 2) = 0$$

これを解いて $a = 0, 2$

(答) オ. カ. $0, 2$

(4) $\angle C = 90^\circ$ であるから, $\angle A$ は鋭角であるから

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\angle C = 90^\circ$ より, $A + B = 90^\circ$ であるから

$$\sin B = \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan B = \frac{1}{\tan A} = 2\sqrt{2}$$

(答) キ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ク. $2\sqrt{2}$

(5) 平均は $\frac{4 + 1 + 2 + 1 + (-2) + 0}{6} = 1$

$$\text{したがって, 分散は} \quad \frac{1}{6}\{4^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2\} - 1^2 = \frac{10}{3}$$

(答) ケ. 1 コ. $\frac{10}{3}$

[2] (1) $|x-1| + |x-2| = x$

(i) $x < 1$ のとき

$$(-x+1) + (-x+2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 1 \text{ (不適)}$$

(ii) $1 \leq x < 2$ のとき

$$(x-1) + (-x+2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 1$$

(iii) $2 \leq x$ のとき

$$(x-1) + (x-2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 2$$

(答) サ. シ. 1, 2

(2) $x = 1$ が 2 次方程式 $x^2 + ax + 3 = 0$ の解であるから

$$1 + a + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -4$$

したがって、2 次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ の解は $x = 1, 3$

よって、求める他の解は $x = 3$

(答) ス. -4 セ. 3

(3) $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \quad \text{これを解いて} \quad AC = \sqrt{3}$$

$\triangle ACD$ は直角二等辺三角形で

$$AD = CD = \sqrt{3} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって、}\triangle ADC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

(答) ソ. $\sqrt{3}$ タ. $\frac{3}{4}$

(4) $f(x) = 2x^2 - ax + 2$, $g(x) = x^2 + ax + 1$ より

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2ax + 1$$

すべての x について, $f(x) - g(x) > 0$ であるから, 係数について

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)(a-1) < 0$$

これを解いて $-1 < a < 1$

(答) チ. -1 ツ. 1

(5) 平均値が 5 であるから

$$\frac{5a + 2b + 7 + 8 + 10}{10} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad 5a + 2b = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

$a < b < 7$ で, 中央値が 4 であるから

$$\frac{a+b}{2} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a+b = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 3, b = 5$ (答) テ. 3 ト. 5

[3] (x, y) を座標平面上の直線上の点である.

その直線は, 点 $(100, 600)$ を通り, 傾き -4 であるから

$$y - 600 = -4(x - 100) \quad \text{ゆえに} \quad y = -4x + 1000$$

1 日の売上総額 z は

$$z = xy = x(-4x + 1000) = -4x^2 + 1000x$$

上式を変形すると $z = -4(x - 125)^2 + 62500$

売上総額を最大にする x は $x = 125$ このとき売上個数は

$$y = -4 \cdot 125 + 1000 = 500$$

(答) ナ. $-4x + 1000$ ニ. $-4x^2 + 1000x$ ヌ. 125 ネ. 500

[4] $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ = 7 \quad \text{ゆえに} \quad AC = \sqrt{7}$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$R = \frac{AC}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$\angle ABD = 120^\circ$ より、 $\angle CDA = 60^\circ$ 。 $AD = CD$ であるから、 $\triangle ACD$ は一辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形であるから

$$\triangle ACD = \frac{1}{2}(\sqrt{7})^2 \sin 60^\circ = \frac{7}{4}\sqrt{3}$$

よって、四角形 $ABCD$ の面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

(答) ノ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ハ. $\sqrt{7}$ ヒ. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ フ. $\frac{9}{4}\sqrt{3}$

1.23 平成 30 年度推薦後期試験 (90 分)

- [1] (1) 定数 a, b に対して $x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$ が成り立つとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $n < 2\sqrt{10} < n+1$ をみたす自然数 n は $n = \boxed{\text{ウ}}$ である。また, $\sqrt{k} - \sqrt{10} > 1$ をみたす最小の自然数 k は $k = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 点 $(1, -2)$ を通る放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線は, 点 $(-1, -2)$ を通る. このとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta = \boxed{\text{キ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 10 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ が, $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 55$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 385$ を満たすとき, データの平均値は $\boxed{\text{ケ}}$, 分散は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 関数 $f(x) = |2x - 1| + |3 - x|$ は, $x = \boxed{\text{サ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。
- (2) 関数 $y = x^2 - 4x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値は $\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = a$ (> 0) とする。 $a \cos B = 3 \cos A$ が成り立つとき, $a = \boxed{\text{ソ}}$, $\cos C = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $2 - 2x \leq x^2 - x \leq 2$ の解は $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 2 つの変数 x, y の値の組が $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ であるとき, x と y の分散は共に $\boxed{\text{テ}}$ であり, 相関係数は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] p を定数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2(p - 1)x + 2p + 3$ のグラフの頂点の y 座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。頂点の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき, p の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} \leq p \leq \boxed{\text{ヌ}}$ であり, 頂点の y 座標の最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] 四角形 $ABCD$ において, $AB = 5$, $BC = 12$, $CD = 6$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$ である。このとき, $BD = \boxed{\text{ノ}}$, $\angle BDC = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ である。したがって, $AD = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, 四角形 $ABCD$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$ の右辺を展開すると

$$x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

同じ次数の項の係数を比較して $a = -1, b = -4$

(答) ア. -1 イ. -4

(2) $n < 2\sqrt{10} < n + 1$, $2\sqrt{10} = \sqrt{40}$, $6 < \sqrt{40} < 7$ ゆえに $n = 6$

$\sqrt{k} - \sqrt{10} > 1$ より, $\sqrt{k} > \sqrt{10} + 1$ の両辺を平方して

$$k > 11 + 2\sqrt{10}$$

$17 < 11 + 2\sqrt{10} < 18$ であるから, 求める最小の自然数 k は 18

(答) ウ. 6 エ. 18

(3) 放物線 $y = -x^2 + ax + b \cdots (*)$ は点 $(1, -2)$ を通るから

$$-2 = -1 + a + b \quad \text{ゆえに} \quad a + b = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $(-1, -2)$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に -1 だけ平行移動した点 $(2, -3)$ が放物線 $(*)$ 上にあるから

$$-3 = -4 + 2a + b \quad \text{ゆえに} \quad 2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 2, b = -3$

(答) オ. 2 カ. -3

(4) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であるから $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8} \cdots \textcircled{2}$

① より, $\cos \theta = \sin \theta - \frac{1}{2}$ これを ② に代入すると

$$\sin \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \quad \text{ゆえに} \quad 8 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 3 = 0$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ に注意してこれを解くと

$$\sin \theta = \frac{2 + \sqrt{7}}{4}$$

(答) キ. $\frac{3}{8}$ ク. $\frac{2 + \sqrt{7}}{4}$

(5) 平均値は $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2}$

分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{385}{10} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{77}{2} - \frac{121}{4} = \frac{33}{4}\end{aligned}$$

(答) ケ. 3 コ. 0

[2] (1) $f(x) = |2x - 1| + |3 - x|$ より

(i) $x \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f(x) = (1 - 2x) + (3 - x) = -3x + 4$$

この区間での最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ のとき

$$f(x) = (2x - 1) + (3 - x) = x + 2$$

この区間での最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

(iii) $3 \leq x$ のとき

$$f(x) = (2x - 1) + (x - 3) = 3x - 4$$

この区間での最小値は $f(3) = 5$

(i)~(iii) より, $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる.

(答) サ. $\frac{1}{2}$ シ. $\frac{5}{2}$

(2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ ($0 \leq x \leq 3$)

ゆえに, 最大値 $f(0) = 3$, 最小値 $f(2) = -1$

(答) ス. 3 セ. -1

(3) $b = 3$, $c = 2$ であるから, 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 2^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 - a^2}{12} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + a^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot a} = \frac{a^2 - 5}{4a}\end{aligned}$$

これらを $a \cos B = 3 \cos A$ に代入すると

$$a \cdot \frac{a^2 - 5}{4a} = 3 \cdot \frac{13 - a^2}{12} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 5 = 13 - a^2$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $a = 3$

$$\text{よって} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$$

(答) ソ. 3 タ. $\frac{7}{9}$

(4) $2 - 2x \leq x^2 - x \leq 2$ より

$$(*) \begin{cases} 2 - 2x \leq x^2 - x \\ x^2 - x \leq 2 \end{cases}$$

(*) の第1式から $x^2 + x - 2 \geq 0$

ゆえに $(x+2)(x-1) \geq 0$ すなわち $x \leq -2, 1 \leq x \quad \cdots \textcircled{1}$

(*) の第2式から $x^2 - x - 2 \leq 0$

ゆえに $(x+1)(x-2) \leq 0$ すなわち $-1 \leq x \leq 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通範囲を求めて $1 \leq x \leq 2$

(答) チ. 1 ツ. 2

(5) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{4}\{1 + 1 + (-1) + (-1)\} = 0$

x と y の分散は, ともに

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{1}{4}\{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2\} - 0^2 = 1$$

共分散は

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4}\{(1-0)(1-0) + (1-0)(-1-0) + (-1-0)(1-0) + (-1-0)(-1-0)\} = 0$$

よって, 相関係数は $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0$

(答) テ. 1 ト. 0

$$\begin{aligned}
 [3] \quad y &= x^2 - 2(p-1)x + 2p + 3 \\
 &= (x - p + 1)^2 - p^2 + 4p + 2
 \end{aligned}$$

したがって、このグラフの頂点の y 座標は $-p^2 + 4p + 2$

頂点 $(p-1, -p^2 + 4p + 2)$ の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき

$$(*) \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ -p^2 + 4p + 2 \geq 0 \end{cases}$$

(*) の第 1 式を解いて $p \geq 1 \quad \dots \textcircled{1}$

(*) の第 2 式から

$$p^2 - 4p - 2 \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad 2 - \sqrt{6} \leq p \leq 2 + \sqrt{6} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の共通範囲を求めて $1 \leq p \leq 2 + \sqrt{6}$

放物線の頂点の y 座標を q とすると

$$\begin{aligned}
 q &= -p^2 + 4p + 2 \\
 &= -(p-2)^2 + 6
 \end{aligned}$$

よって、頂点の y 座標の最大値は 6

(答) ナ. $-p^2 + 4p + 2$ ニ. 1 ヌ. $2 + \sqrt{6}$ ネ. 6

[4] $\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 60^\circ = 108$$

$BD > 0$ であるから $BD = 6\sqrt{3}$

このとき, $BC^2 = BD^2 + CD^2$ であるから

$$\angle BDC = 90^\circ \quad \text{また} \quad \angle DBC = 30^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= 5^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\sqrt{3} \cos 30^\circ \\ &= 25 + 108 - 90 = 43 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{43}$

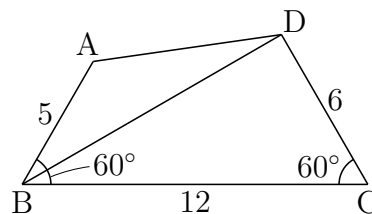
$$\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$$

よって, 四角形 ABCD の面積は

$$\triangle BCD + \triangle ABD = 18\sqrt{3} + \frac{15}{2}\sqrt{3} = \frac{51}{2}\sqrt{3}$$

(答) ノ. $6\sqrt{3}$ ハ. 90 ヒ. $\sqrt{43}$ フ. $\frac{51}{2}\sqrt{3}$



1.24 平成 30 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) $\frac{ax}{(x+1)^2} + \frac{b}{1-2x} = \frac{5x+2}{(x+1)^2(1-2x)}$ が成り立つとき、定数 a, b の値はそれぞれ $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 点 $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ を $1:2$ に内分する点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。この点を通り線分 AB と直交する直線の方程式は $y = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{オ}}$, $\sin 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\log_{16} \sqrt{4}$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。 $\log_a 3 = \frac{1}{4}$ を満たす a は, $a = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 実数 a に対して, $f(a) = \int_0^1 (x+a)^2 dx$ とする。このとき, $f(a)$ は $a = \boxed{\text{ケ}}$ で最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。
- [2] (1) 2 次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。2 数 α^2, β^2 を解とする 2 次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ と表すと、実数 a, b の値は $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $y = \sqrt{3}x - 4$ が接するとき, $r = \boxed{\text{ス}}$ であり, 接点の x 座標は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して, $\cos \theta = \frac{3}{2} \tan \theta$ を満たす θ は $\theta = \boxed{\text{ソ}}$ と $\theta = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $2^x + \frac{1}{2^x} \leq \frac{5}{2}$ を満たす実数 x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ 上の点 $(0, 3)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}$ であり, この接線が放物線 $y = x^2 + a$ と接するとき, $a = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] k は正の定数で, 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の交点の 1 つは x 座標が -1 である。このとき, $k = \boxed{\text{ナ}}$ であり, 円と直線のもう一方の交点の x 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ である。さらに, 連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の表す領域を点 (x, y) が動くとき, $x + y$ の最大値は $\boxed{\text{ヌ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] 放物線 $y = x^2 - x + 1$ に点 $(1, 0)$ から引いた2本の接線の方程式は $y =$ と $y =$ である。それぞれの接線と放物線の接点を A, B とするとき, A, B を通る直線は $y =$ であり, この直線と放物線で囲まれた部分の面積は である。

解答例

[1] (1) 与えられた等式の両辺に $(x+1)^2(1-2x)$ を掛けると

$$ax(1-2x) + b(x+1)^2 = 5x + 2$$

左辺を整理すると

$$(-2a+b)x^2 + (a+2b)x + b = 5x + 2$$

同じ次数の項の係数は等しいから

$$-2a + b = 0, \quad a + 2b = 5, \quad b = 2$$

これを解いて $a = 1, b = 2$

(答) ア. 1 イ. 2

(2) 2 点 A(2, 1), B(-1, 3) を 1:2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1+2}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{1+2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(1, \frac{5}{3} \right)$$

直線 AB の傾きは $\frac{3-1}{-1-2} = -\frac{2}{3}$

点 $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ を通り, 直線 AB に垂直な直線は

$$y - \frac{5}{3} = \frac{3}{2}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$$

(答) ウ. $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ エ. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(答) オ. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ カ. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$$(4) \log_{16} \sqrt{4} = \log_{16} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 16} = \frac{1}{4}$$

$$\log_a 3 = \frac{1}{4} \text{ より } a^{\frac{1}{4}} = 3 \text{ よって } a = 3^4 = 81$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{1}{4} \quad \text{ク. } 81$$

$$(5) f(a) = \int_0^1 (x+a)^2 dx = \frac{1}{3} \left[(x+a)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \{ (1+a)^3 - a^3 \} = a^2 + a + \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } f(a) = \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \text{ よって } a = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{12}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } -\frac{1}{2} \quad \text{コ. } \frac{1}{12}$$

[2] (1) 2次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解が α, β であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\text{ゆえに } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot (-2) = 8$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

α^2, β^2 を解とする 2次方程式は

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad \text{ゆえに } x^2 - 8x + 4 = 0$$

これと $x^2 + ax + b = 0$ の同じ次数の項の係数を比較して $a = -8, b = 4$

$$(\text{答}) \text{ サ. } -8 \quad \text{シ. } 4$$

(2) 円の中心 $(0, 0)$ から直線 $y = \sqrt{3}x - 4$ ($\sqrt{3}x - y - 4 = 0$) までの距離が円の半径 r であるから

$$r = \frac{|-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2$$

$x^2 + y^2 = 4$ と $y = \sqrt{3}x - 4$ から y を消去すると

$$x^2 + (\sqrt{3}x - 4)^2 = 4 \quad \text{整理すると } x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

これを解いて $x = \sqrt{3}$

$$(\text{答}) \text{ ス. } 2 \quad \text{セ. } \sqrt{3}$$

$$(3) \cos \theta = \frac{3}{2} \tan \theta \text{ より } 2 \cos^2 \theta = 3 \sin \theta$$

$$\text{したがって } 2(1 - \sin^2 \theta) = 3 \sin \theta \text{ ゆえに } (\sin \theta + 2)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. タ. } \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$(4) 2^x + \frac{1}{2^x} \leq \frac{5}{2} \text{ について, } t = 2^x \text{ とおくと } (t > 0)$$

$$t + \frac{1}{t} \leq \frac{5}{2} \text{ ゆえに } 2t^2 - 5t + 2 \leq 0 \text{ これを解いて } \frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$\text{したがって } \frac{1}{2} \leq 2^x \leq 2 \text{ すなわち } -1 \leq x \leq 1$$

$$(\text{答}) \text{ チ. } -1 \text{ ツ. } 1$$

$$(5) y = x^2 + 2x + 3 \text{ を微分すると } y' = 2x + 2 \text{ ゆえに } x = 0 \text{ のとき, } y' = 2$$

$$\text{したがって, 放物線 } y = x^2 + 2x + 3 \text{ 上の点 } (0, 3) \text{ における接線の方程式は}$$

$$\mathbf{y = 2x + 3}$$

$$\text{これと } y = x^2 + a \text{ から } y \text{ を消去すると}$$

$$x^2 + a = 2x + 3 \text{ ゆえに } x^2 - 2x + a - 3 = 0$$

$$\text{上の 2 次方程式は重解をもつから, 係数について}$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1(a - 3) = 0 \text{ ゆえに } \mathbf{a = 4}$$

$$(\text{答}) \text{ テ. } 4x - 3 \text{ ト. } 2$$

[3] 直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の x 軸との交点の x 座標 k が正である.

また円と直線の交点の x 座標が -1 であるから, その交点は第2象限あり

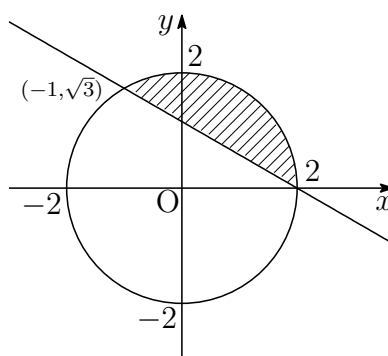
$$(-1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sqrt{3}$$

交点 $(-1, \sqrt{3})$ は直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ 上の点であるから

$$\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-1 - k) \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

もう一方の交点は $(2, 0)$ であるから, もう一方の交点の x 座標は **2**

連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$ の表す領域は, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって $x + y$ は $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で最大値 $2\sqrt{2}$,

$(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ で最小値 $-1 + \sqrt{3}$ をとる.

(答) ナ. 2 ニ. 2 ヌ. $2\sqrt{2}$ ネ. $-1 + \sqrt{3}$

[4] $y = x^2 - x + 1$ を微分すると $y' = 2x - 1$

放物線 $y = x^2 - x + 1$ 上の点 $(t, t^2 - t + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + 1) = (2t - 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t - 1)x - t^2 + 1 \quad \dots (*)$

これが点 $(1, 0)$ を通るから

$$0 = (2t - 1) \cdot 1 - t^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2t = 0$$

これを解いて $t = 0, 2$

(*) より, 2 本の接線は $y = -x + 1, y = 3x - 3$

したがって, 2 点 A, B の座標は $(0, 1), (2, 3)$

この 2 点を通る直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = x + 1$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x + 1 - (x^2 - x + 1)\} dx \\ &= -\int_0^2 x(x - 2) dx = \frac{1}{6}(2 - 0)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(答) ノ. ハ. $-x + 1, 3x - 3$ ヒ. $x + 1$ フ. $\frac{4}{3}$

1.25 平成29年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) a を定数とする。 $(x - y + 1)(ax + y - 2)$ を展開したとき、 x の係数と y の係数が等しければ、 $a = \boxed{\text{ア}}$ であり、 xy の係数は $\boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ の整数部分を a 、小数部分を b とすると、 $a = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) x は鋭角で、 $\sin x = \frac{2}{3}$ 、 $x + y = 90^\circ$ のとき、 $\sin y = \boxed{\text{オ}}$ 、 $\tan y = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 放物線 $y = (x - 3)(x + 1)$ の軸は、直線 $x = \boxed{\text{キ}}$ であり、頂点は点 $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) データ A とデータ B が次の表で与えられるとき、範囲が小さい方はデータ $\boxed{\text{ケ}}$ であり、そのデータの平均値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

A	44	32	35	26	38
B	34	42	18	30	26

- [2] (1) A 社は 1000 枚までは 1 枚 3 円、それ以後は 1 枚 1 円で、B 社は 1000 枚までは定額の 2000 円、それ以後は 1 枚 2 円で、それぞれ印刷を請け負う。A 社の印刷代金が B 社の印刷代金以下なのは、印刷枚数が $\boxed{\text{サ}}$ 枚以下と、 $\boxed{\text{シ}}$ 枚以上のときである。
- (2) 放物線 $y = x^2 - 2ax + b$ が点 $(1, 1)$ を通り、 x 軸と異なる 2 点で交わるとき、定数 a の範囲は $a < \boxed{\text{ス}}$ 、 $a > \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) x は $-2 < x < 1$ をみたす実数とする。座標平面の 3 点 $(1, 0)$ 、 $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ 、 $\left(x, -\frac{x}{2} - 1\right)$ を頂点にもつ三角形の面積は、 $x = \boxed{\text{ソ}}$ のとき、最大値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。
- (4) $BC = 2$ 、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$ の $\triangle ABC$ において、 $AC = \boxed{\text{チ}}$ 、 $AB = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 次のデータの平均値は 7 で標準偏差は 4 である。ただし $a < b$ とする。このとき $a = \boxed{\text{テ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ト}}$ である。

$$a, \quad b, \quad 7, \quad 9, \quad 13$$

- [3] 放物線 $y = x^2 + ax + b$ が 2 点 $(1, -1)$, $(2, k - 5)$ を通る。ただし $k > 0$ とする。
このとき、実数 a , b を k で表すと、 $a = \boxed{\text{ナ}}$, $b = \boxed{\text{ニ}}$ である。放物線と x
軸との交点を A , B とする。ただし、 A の x 座標は B の x 座標より小さいとす
る。線分 AB の長さが $\sqrt{40}$ であるとき、 A , B の x 座標は $\boxed{\text{ヌ}}$, $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] 円 O に内接する四角形 $ABCD$ があり、 $AB = 1$, $AD = 2$, $\angle A = 60^\circ$, そして
 $BC = 2CD$ とする。このとき、 $BD = \boxed{\text{ノ}}$ であり、円 O の直径は $\boxed{\text{ハ}}$ であ
る。また、 $BC = \boxed{\text{ヒ}}$ であり、四角形 $ABCD$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ となる。

解答例

[1] (1) $(x - y + 1)(ax + y - 2) = ax^2 + (1 - a)xy - y^2 + (a - 2)x + 3y - 2$ より

$$a - 2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 5 \quad \text{このとき} \quad xy \text{ の係数は } -4$$

(答) ア. 5 イ. -4

(2) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \text{ より, } 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \text{ であるから } a = 2, b = \sqrt{2} - 1$$

(答) ウ. 2 エ. $\sqrt{2} - 1$

(3) x は鋭角であるから, $\sin x = \frac{2}{3}$ より

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x + y = 90^\circ \text{ より}$$

$$\sin y = \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(答) オ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ カ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(4) $y = (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ より

$$\text{軸 } x = 1, \text{ 頂点 } (1, -4)$$

(答) キ. 1 ク. $(1, -4)$

(5) データ A の範囲は $44 - 26 = 18$, データ B の範囲は $42 - 18 = 24$
範囲が小さい方はデータ A であり, その平均値は

$$\frac{44 + 32 + 35 + 26 + 38}{5} = \frac{175}{5} = 35$$

(答) ケ. A コ. 35

[2] (1) 印刷枚数を x 枚とする.

(i) $x \leq 1000$ のとき, A 社の代金は $3x$ 円, B 社の代金は 2000 円より

$$3x \leq 2000 \quad \text{ゆえに} \quad x \leq \frac{2000}{3}$$

$$\frac{2000}{3} = 666.6\cdots \quad \text{よって} \quad \mathbf{666 \text{ 枚以下}}$$

(ii) $x > 1000$ のとき, A 社の代金は $3000 + 1(x - 1000)$ 円, B 社の代金は $2000 + 2(x - 1000)$ 円より

$$3000 + 1(x - 1000) \leq 2000 + 2(x - 1000)$$

$$\text{これを解いて} \quad x \geq 2000 \quad \text{よって} \quad \mathbf{2000 \text{ 枚以上}}$$

(答) サ. 666 シ. 2000

(2) 放物線 $y = x^2 - 2ax + b$ が点 $(1, 1)$ を通るから

$$1 = 1 - 2a + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a$$

$$\text{したがって} \quad y = x^2 - 2ax + 2a = (x - a)^2 - a^2 + 2a$$

これが x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$-a^2 + 2a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a - 2) > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad \mathbf{a < 0, a > 2}$$

(答) ス. 0 セ. 2

(3) A(1, 0), B $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$, C $\left(x, -\frac{x}{2} - 1\right)$ とおくと $(-2 < x < 1)$

$$BC = \left(\frac{x}{2} + 1\right) - \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = 2 + x$$

A から BC に降ろした垂線の長さは $1 - x$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2+x)(1-x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x - 2) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

よって, $x = -\frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{9}{8}$ をとる.

(答) ソ. $-\frac{1}{2}$ タ. $\frac{9}{8}$

(4) $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$ より

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ により

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad b = \sqrt{6}$$

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A \\ &= 2 \cos 60^\circ + \sqrt{6} \cos 45^\circ = 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって **AB = 1 + $\sqrt{3}$**

(答) チ. $\sqrt{6}$ ツ. $1 + \sqrt{3}$

(5) データの平均値が7であるから

$$\frac{a + b + 7 + 9 + 13}{5} = 7 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

このときデータの標準偏差が4であるから

$$\frac{1}{5}(a^2 + b^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2) - 7^2 = 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = 26 \quad \dots \textcircled{2}$$

$a < b$ に注意して, ①, ② を解くと **$a = 1$, $b = 5$**

(答) テ. 1 ト. 5

[3] 放物線 $y = x^2 + ax + b$ が 2 点 $(1, -1)$, $(2, k - 5)$ を通るから

$$-1 = 1 + a + b, \quad k - 5 = 4 + 2a + b$$

ゆえに $a + b = -2, \quad 2a + b = k - 9$

これを解いて $a = k - 7, \quad b = -k + 5$

したがって、放物線 $y = x^2 + (k - 7)x - k + 5$ の x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(k - 7) \pm \sqrt{(k - 7)^2 - 4(-k + 5)}}{2} \\ &= \frac{-k + 7 \pm \sqrt{k^2 - 10k + 29}}{2} \end{aligned}$$

条件から $\sqrt{k^2 - 10k + 29} = \sqrt{40}$

したがって $k^2 - 10k - 11 = 0$ ゆえに $(k + 1)(k - 11) = 0$

$k > 0$ に注意してこれを解くと $k = 11$

よって、A, B の x 座標は

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

(答) ナ. $k - 7$ ニ. $-k + 5$ ヌ. $-2 - \sqrt{10}$ ネ. $-2 + \sqrt{10}$

[4] $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 3 \quad \text{ゆえに} \quad BD = \sqrt{3}$$

円 O の直径 $2R$ は、正弦定理により $2R = \frac{BD}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$

$\angle C = 120^\circ$ であるから、 $x = CD$ において、余弦定理に適用すると

$$(\sqrt{3})^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{3}{7}$$

したがって $BC = 2x = 2\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \sin 120^\circ = (1 + x^2) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{7} \sqrt{3}$$

(答) ノ. $\sqrt{3}$ ハ. 2 ヒ. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ フ. $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

1.26 平成29年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y - 3$ を因数分解すると, $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) a を有理数とする。 $x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$, $y = a(2 + \sqrt{2})$ に対して, $x + y$ が有理数であれば, $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり, $x^2 + y^2 = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 不等式 $3|x + 1| < x + 5$ を解くと, $\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 12$, $AC = 4$, $\angle A = 60^\circ$ とする。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると, $AD = \boxed{\text{キ}}$ であり, $\triangle ABD$ の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $a < 3$ とする。次のデータの中央値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。中央値と平均値が等しいとき $a = \boxed{\text{コ}}$ である。

$$a, 3, 7, 1, 4$$

- [2] (1) 2次不等式 $x^2 + 2ax + 3 - 2a > 0$ の解がすべての実数であるとき, 定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{サ}} < a < \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $a \neq 0$ とする。2次関数 $y = x^2 - 2ax + b$ のグラフを, y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフは x 軸に接し, かつ, y 軸との交点の y 座標と頂点の x 座標は等しい。このとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2次関数 $y = -2x^2 + 4x + a$ の最大値と2次関数 $y = x^2 - 4x + 4a + 3$ の最小値が等しいとき, 実数 a の値は, $a = \boxed{\text{ソ}}$ であり, $y = -2x^2 + 4x + a$ の最大値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 $3 \tan \theta = 2 \cos \theta$ を満たす θ は, $\theta = \boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 次の表で与えられるデータ A とデータ B について, 分散が大きい方はデータ $\boxed{\text{テ}}$ であり, そのデータの四分位範囲は $\boxed{\text{ト}}$ である。

A	122	126	130	134	138
B	15	25	30	35	45

- [3] 実数 x に対して $f(x) = |x| - |x - 1| + |x - 3|$ とおく。 x の値の範囲で場合分けすると, $f(x)$ は絶対値記号を含まない1次式で表すことができる。例えば, $0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = \boxed{\text{ナ}}$, $1 \leq x < 3$ のとき $f(x) = \boxed{\text{ニ}}$ である。実数全体を定義域とする関数 $y = f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。また, 方程式 $f(x) = \sqrt{5}$ は異なる $\boxed{\text{ネ}}$ 個の実数解をもつ。

- [4] $\triangle ABC$ の外接円の半径を R , $BC = 4$ とする。 $\sin A$ を R を用いて表すと,
 $\sin A = \boxed{\text{ノ}}$ である。 $\triangle ABC$ の 3 つの角の間に

$$3 \sin A = 4 \sin B = 6 \sin C$$

が成り立つとき, $\cos A = \boxed{\text{ハ}}$, $\sin A = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, $R = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

$$[1] (1) 2x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 7y - 3 = (x + 2y - 1)(2x - y + 3)$$

(答) ア. イ. $x + 2y - 1$, $2x - y + 3$

$$(2) x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ より}$$

$$x + y = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + a(2 + \sqrt{2}) = (2a + 1) + \left(a - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$$

$x + y$ が有理数であるから

$$a - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad x + y = 2, \quad xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

(答) ウ. $\frac{1}{2}$ エ. 3

$$(3) |3(x + 1)| < x + 5 \text{ より}$$

$$-(x + 5) < 3(x + 1) < x + 5 \quad \text{これを解いて} \quad -2 < x < 1$$

(答) オ. -2 カ. 1

$$(4) x = AD \text{ とおくと, } \triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \sin 60^\circ$$

$$3x + x = 12\sqrt{3}$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3\sqrt{3} \sin 30^\circ = 9\sqrt{3}$$

(答) キ. $3\sqrt{3}$ ク. $9\sqrt{3}$

$$(5) a < 3 \text{ より, 中央値は } 3$$

中央値と平均値が等しいから

$$3 = \frac{a + 3 + 7 + 1 + 4}{5} \quad \text{これを解いて} \quad a = 0$$

(答) ケ. 3 コ. 0

- [2] (1) 与えられた不等式から $(x+a)^2 - a^2 - 2a + 3 > 0$

この不等式の解がすべての実数であるから

$$-a^2 - 2a + 3 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1) < 0$$

これを解いて $-3 < a < 1$

(答) サ. -3 シ. 1

- (2) 与えられた放物線は $y = (x-a)^2 - a^2 + b$

これを y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$$y = (x-a)^2 - a^2 + b - 1 \quad \cdots (*)$$

(*) の頂点 $(a, -a^2 + b - 1)$ は, x 軸上にあるから

$$-a^2 + b - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) に $x = 0$ を代入すると $y = b - 1$

これが, (*) の頂点の x 座標に等しいから

$$b - 1 = a \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から, $a \neq 0$ に注意してこれを解くと

$$a = 1, \quad b = 2$$

(答) ス. 1 セ. 2

- (3) $y = -2x^2 + 4x + a = -2(x-1)^2 + a + 2$ の最大値は $a + 2$

$$y = x^2 - 4x + 4a + 3 = (x-2)^2 + 4a - 1 \text{ の最小値は } 4a - 1$$

条件から $a + 2 = 4a - 1$ これを解いて $a = 1$

よって, $y = -2x^2 + 4x + a$ の最大値は 3

(答) ソ. 1 タ. 3

- (4) $3 \tan \theta = 2 \cos \theta$ より $\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \cos \theta$ ゆえに $3 \sin \theta = 2 \cos^2 \theta$

$$\text{したがって} \quad 3 \sin \theta = 2(1 - \sin^2 \theta)$$

$$(\sin \theta + 2)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $0 < \sin \theta \leq 1$ であるから

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = 30^\circ, 150^\circ$$

(答) チ. ツ. $30^\circ, 150^\circ$

(5) データ A の平均は 130, データ B の平均は 30 であるから

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{5} \{ (122 - 130)^2 + (126 - 130)^2 + (130 - 130)^2 + (134 - 130)^2 + (138 - 130)^2 \} = 32$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{5} \{ (15 - 30)^2 + (25 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (35 - 30)^2 + (45 - 30)^2 \} = 100$$

分散が大きい方は, データ B, その四分位範囲は $35 - 25 = 10$

(答) テ. B ト. 10

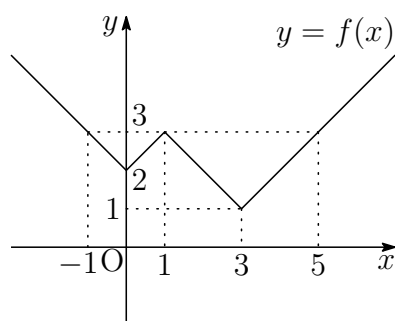
[3] $f(x) = |x| - |x - 1| + |x - 3|$

$$x < 0 \text{ のとき} \quad f(x) = -x - (-x + 1) + (-x + 3) = -x + 2$$

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき} \quad f(x) = x - (-x + 1) + (-x + 3) = x + 2$$

$$1 \leq x < 3 \text{ のとき} \quad f(x) = x - (x - 1) + (-x + 3) = -x + 4$$

$$3 \leq x \text{ のとき} \quad f(x) = x - (x - 1) + (x - 3) = x - 2$$



上のグラフから, 求める最小値は 1.

方程式 $f(x) = \sqrt{5}$ の解の個数は, $y = f(x)$ と $y = \sqrt{5}$ の交点の個数であるから, 上のグラフから, 求める個数は 4 個.

(答) ナ. $x + 2$ ニ. $-x + 4$ ス. 1 ネ. 4

[4] 正弦定理により $\frac{4}{\sin A} = 2R$ ゆえに $\sin A = \frac{2}{R}$

$$3 \sin A = 4 \sin B = 6 \sin C \text{ より } \frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{2}$$

したがって、正弦定理により

$$a = 4k, \quad b = 3k, \quad c = 2k \quad (k \text{ は定数})$$

とおくと

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (4k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 2k} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$R = \frac{2}{\sin A} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

$$(\text{答}) \quad \text{ノ. } \frac{2}{R} \quad \text{ハ. } -\frac{1}{4} \quad \text{ヒ. } \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{フ. } \frac{8}{\sqrt{15}}$$

1.27 平成29年度一般試験(90分)

- [1] (1) 整式 $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ を整式 $x^3 + 3$ で割ると、商は ，余りは である。
- (2) 直線 $2x - y + 3 = 0$ に関して、点 $P(3, 4)$ と対称な点 Q の座標を (a, b) とするとき、 $a =$ ， $b =$ である。
- (3) $\sin \frac{14}{3}\pi =$ ， $\cos \left(-\frac{5}{3}\pi\right) =$ である。
- (4) 連立方程式 $8^x = 4^{y+1}$ ， $9^{x+2} = 27^y$ を解くと $x =$ ， $y =$ である。
- (5) 関数 $y = x^3 - 12x$ の $-3 \leq x \leq 1$ における最大値は ，最小値は である。
- [2] (1) 3次方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ の3つの解を α, β, γ で表すとき、 $\alpha + \beta + \gamma =$ ， $\alpha\beta\gamma =$ である。
- (2) 原点 O と点 $A(a, a^2 + 1)$ について、線分 OA を $2:1$ に内分する点 B の座標は であり、点 A が放物線 $y = x^2 + 1$ の上を動くとき、点 B の軌跡の方程式は $y =$ である。
- (3) 定数 a, b ($a > 0$) に対して $3\sin\theta - 4\cos\theta = a\sin(\theta + b)$ が成り立つとき、 $a =$ ， $\tan b =$ である。
- (4) 不等式 $2\log_2(x+1) < \log_2(1-x)$ の解は $< x <$ である。
- (5) $\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 3x - 2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a ($a > 0$) は、 $f(x) =$ ， $a =$ である。
- [3] 放物線 $y = x^2 + (a-1)x - a$ ($a > 0$) 上の点 $A(1, 0)$ を通り、傾き -1 の直線を ℓ ，傾き 1 の直線を m とする。放物線と直線 ℓ の A 以外の交点を B ，放物線と直線 m の A 以外の交点を C とする。線分 AB, AC の長さを a を用いて表すと $AB =$ ， $AC =$ である。 $BC = 6$ のとき $a =$ であり、 $\triangle ABC$ の面積は となる。
- [4] 放物線 $y = 1 - x^2$ の上に点 $A(a, 1 - a^2)$ をとる。ただし、 $0 < a < 1$ とする。点 A を通る接線 ℓ の方程式は $y =$ である。 x 軸上に点 $B(a, 0)$ および接線 ℓ と x 軸の交点 C をとり、 $\triangle ABC$ の面積を S_1 とすると、 $S_1 =$ となる。さらに x 軸上に点 $D(-1, 0)$ をとり、直線 AD と放物線 $y = 1 - x^2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、 $S_2 =$ となる。 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$ のとき、 $a =$ である。

解答例

$$\begin{array}{r}
 [1] \quad (1) \quad x^3 \quad + 3 \quad \overline{) \quad x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1} \\
 \quad \quad \quad x^5 \quad \quad \quad + 3x^2 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad -3x^4 - 2x^3 \quad \quad + 5x \\
 \quad \quad \quad -3x^4 \quad \quad \quad - 9x \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad -2x^3 \quad \quad + 14x - 1 \\
 \quad \quad \quad -2x^3 \quad \quad \quad - 6 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 14x + 5
 \end{array}$$

よって 商は $x^2 - 3x - 2$, 余りは $14x + 5$

(答) ア. $x^2 - 3x - 2$ イ. $14x + 5$

(2) 2点 P, Q の中点 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ は直線 $2x - y + 3 = 0$ 上の点であるから

$$2 \cdot \frac{a+3}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2a - b = -8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 $2x - y + 3 = 0$ の傾きは 2, 直線 PQ の傾きは $\frac{b-4}{a-3}$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-4}{a-3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a + 2b = 11 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = -1, b = 6$

(答) ウ. -1 エ. 6

$$(3) \sin \frac{14}{3}\pi = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

(答) オ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ カ. $\frac{1}{2}$

(4) $8^x = 4^{y+1}, 9^{x+2} = 27^y$ より

$$2^{3x} = 2^{2(y+1)}, \quad 3^{2(x+2)} = 3^{3y}$$

したがって $3x = 2(y+1), 2(x+2) = 3y$

これを解いて $x = \frac{14}{5}, y = \frac{16}{5}$

(答) キ. $\frac{14}{5}$ ク. $\frac{16}{5}$

(5) $y = x^3 - 12x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

したがって、 $-3 \leq x \leq 1$ における y の増減表は

x	-3	...	-2	...	1
y'		+	0	-	
y	9	↗	16	↘	-11

よって、 $x = -2$ のとき、最大値 **16**、 $x = 1$ のとき、最小値 **-11**

(答) ケ. 16 コ. -11

[2] (1) 3次方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ の解が α, β, γ であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{1} = \mathbf{3}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{12}{1} = \mathbf{-12}$$

(答) サ. 3 シ. -12

(2) 原点 O と点 $A(a, a^2 + 1)$ を結ぶ線分 OA を $2:1$ に内分する点 B の座標は

$$\left(\frac{2}{3}a, \frac{2a^2 + 2}{3} \right)$$

$x = \frac{2}{3}a, y = \frac{2a^2 + 2}{3}$ とおいて、 a を消去すると

$$3y = 2 \left(\frac{3}{2}x \right)^2 + 2 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}}$$

(答) ス. $\left(\frac{2}{3}a, \frac{2a^2 + 2}{3} \right)$ セ. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}$

(3) $\cos b = \frac{3}{5}, \sin b = -\frac{4}{5}$ とおくと

$$\begin{aligned} 3\sin\theta - 4\cos\theta &= 5(\sin\theta\cos b + \cos\theta\sin b) \\ &= 5\sin(\theta + b) \end{aligned}$$

よって $\mathbf{a = 5}, \tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = -\frac{4}{3}$

(答) ソ. 5 タ. $-\frac{4}{3}$

$$(4) \quad 2\log_2(x+1) < \log_2(1-x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

真数は正であるから

$$x+1 > 0, \quad 1-x > 0 \quad \text{すなわち} \quad -1 < x < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \log_2(x+1)^2 < \log_2(1-x)$$

底 2 は 1 より大きいから

$$(x+1)^2 < 1-x \quad \text{ゆえに} \quad x(x+3) < 0$$

$$\textcircled{2} \text{ に注意して, これを解くと } -1 < x < 0$$

(答) チ. -1 ツ. 0

$$(5) \quad \int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 3x - 2 \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ を } x \text{ について微分すると } f(x) = 4x - 3$$

(*) に $x = a$ を代入すると

$$0 = 2a^2 - 3a - 2 \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)(2a+1) = 0$$

$$a > 0 \text{ に注意して, これを解くと } a = 2$$

(答) テ. $4x - 3$ ト. 2

$$[3] \quad y = x^2 + (a-1)x - a \quad (a > 0) \quad \cdots (*)$$

直線 ℓ の方程式は

$$y = -1(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 m の方程式は

$$y = 1(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*), ① から y を消去すると

$$x^2 + (a-1)x - a = -x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x+a+1) = 0$$

したがって、点 B の x 座標は $-a-1$

$$a > 0 \text{ より} \quad AB = \sqrt{2}|1 - (-a-1)| = \sqrt{2}(a+2)$$

(*), ② から y を消去すると

$$x^2 + (a-1)x - a = x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x+a-1) = 0$$

したがって、点 C の x 座標は $-a+1$

$$a > 0 \text{ より} \quad AC = \sqrt{2}|1 - (-a+1)| = \sqrt{2}a$$

$\angle BAC = 90^\circ$ より、 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ であるから

$$2(a+2)^2 + 2a^2 = 36 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 2a - 7 = 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $a = 2\sqrt{2} - 1$

このとき $AB = \sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)$, $AC = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 7$$

(答) ナ. $\sqrt{2}(a+2)$ ニ. $\sqrt{2}a$ ヌ. $2\sqrt{2}-1$ ネ. 7

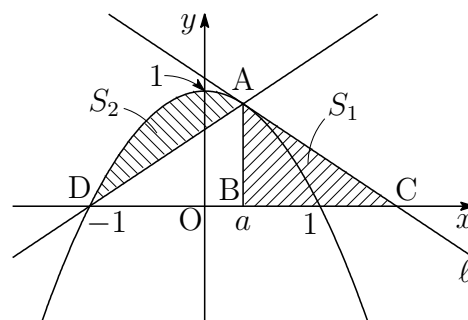
[4] $y = 1 - x^2$ を微分すると

$$y' = -2x$$

接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$$

$$y = -2ax + a^2 + 1$$



点 C の x 座標は, 上式に $y = 0$ を代入すると

$$-2ax + a^2 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

したがって

$$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}(1 - a^2) \left(\frac{a^2 + 1}{2a} - a \right) = \frac{(1 - a^2)^2}{4a}$$

2 点 A, D の x 座標に注意して

$$S_2 = \frac{1}{6}\{a - (-1)\}^3 = \frac{(1 + a)^3}{6}$$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$ のとき

$$\frac{(1 - a^2)^2}{4a} \times \frac{6}{(1 + a)^3} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(1 - a)^2}{a(1 + a)} = 1$$

これを解いて $a = \frac{1}{3}$

(答) ノ. $-2ax + a^2 + 1$ ハ. $\frac{(1 - a^2)^2}{4a}$ ビ. $\frac{(1 + a)^3}{6}$ フ. $\frac{1}{3}$

1.28 平成28年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(x+1)^2(x+3) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ ならば, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + \sqrt{72} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ とおく. ただし, a, b は整数とする。このとき $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $y = x^2 + x + 2$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値は $\boxed{\text{オ}}$, 最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{キ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 次のデータの平均値は $\boxed{\text{ケ}}$ であり, 標準偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である。

4, 6, 7, 8, 10

- [2] (1) 現金 3000 円を持って, 1 個 180 円のリンゴと 1 個 140 円のミカンを含わせて 20 個買う。リンゴを出来るだけ多く買うとき, 買えるリンゴの個数は最大 $\boxed{\text{サ}}$ 個であり, このときミカンの個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個である。
- (2) 放物線 $y = -x^2 + 2x - 3$ を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動すると放物線 $y = -x^2 - 4x - 5$ が得られた。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (3) 2 次不等式 $ax^2 + bx - 1 < 0$ の解が, $-1 < x < 2$ であれば, $a = \boxed{\text{ソ}}$, $b = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\frac{11}{6}$ を循環小数で表すと $\boxed{\text{チ}}$, 循環小数 $0.1\bar{5}$ を分数で表すと $\boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 次のデータの中央値は $\boxed{\text{テ}}$ であり, 四分位範囲は $\boxed{\text{ト}}$ である。

8, 4, 6, 2, 10, 13

- [3] 2 次方程式 $x^2 - x - \frac{10}{9} = 0$ の解は $x = \boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ である。関数 $f(x) = \left| x^2 - x - \frac{10}{9} \right|$ は $0 \leq x \leq 2$ において, $x = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。

- [4] 1 辺の長さが 6 の正四面体 OABC において, 辺 OA 上に $OP = 2$ をみたす点 P, 辺 OC 上に $OQ = 1$ をみたす点 Q をとる。このとき, $BP = \boxed{\text{ノ}}$, $BQ = \sqrt{31}$, $PQ = \boxed{\text{ハ}}$ である。したがって, $\sin \angle PBQ = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, $\triangle BPQ$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ となる。

解答例

[1] (1) 左辺を整理すると

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = x^3 + ax^2 + bx + 3$$

係数を比較して $a = 5, b = 7$

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y - 3 &= 2x^2 + (3y + 1)x + (y - 1)(y + 3) \\ &= \{x + (y - 1)\}\{2x + (y + 3)\} \\ &= (x + y - 1)(2x + y + 3) \end{aligned}$$

(答) ア. 5 イ. 7

(2) 左辺を整理すると $6\sqrt{2} - \sqrt{3} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \cdots (*)$ したがって $a = 6, b = -1$ 解説 $b + 1 \neq 0$ とすると, $(*)$ より $\frac{6 - a}{b + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ a, b は整数であるから, 左辺は有理数. 右辺は無理数であるから不適. $b + 1 = 0$, すなわち, $b = -1$ であるから, $(*)$ より $a = 6$

(答) ウ. 6 エ. -1

(3) $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ ($-1 \leq x \leq 1$) であるから $x = 1$ のとき最大値 4, $x = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{7}{4}$ (答) オ. 4 カ. $\frac{7}{4}$ (4) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ により

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $\cos \theta > 0$ であるから $\cos \theta = \frac{3}{5}$ また $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$ (答) キ. $\frac{3}{5}$ ク. $\frac{4}{5}$

(5) 平均 $\bar{x}$ は $\bar{x} = \frac{4+6+7+8+10}{5} = 7$

標準偏差 s は

$$5s^2 = (4-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 = 20$$

よって $s = 2$

(答) ケ. 7 コ. 2

[2] (1) リンゴを x 個買うとすると

$$180x + 140(20 - x) \leq 3000 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq 5$$

リンゴの個数は最大 5 個, このときミカンの個数は 15 個.

(答) サ. 5 シ. 15

(2) $y = -x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2 \cdots \textcircled{1}$,

$$y = -x^2 - 4x - 5 = -(x+2)^2 - 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ の頂点は $(1, -2)$, $\textcircled{2}$ の頂点は $(-2, -1)$

したがって $a = -2 - 1 = -3$, $b = -1 - (-2) = 1$

(答) ス. -3 セ. 1

(3) $-1 < x < 2$ を解とする 2 次不等式は

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 2 < 0$$

定数項に注意して $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 < 0$ よって $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

(答) ソ. $\frac{1}{2}$ タ. $-\frac{1}{2}$

(4) $\frac{11}{6} = 1.8333\cdots = 1.\dot{8}\dot{3}$

$$x = 0.\dot{1}\dot{5} \text{ とおくと } 100x = 15.\dot{1}\dot{5}$$

$$\text{ゆえに } 100x - x = 15 \quad \text{よって} \quad x = \frac{5}{33}$$

(答) チ. $1.\dot{8}\dot{3}$ ツ. $\frac{5}{33}$

(5) 6 個のデータを整理すると 2, 4, 6, 8, 10, 13

中央値は $\frac{6+8}{2} = 7$, 第 1 四分位数 4, 第 3 四分位数 10 より四分位範囲
は $10 - 4 = 6$

(答) テ. 7 ト. 6

[3] $x^2 - x - \frac{10}{9} = 0$ を解いて $x = \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}$

$$x^2 - x - \frac{10}{9} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{36}$$

したがって, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{49}{36}$, $f(2) = \frac{8}{9}$

よって, $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{49}{36}$

(答) ナ. ニ. $\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}$ ヌ. $\frac{1}{2}$ ネ. $\frac{49}{36}$

[4] $\triangle OBP$ および $\triangle OPQ$ に余弦定理を適用すると

$$BP^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cos 60^\circ = 28 \quad \text{ゆえに} \quad BP = 2\sqrt{7}$$

$$PQ^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cos 60^\circ = 3 \quad \text{ゆえに} \quad PQ = \sqrt{3}$$

余弦定理を $\triangle BPQ$ に適用すると

$$\cos \angle PBQ = \frac{(2\sqrt{7})^2 + (\sqrt{31})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{31}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}$$

ゆえに $\sin \angle PBQ = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{31}}$

また $\triangle BPQ = \frac{1}{2} BP \cdot BQ \sin \angle PBQ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{31} \cdot \sqrt{\frac{3}{31}} = \sqrt{21}$

(答) ノ. $2\sqrt{7}$ ハ. $\sqrt{3}$ ヒ. $\sqrt{\frac{3}{31}}$ フ. $\sqrt{21}$

1.29 平成28年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $(ax + y - 2)(2y - x - 1) = -2x^2 + bxy + 2y^2 - 5y + 2$ ならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $a = \frac{1}{\sqrt{13} + 2\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{13} - 2\sqrt{3}}$ のとき, $a + b = \boxed{\text{ウ}}$ であり, $a + b$ の整数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 2次関数 $y = x^2 + ax + b$ は $x = 2$ のとき最小値1をとる。このとき $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。 $\tan \theta = 2$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{キ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 5個の数値からなるデータ 2, -1, a , 5, 3 の平均値は2である。このとき, $a = \boxed{\text{ケ}}$ であり, 標準偏差は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 1本100円の鉛筆を店Aでは10%引き, 店Bでは10本までは定価で11本目からは16%引きで売っている。Aで20本買うとき支払う金額は, Bで20本買うとき支払う金額より $\boxed{\text{サ}}$ 円少ない。またBで買うとき支払う金額が, Aで買うとき支払う金額より少なくなるのは, 鉛筆を $\boxed{\text{シ}}$ 本以上買うときである。
- (2) x 軸に接している放物線 $y = x^2 - 2ax + b$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動させると, グラフと y 軸との交点の y 座標が移動する前より5小さくなった。このとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 不定式 $x + 2 < x^2 < 5x - 4$ の解は $\boxed{\text{ソ}} < x < \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 7$ のとき, $\angle B = \boxed{\text{チ}}^\circ$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 5個の数値からなるデータ -3, -1, 1, 4, a の中央値は1である。このとき $a \geq \boxed{\text{テ}}$ であり, さらに範囲が8であれば $a = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 不等式 $|2x - 4| \leq x + 1$ を解くと $\boxed{\text{ナ}} \leq x \leq \boxed{\text{ニ}}$ である。この範囲を定義域とする関数 $y = -2x^2 + 8x - 1$ は $x = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。
- [4] $\triangle ABC$ において, $AC = 2$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ とする。辺BC上に, B, Cとは異なる点Pをとる。 $\triangle ABP$ と $\triangle APC$ の外接円の半径をそれぞれ r と R とすると, $\frac{r}{R} = \boxed{\text{ノ}}$ である。 $r + R$ の最小値は $\boxed{\text{ハ}}$ であり, このとき $BP = \boxed{\text{ヒ}}$, $PC = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) 左辺を整理すると

$$-ax^2 + (2a-1)xy + 2y^2 + (-a+2)x - 5y + 2 = -2x^2 + bxy + 2y^2 - 5y + 2$$

係数を比較して $-a = -2$, $2a - 1 = b$, $-a + 2 = 0$ これを解いて $a = 2$, $b = 3$

(答) ア. 2 イ. 3

(2) $a = \sqrt{13} - 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$ であるから

$$a + b = 2\sqrt{13} = \sqrt{52}, \quad 7 < \sqrt{52} < 8$$

よって, $a + b$ の整数部分は 7(答) ウ. $2\sqrt{13}$ エ. 7(3) 条件から, 与えられた 2 次関数は, x^2 の係数に注意して

$$y = (x-2)^2 + 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 4x + 5$$

よって $a = -4$, $b = 5$

(答) オ. -4 カ. 5

(4) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ により

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + 2^2 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $\cos \theta > 0$ であるから $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ また $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (答) キ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ク. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (5) 条件から $\frac{2 + (-1) + a + 5 + 3}{5} = 2$ これを解いて $a = 1$ したがって, 標準偏差 s は

$$s^2 = \frac{1}{5} \{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 5^2 + 3^2\} - 2^2 = 4 \quad \text{よって} \quad s = 2$$

(答) ケ. 1 コ. 2

- [2] (1) 店 A で鉛筆を 20 本買った金額は $100 \times 0.9 \times 20 = 1800$ 円
 店 B で鉛筆を 20 本買った金額は $100 \times 10 + 100 \times 0.84 \times 10 = 1840$ 円
 このとき、店 A で支払う金額は店 B で支払う金額より **40** 円少ない。
 また B で買うとき支払う金額が、A で買うとき支払う金額より少なくなる
 鉛筆の本数を x とすると

$$100 \times 10 + 100 \times 0.84 \times (x - 10) < 100 \times 0.9 \times x$$

これを解いて $x > \frac{80}{3} (= 26.6\cdots)$ よって **27** 本以上

(答) サ. 40 シ. 27

- (2) $y = x^2 - 2ax + b = (x - a)^2 + b - a^2$
 これが、 x 軸に接しているから $b - a^2 = 0$ すなわち $b = a^2 \cdots (*)$
 したがって、もとの放物線は $y = (x - a)^2 \cdots \textcircled{1}$
 これを x 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線の方程式は

$$y = (x - a - 1)^2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の y 軸との交点の y 座標は、それぞれ a^2 、 $(a + 1)^2$
 条件から $a^2 - (a + 1)^2 = 5$ これを解いて **$a = -3$** $(*)$ より **$b = 9$**
 (答) ス. -3 セ. 9

- (3) $x + 2 < x^2 < 5x - 4$
 $x + 2 < x^2$ これを解いて $x < -1, 2 < x \cdots \textcircled{1}$
 $x^2 < 5x - 4$ これを解いて $1 < x < 4 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて **$2 < x < 4$**

(答) ソ. 2 タ. 4

- (4) $a = 5$ 、 $b = 7$ 、 $c = 3$ であるから、余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad B = 120^\circ$$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$$

(答) チ. 120 ツ. $\frac{15}{4}\sqrt{3}$

- (5) 中央値が 1 であるとき **$a \geq 1$**
 さらに範囲が 8 であるとき $a - (-3) = 8$ よって **$a = 5$**
 (答) テ. 1 ト. 5

[3] $|2x - 4| \leq x + 1$ より $-(x + 1) \leq 2x - 4 \leq x + 1$

これを解いて $1 \leq x \leq 5$

$$y = -2x^2 + 8x - 1 = -2(x - 2)^2 + 7 \quad (1 \leq x \leq 5)$$

$x = 5$ のとき, 最小値 -11 をとる.

(答) ナ. 1 ニ. 5 ヌ. 5 ネ. -11

[4] $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad AB = \sqrt{2}$$

$\theta = \angle APB$ とし, 正弦定理を $\triangle ABP$ および $\triangle APC$ に適用すると

$$2r = \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta}, \quad 2R = \frac{2}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{2}{\sin \theta}$$

上の 2 式から $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r + R = \frac{\sqrt{2} + 2}{2 \sin \theta}$

また, $r + R$ は, $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ をとる.

このとき, $BP = 1, \quad PC = \sqrt{3}$

(答) ノ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ハ. $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ ヒ. 1 フ. $\sqrt{3}$

1.30 平成28年度一般試験(90分)

- [1] (1) $\frac{2-i}{2+i} + \frac{3+i}{3-i} = a + bi$ を満たす実数 a, b は, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし, i は虚数単位を表す。
- (2) ある直線 ℓ に関して, 点 $(-1, 1)$ と対称な点が $(1, 0)$ であるとき, 直線 ℓ の y 切片は $\boxed{\text{ウ}}$, 傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \boxed{\text{オ}}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 方程式 $3^x + 3^{3-x} = 12$ の解は $x = \boxed{\text{キ}}$ と $x = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 関数 $F(x)$ が, $F'(x) = 3x^2 - 8x + a$, $F(1) = F(2) = 0$ を満たすとき, 実数 a の値は $a = \boxed{\text{ケ}}$ であり, $F(x) = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを $ax + b$ とすると, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 点 $(2, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線と円と接点の x 座標は $x = \boxed{\text{ス}}$ と $x = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, 関数 $y = -2\cos\theta + \cos 2\theta$ の最小値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。また, そのときの θ の値は $\theta = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 不等式 $\log_5(x-3) + \log_5(x+1) < 1$ を解くと, $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 3次方程式 $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$ が異なる3つの実数解をもつための必要十分条件は $\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 正の実数 a に対して, x 軸上に点 $A(a, 0)$, y 軸上に点 $B\left(0, \frac{1}{a}\right)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を P とすると, P の座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 点 P の軌跡 C を表す方程式は $y = \boxed{\text{ニ}}$ (ただし $x > 0$) となる。線分 AB と軌跡 C は2点で交わるが, その交点のうち P でない方の点 Q の座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ となる。
- [4] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上の2点 $(0, 1)$, $(2, 3)$ における放物線の接線をそれぞれ ℓ , m とする。 ℓ と m の交点の y 座標が 0 である。このとき, $a = \boxed{\text{ノ}}$, $b = \boxed{\text{ハ}}$, $c = \boxed{\text{ヒ}}$ である。放物線と2つの接線 ℓ , m で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} + \frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} \\
 &= \frac{3-4i}{5} + \frac{8+6i}{10} = \frac{7-i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a = \frac{7}{5}, b = -\frac{1}{5}$$

$$(\text{答}) \text{ ア. } \frac{7}{5} \quad \text{イ. } -\frac{1}{5}$$

(2) ℓ は 2 点 $(-1, 1)$, $(1, 0)$ の垂直二等分線であるから,

$$2 \text{ 点の midpoint は } \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad 2 \text{ 点を通る直線の傾きは } \frac{0-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\ell \text{ の傾きを } m \text{ とすると } -\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{すなわち } m = 2$$

$$\ell \text{ は点 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ を通るから, } \ell \text{ の } y \text{ 切片は } \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ ウ. } \frac{1}{2} \quad \text{エ. } 2$$

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ より, $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\text{答}) \text{ オ. } \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{カ. } \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(4) $t = 3^x$ とおくと ($t > 0$), $3^{3-x} = \frac{27}{t}$ であるから

$$t + \frac{t}{27} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 12t + 27 = 0$$

$t > 0$ に注意してこれを解くと $t = 3, 9$ よって $x = 1, 2$

(答) キ. ク. 1, 2

(5) $F'(x) = 3x^2 - 8x + a$ より

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + ax + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$F(1) = F(2) = 0 \text{ より}$$

$$a + C - 3 = 0, \quad 2a + C - 8 = 0$$

ゆえに $a = 5, C = -2$ よって $F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

(答) ケ. 5 コ. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

[2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$(x-1)^5 = x(x-1)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = 0, x = 1$ をそれぞれ代入すると

$$-1 = b, \quad 0 = a + b \quad \text{これを解いて} \quad a = 1, b = -1$$

(答) サ. 1 シ. -1

(2) 接点の座標を (a, b) とすると, 接点は円周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 (a, b) における円の接線の方程式は $ax + by = 1$

これが点 $(2, 1)$ を通るから

$$2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } (a, b) = (0, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

よって, 求める接点の x 座標は $x = 0, \frac{4}{5}$

(答) ス. セ. $0, \frac{4}{5}$

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ より, $t = \cos \theta$ とおくと ($-1 \leq t \leq 1$)

$$\begin{aligned} y &= -2 \cos \theta + \cos 2\theta = -2 \cos \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 2t^2 - 2t - 1 = 2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって $t = \frac{1}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{3}{2}$

(答) ソ. $-\frac{3}{2}$ タ. $\frac{\pi}{3}$

(4) $\log_5(x-3) + \log_5(x+1) < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

真数は正であるから

$$x-3 > 0, \quad x+1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① から $\log_5(x-3)(x+1) < \log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから

$$(x-3)(x+1) < 5 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-4) < 0$$

② に注意して, これを解くと $3 < x < 4$

(答) チ. 3 ツ. 4

(5) $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0 \cdots \textcircled{1}$ より $a = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ とおくと, 方程式 ① が, 異なる 3 つの実数解をもつのは, 直線 $y = a$ と曲線 $y = f(x)$ が 3 点を共有するときである.

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$f(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	20	$\searrow$

よって, 求める a の値の範囲は $-7 < a < 20$

(答) テ. -7 ト. 20

[3] Pは $A(a, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{a}\right)$ を $1:2$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{2a+1\cdot 0}{1+2}, \frac{2\cdot 0+1\cdot \frac{1}{a}}{1+2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right)$$

$$x = \frac{2a}{3}, \quad y = \frac{1}{3a} \quad \text{と} \quad \text{おいて, } a \text{ を消去すると } C: xy = \frac{2}{9} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{直線 AB の方程式は } \frac{x}{a} + ay = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } (x, y) = \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right), \left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right) \quad \text{よって} \quad Q\left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{a}{3} - \frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3} - \frac{1}{3a}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{9} \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \right\} \geq \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{よって, PQ の最小値は } \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{(答) ナ. } \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right) \quad \text{ニ. } \frac{2}{9x} \quad \text{ヌ. } \left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right) \quad \text{ネ. } \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[4] ℓ と m の交点の x 座標は $\frac{0+2}{2} = 1$

ゆえに ℓ と m の交点の座標は $(1, 0)$

ℓ は, 2 点 $(0, 1), (1, 0)$ を通る直線であるから

$$y - 1 = \frac{0 - 1}{1 - 0}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 1$$

m は, 2 点 $(1, 0), (2, 3)$ を通る直線であるから

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{2 - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 3$$

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると $y' = 2ax + b$

接線の傾きにより $x = 0$ のとき $y' = -1$, $x = 2$ のとき $y' = 3$

したがって $b = -1$, $4a + b = 3$ ゆえに $a = 1$

この放物線は点 $(0, 1)$ を通ることから $c = 1$

よって, 求める面積は a の値と接点の x 座標に注意して

$$\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (2 - 0)^3 = \frac{2}{3}$$

(答) ノ. 1 ハ. -1 ヒ. 1 フ. $\frac{2}{3}$

1.31 平成27年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $2x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y - 3$ を因数分解すると, $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $9 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ ($p > q$) をみたす整数は $p = \boxed{\text{ウ}}$, $q = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 連立不等式 $3x + 2 < 2x + 5$, $4x + 3 \geq 2x - 1$ の解は $\boxed{\text{オ}} \leq x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 2次方程式 $x^2 - 4x - 7 = 0$ の解は, $x = \boxed{\text{キ}} \pm \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\tan \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) m を 0 でない実数とする。2つの異なる2次方程式 $x^2 - (m+1)x - m^2 = 0$, $x^2 - 2mx - m = 0$ が共通の解を持つとき, 実数 m の値は $\boxed{\text{サ}}$ であり, 共通の解は $\boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2次関数 $y = 2x^2 + ax + b$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動した関数のグラフが $y = 2x^2 + 6x + 7$ のグラフと一致するならば, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2次関数 $y = -2x^2 + 4x + k$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が 4 であるとき, 定数 k の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。また, このとき最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $x^2 - 4x - 5 < 0 < -2x^2 + 2x + 12$ が成り立つ x の範囲は $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $2\cos \theta + 1 \geq 0$ を満たす θ の範囲は $\boxed{\text{テ}}^\circ \leq \theta \leq \boxed{\text{ト}}^\circ$ である。
- [3] $x+y = a$, $xy = b$ とおく。 x^2+y^2 , x^3+y^3 を a , b を用いて表すと $x^2+y^2 = \boxed{\text{ナ}}$, $x^3+y^3 = \boxed{\text{ニ}}$ である。また, $x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - \boxed{\text{ヌ}}$ となるので, x^5+y^5 を a , b を用いて表すと $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\angle A = 60^\circ$ である三角形 ABC において, $\angle B = \theta$ とし, A より辺 BC に下ろした垂線の足を P とする。 $AB = a$ とおくとき, $AC = \frac{3}{2}a$ であるならば, $BC = \boxed{\text{ノ}}a$ で $\cos \theta = \boxed{\text{ハ}}$ である。これより, BC は BP の $\boxed{\text{ヒ}}$ 倍で, $AP = \boxed{\text{フ}}a$ である。

解答例

[1] (1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned}
 2x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y - 3 &= 2x^2 + (3y + 1)x + (y - 1)(y + 3) \\
 &= \{x + (y - 1)\}\{2x + (y + 3)\} \\
 &= (x + y - 1)(2x + y + 3)
 \end{aligned}$$

(答) ア. 1. $x + y - 1$, $2x + y + 3$

$$(2) \quad 9 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \text{ より } 9 - 2\sqrt{18} = p + q - 2\sqrt{pq}$$

したがって $p + q = 9$, $pq = 18$ これをみたす整数 p , q ($p > q$) は $p = 6$, $q = 3$

(答) ウ. 6 エ. 3

$$(3) \quad 3x + 2 < 2x + 5 \text{ を解いて } x < 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$4x + 3 \geq 2x - 1 \text{ を解いて } x \geq -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-2 \leq x < 3$

(答) オ. -2 カ. 3

$$(4) \quad x^2 - 4x - 7 = 0 \text{ を解いて } x = 2 \pm \sqrt{11}$$

(答) キ. 2 ク. 11

(5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

(答) ケ. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ コ. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

- [2] (1) 異なる2つの2次方程式 $x^2 - (m+1)x - m^2 = 0$, $x^2 - 2mx - m = 0$ の共通解を α とすると

$$\begin{cases} \alpha^2 - (m+1)\alpha - m^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2 - 2m\alpha - m = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② の辺々を引くと

$$(m-1)\alpha - m^2 + m = 0 \quad \text{すなわち} \quad (m-1)(\alpha - m) = 0$$

$m=1$ のとき, 2つの方程式は一致するから $\alpha = m \quad \cdots \textcircled{3}$

これを ① に代入すると

$$m^2 - (m+1)m - m^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (m+1)m = 0$$

$m \neq 0$ であるから $m = -1$ また, ③ より $\alpha = -1$

(答) サ. -1 シ. -1

- (2) $y = 2x^2 + 6x + 7$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y + 2 = 2(x-1)^2 + 6(x-1) + 7 \quad \text{すなわち} \quad y = 2x^2 + 2x + 1$$

これが $y = 2x^2 + ax + b$ に一致するから $a = 2, b = 1$

(答) ス. 2 セ. 1

- (3) $y = -2x^2 + 4x + k$ を変形すると $y = -2(x-1)^2 + k + 2$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ のとき} \quad k - 6 \leq y \leq k + 2$$

最大値が 4 であるから $k + 2 = 4$ すなわち $k = 2$

このとき, 最小値は $k - 6 = -4$

(答) ソ. 2 タ. -4

- (4) $x^2 - 4x - 5 < 0$ より $(x+1)(x-5) < 0$

$$\text{すなわち} \quad -1 < x < 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 < -2x^2 + 2x + 12 \text{ より} \quad (x+2)(x-3) < 0$$

$$\text{すなわち} \quad -2 < x < 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の共通範囲を求めて $-1 < x < 3$

(答) チ. -1 ツ. 3

- (5) $\cos \theta \geq -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を解いて $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$

(答) テ. 0 ト. 120

[3] $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$$

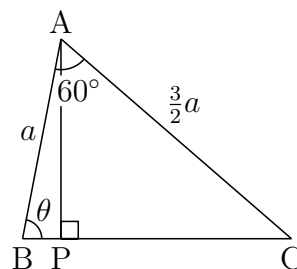
$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$ であるから, 上の 2 式から

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (a^2 - 2b)(a^3 - 3ab) - ab^2 \\ &= a^5 - 5a^3b + 5ab^2 \end{aligned}$$

(答) ナ. $a^2 - 2b$ ニ. $a^3 - 3ab$ ヌ. ab^2 ネ. $a^5 - 5a^3b + 5ab^2$

[4] 余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cos 60^\circ \\ &= \frac{7}{4}a^2 \end{aligned}$$



$BC > 0$ より $BC = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

また $\cos \theta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

$$BP = a \cos \theta = \frac{a}{2\sqrt{7}} \quad \frac{BC}{BP} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{\frac{a}{2\sqrt{7}}} = 7$$

したがって, BC は BP の 7 倍

さらに $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

よって $AP = a \sin \theta = \frac{3\sqrt{21}}{14}a$

(答) ノ. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ハ. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ ヒ. 7 フ. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

1.32 平成27年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $2x^2 - 2y^2 + 3xy - 5x + 5y - 3 = (x + ay + b)(2x + cy + 1)$ ならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $\sqrt{50} - \sqrt{8} + 3\sqrt{18} = a\sqrt{b}$ とおく。ただし, a, b は整数とする。このとき, $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 1冊200円のノートAと1冊130円のノートBを合計13冊購入する。2000円を支払ったとき, Aは最大 $\boxed{\text{オ}}$ 冊購入でき, そのときのおつりは $\boxed{\text{カ}}$ 円である。
- (4) 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 2$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動させると, 2点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通る。このとき, $p = \boxed{\text{キ}}$, $q = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $\tan \alpha = 3$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ならば, $\sin \alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\cos \alpha = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $a = \frac{1}{\sqrt{6}-2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}+2}$ のとき, $a^2 + b^2 = \boxed{\text{サ}}$, $a^2 - b^2 = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $-\frac{1}{2}x + |x - 2| < 3$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{ス}} < x < \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2次不等式 $x^2 + (k+3)x - k > 0$ の解が, すべての実数となるとき, 定数 k の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < k < \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $a > 0$ のとき, $y = -x^2 + 2ax + b$ の $\frac{a}{2} \leq x \leq 2a$ における最大値が5で最小値が1ならば, $a = \boxed{\text{チ}}$, $b = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 1辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて, 辺BCの中点をMとすると, $DM = \boxed{\text{テ}}$ である。これより, $\cos \angle ADM = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 定数 $a > 0$ に対して, 2次関数 $y = -ax^2 + 2x + 1$ のグラフ C の x 軸との2交点間の距離を d_1 とすると, $d_1 = \boxed{\text{ナ}}$ である。また, C の頂点Pと x 軸との距離を d_2 とすると, $d_2 = \boxed{\text{ニ}}$ である。したがって, $d_1 = d_2$ となるのは $a = \boxed{\text{ヌ}}$ のときで, そのとき, $d_1 = d_2 = \boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\triangle ABC$ において, $AC = 2$, $BC = 1$, $AB = c$, その外接円の半径を R とする。 $\cos A \sin B$, $\sin A \cos B$ を c, R を用いて表すと, $\cos A \sin B = \boxed{\text{ノ}}$, $\sin A \cos B = \boxed{\text{ハ}}$ である。 $\cos A \sin B = 4 \sin A \cos B$ が成り立つとき, $c = \boxed{\text{ヒ}}$, $R = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 2y^2 + 3xy - 5x + 5y - 3 &= 2x^2 + (3y - 5)x - (y - 1)(2y - 3) \\
 &= \{x + (2y - 3)\}\{2x - (y - 1)\} \\
 &= (x + 2y - 3)(2x - y + 1)
 \end{aligned}$$

(答) ア. 2 イ. -3

$$(2) \sqrt{50} - \sqrt{8} + 3\sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

(答) ウ. 9 エ. 2

(3) ノート A を x 冊, ノート B を $13 - x$ 冊購入すると

$$200x + 130(13 - x) \leq 2000 \quad \text{ゆえに} \quad x \leq \frac{31}{7}$$

上式をみたす最大の整数 x は 4

このとき, 支払う代金は

$$200 \times 4 + 130 \times 9 = 1970 \quad (\text{円})$$

よって, おつりは $2000 - 1970 = 30$ (円)

(答) オ. 4 カ. 30

(4) $y = 2x^2 + bx + c$ が 2 点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通るとき

$$b + c = 4, \quad 3b + c = -18 \quad \text{これを解いて} \quad b = -11, \quad c = 15$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \quad \text{頂点} \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$$

$$y = 2x^2 - 11x + 15 = 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad \text{頂点} \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$\text{よって} \quad p = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2, \quad q = -\frac{1}{8} - \frac{7}{8} = -1$$

(答) キ. 2 ク. -1

(5) $\tan \alpha = 3$ を $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ に代入すると

$$1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad \text{より} \quad \cos \alpha > 0 \quad \text{であるから} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{また} \quad \sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(答) ケ. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ コ. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

$$[2] (1) a = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$\text{ゆえに } a+b=\sqrt{6}, \quad a-b=2, \quad ab=\frac{1}{2}$$

$$\text{よって } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{6})^2-2\cdot\frac{1}{2}=5$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=2\sqrt{6}$$

(答) サ. 5 シ. $2\sqrt{6}$

$$(2) \quad -\frac{1}{2}x + |x-2| < 3$$

i) $x < 2$ のとき

$$-\frac{1}{2}x - (x-2) < 3 \quad \text{これを解いて} \quad x > -\frac{2}{3}$$

$$\text{条件に注意して} \quad -\frac{2}{3} < x < 2$$

ii) $x \geq 2$ のとき

$$-\frac{1}{2}x + (x-2) < 3 \quad \text{これを解いて} \quad x < 10$$

$$\text{条件に注意して} \quad 2 \leq x < 10$$

$$\text{よって, i), ii) の結果から} \quad -\frac{2}{3} < x < 10$$

(答) ス. $-\frac{2}{3}$ セ. 10

(3) 2次不等式 $x^2 + (k+3)x - k > 0$ の解が, すべての実数となるのは, 2次関数 $y = x^2 + (k+3)x - k$ のグラフが x 軸と共有点をもたないときであるから

$$(k+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) < 0 \quad \text{すなわち} \quad (k+9)(k+1) < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -9 < k < -1$$

(答) ソ. -9 タ. -1

$$(4) \quad y = -x^2 + 2ax + b = -(x-a)^2 + a^2 + b \quad \left(\frac{a}{2} \leq a \leq 2a\right)$$

$x = a$ のとき最大値 $a^2 + b$, $x = 2a$ のとき最小値 b

$$\text{したがって} \quad a^2 + b = 5, \quad b = 1$$

$a > 0$ に注意して, 第2式を第1式に代入すると $a = 2$

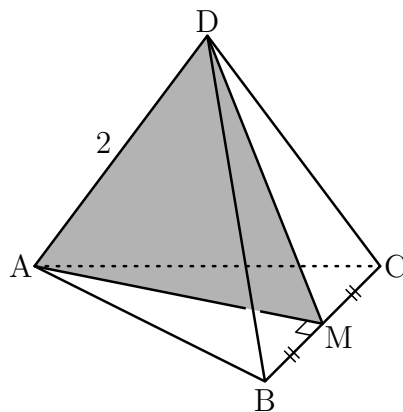
(答) チ. 2 ツ. 1

(5) 右の図から

$$DM = AM = \sqrt{3}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos \angle ADM &= \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



(答) テ. $\sqrt{3}$ ト. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

[3] $C: y = -ax^2 + 2x + 1 = -a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1+a}{a}$

C と x 軸との共有点の x 座標は, $-ax^2 + 2x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$$

したがって $d_1 = \frac{1 + \sqrt{1+a}}{a} - \frac{1 - \sqrt{1+a}}{a} = \frac{2\sqrt{1+a}}{a}$

C の頂点の y 座標から $d_2 = \frac{1+a}{a}$

$d_1 = d_2$ のとき $\frac{2\sqrt{1+a}}{a} = \frac{1+a}{a}$ ゆえに $\sqrt{1+a} = 2$ よって $a = 3$

このとき $d_1 = d_2 = \frac{4}{3}$

(答) ナ. $\frac{2\sqrt{1+a}}{a}$ ニ. $\frac{1+a}{a}$ ヌ. 3 ネ. $\frac{4}{3}$

[4] $a = 1, b = 2$ を正弦定理に適用すると $\frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sin B} = 2R$

$$\text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{1}{2R}, \quad \sin B = \frac{1}{R}$$

$a = 1, b = 2$ を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + c^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot c} = \frac{c^2 + 3}{4c} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c^2 + 1^2 - 2^2}{2 \cdot c \cdot 1} = \frac{c^2 - 3}{2c} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \cos A \sin B &= \frac{c^2 + 3}{4c} \times \frac{1}{R} = \frac{c^2 + 3}{4cR} \\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2R} \times \frac{c^2 - 3}{2c} = \frac{c^2 - 3}{4cR} \end{aligned}$$

$\cos A \sin B = 4 \sin A \cos B$ が成り立つとき, 上式から

$$c^2 + 3 = 4(c^2 - 3) \quad \text{これを解いて} \quad c = \sqrt{5}$$

$$\text{このとき} \quad \cos A = \frac{(\sqrt{5})^2 + 3}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \frac{1}{2R} \quad \text{より} \quad R = \frac{1}{2 \sin A} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \text{ノ. } \frac{c^2 + 3}{4cR} \quad \text{ハ. } \frac{c^2 - 3}{4cR} \quad \text{ヒ. } \sqrt{5} \quad \text{フ. } \frac{\sqrt{5}}{2}$$

1.33 平成 27 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) 整式 $f(x)$ を $x - 1$ で割ると余りは 3, $x - 2$ で割ると余りは 4 となる。このとき, $f(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割った余りを $ax + b$ とおくと, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 直線 $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ の交点と点 $(-3, 5)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して, $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ が成り立つならば, $\sin \theta - \cos \theta = \boxed{\text{オ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $a, b > 0$ が $ab = \frac{1}{4}$, $\log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b = -2$ をみたすなら, $a = \boxed{\text{キ}}$, $b = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 直線 $y = x$ と放物線 $y = -x(x - 2)$ の交点の x 座標は 0 と $\boxed{\text{ケ}}$ である。したがって, 直線と放物線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) a, b を実数とすると, 方程式 $x^3 - ax^2 - x - b = 0$ が $x = -1 + 2i$ を 1 つの解としてもつなら, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 3 点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$ を通る円の中心は $\boxed{\text{ス}}$ で半径は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\tan x = 2$ のとき, $\cos^2 x = \boxed{\text{ソ}}$, $\sin 2x = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 関数 $y = 4^{x+1} - 2^{x+3} + 7$ は, $x = \boxed{\text{チ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ツ}}$ をとる。
- (5) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ の $0 \leq x \leq 3$ における最小値は $\boxed{\text{テ}}$ で最大値は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 2 点 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ 間の距離は $\boxed{\text{ナ}}$ である。放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ 上の点 P の x 座標を a とするとき, $\triangle PAB$ の面積 S は $S = \boxed{\text{ニ}}$ である。点 P が放物線上を動くとき, $P = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき S は最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。
- [4] 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ ($a > 0$) における C の接線は $l_1: y = \boxed{\text{ノ}}$ である。放物線 C , 接線 l_1 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_1 は $\boxed{\text{ハ}}$ である。また, 点 P を通り l_1 と垂直な直線を l_2 とするとき, 放物線 C , 直線 l_2 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_2 は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。特に, S_2 が S_1 の 5 倍となるのは $a = \boxed{\text{フ}}$ のときである。

解答例

- [1] (1) 剰余の定理により $f(1) = 3$, $f(2) = 4$

$f(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

上式に, それぞれ $x = 1, 2$ を代入すると $a + b = 3, 2a + b = 4$

これを解いて $a = 1, b = 2$

(答) ア. 1 イ. 2

(2) 2直線 $2x - y + 1 = 0, x + y - 4 = 0$ の交点を通る直線は, 定数 k を用いて

$$2x - y + 1 + k(x + y - 4) = 0$$

これが, 点 $(-3, 5)$ を通るから

$$-10 + k(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -5$$

したがって $2x - y + 1 - 5(x + y - 4) = 0$ すなわち $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

(答) ウ. $-\frac{1}{2}$ エ. $\frac{7}{2}$

(3) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$ であるから

これに $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdots \textcircled{1}$ を代入すると

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{1}{5}$$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ であるから

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(答) オ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ カ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$(4) \quad ab = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b = -2 \text{ より}$$

$$\log_2 ab^{\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{ゆえに} \quad ab^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ で辺々を割ると } b^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = 1$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } a = \frac{1}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{1}{4} \quad \text{ク. } 1$$

$$(5) \quad y = x \text{ と } y = -x(x-2) \text{ から } y \text{ を消去すると}$$

$$x = -x(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad x(x-1) = 0$$

よって、交点の x 座標は 0 と 1 である.

したがって、求める面積は、 x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{6} \cdot 1(1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } 1 \quad \text{コ. } \frac{1}{6}$$

[2] (1) a, b は実数であるから、方程式の解を

$$-1 + 2i, \quad -1 - 2i, \quad \gamma$$

とおくと、解と係数の関係により

$$a = -2 + \gamma, \quad -1 = 5 - 2\gamma, \quad b = 5\gamma$$

$$\text{これを解いて} \quad \gamma = 3, \quad a = 1, \quad b = 15$$

$$(\text{答}) \text{ サ. } 1 \quad \text{シ. } 15$$

- (2) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおくと、この円が3点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$ を通るから

$$a + b + c = -2, \quad 2a + 3b + c = -13, \quad -a + c = -1$$

これを解いて $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$

したがって $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 2 = 0$

$$\text{すなわち} \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

よって、中心 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, 半径 $\frac{5}{\sqrt{2}}$

$$\text{(答) ス. } \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad \text{セ. } \frac{5}{\sqrt{2}}$$

- (3) $\tan x = 2$ を $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{よって} \quad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\text{また} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \tan x \cos^2 x = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{(答) ソ. } \frac{1}{5} \quad \text{タ. } \frac{4}{5}$$

- (4) $t = 2^x$ とおくと $y = 4t^2 - 8t + 7 = 4(t-1)^2 + 3$
 $t = 1$ すなわち $x = 0$ のとき、最小値 3

$$\text{(答) チ. } 0 \quad \text{ツ. } 3$$

- (5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ を微分すると

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	6	$\searrow$	-14	$\nearrow$	-3

$0 \leq x \leq 3$ における最小値は -14, 最大値は 6

$$\text{(答) テ. } \sqrt{3} \quad \text{ト. } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

[3] A(1, 1), B(2, 3) 間の距離は $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

直線 AB の方程式は

$$y - 1 = \frac{3-1}{2-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad 2x - y - 1 = 0$$

P(a, $a^2 + 4a + 1$) から直線 AB までの距離を d とすると

$$d = \frac{|2a - (a^2 + 4a + 1) - 1|}{2^2 + (-1)^2} = \frac{|a^2 + 2a + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{(a+1)^2 + 1}{\sqrt{5}}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{(a+1)^2 + 1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(a+1)^2 + \frac{1}{2}$$

よって, $a = -1$ すなわち P(-1, -2) のとき, S の最小値 $\frac{1}{2}$

(答) ナ. $\sqrt{5}$ ニ. $\frac{1}{2}(a+1)^2 + \frac{1}{2}$ ヌ. (-1, -2) ネ. $\frac{1}{2}$

[4] $y = x^2$ より $y' = 2x$

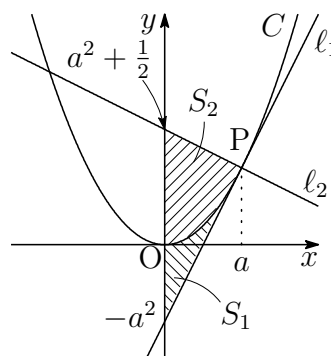
ℓ_1 の方程式は $y - a^2 = 2a(x - a)$

すなわち $y = 2ax - a^2$

ℓ_2 の方程式は $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$

すなわち $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$

右の図から



$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) - (-a^2) \right\} = a^3 + \frac{1}{4}a$$

また

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \int_0^a (x - a)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 \\ S_2 &= (S_1 + S_2) - S_1 = a^3 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

S_2 が S_1 の 5 倍であるとき

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a = 5 \times \frac{1}{3}a^3 \quad \text{整理すると} \quad a(2a + 1)(2a - 1) = 0$$

$a > 0$ であるから $a = \frac{1}{2}$

(答) ノ. $2ax - a^2$ ハ. $\frac{1}{3}a^3$ ヒ. $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a$ フ. $\frac{1}{2}$

1.34 平成 26 年度推薦前期試験 (90 分)

- [1] (1) $(2x - y + a)(x + by - 3) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy - 3x + 9y - 9$ ならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $(x + 1)^2 + 4(x + 1) - 1 = 0$ の解は $x = \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $x = 2$ が 2 次方程式 $mx^2 - 3x - m = 0$ の 1 つの解であるならば, 実数 m の値は $\boxed{\text{オ}}$ であり, 残りの解は $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 2 次不等式 $ax^2 + bx + 3 > 0$ をみたす x の範囲が $-2 < x < 3$ ならば, $a = \boxed{\text{キ}}, b = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ のとき, $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}, \tan \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $x = \sqrt{3} - 1$ のとき, $x + \frac{2}{x} = \boxed{\text{サ}}, x^2 + \frac{4}{x^2} = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $x^2 + y^2 = 1$ のとき, $x + y^2$ の最大値は $\boxed{\text{ス}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2 次曲線 $C: y = ax^2 + bx - 19$ と点 $P(2, -1)$ に対して, C を x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線と, C を y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線が共に点 P を通るなら, $a = \boxed{\text{ソ}}, b = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において $\angle B = 120^\circ$, $BC = 6$, 外接円の半径が 6 であるとき, $\angle A = \boxed{\text{チ}}^\circ$, $AC = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $2\sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) をみたす θ は, $\boxed{\text{テ}}^\circ, \boxed{\text{ト}}^\circ$ である。
- [3] 2 つの整式を $A = x^4 + 8x^3 + ax^2 + 2x + 3$, $B = x^2 + bx + 1$ とする。このとき $B^2 = x^4 + 2bx^3 + \boxed{\text{ナ}}x^2 + 2bx + 1$ である。 $C = A - B^2$ が x の 1 次式になるとき $a = \boxed{\text{ニ}}, b = \boxed{\text{ヌ}}$ であり, $C = \boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\triangle ABC$ において, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とする。

$$\frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = \frac{a+b}{6}$$

であるとき, この共通の値を $2k$ とおく。このとき a, b, c を k を用いて表すと $a = \boxed{\text{ノ}}, b = \boxed{\text{ハ}}, c = \boxed{\text{ヒ}}$ で, $\angle A = \boxed{\text{フ}}^\circ$ である。 $\triangle ABC$ の面積が $3\sqrt{3}$ のとき $a = \boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

[1] (1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 + 3xy - 3x + 9y - 9 &= 2x^2 + (3y - 3)x - (y - 3)(2y - 3) \\ &= \{2x - (y - 3)\}\{x + (2y - 3)\} \\ &= (2x - y + 3)(x + 2y - 3) \end{aligned}$$

よって $\mathbf{a = 3, \quad b = 2}$

(答) ア. 3 イ. 2

(2) $(x + 1)^2 + 4(x + 1) - 1 = 0$ より

$$(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 4 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad \{(x + 1) + 2\}^2 = 5$$

したがって $x + 3 = \pm\sqrt{5}$ よって $\mathbf{x = -3 \pm \sqrt{5}}$

(答) ウ. エ. $-3 \pm \sqrt{5}$

(3) $x = 2$ が 2 次方程式 $mx^2 - 3x - m = 0$ の解であるから

$$m \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - m = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{m = 2}$$

したがって, 2 次方程式は

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x - 2)(2x + 1) = 0$$

よって, 残りの解は $\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$

(答) オ. 2 カ. $-\frac{1}{2}$

(4) $-2 < x < 3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x + 2)(x - 3) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 6 < 0$$

定数項に注意して

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 > 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}}$$

(答) キ. $-\frac{1}{2}$ ク. $\frac{1}{2}$

(5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4} \div \left(-\frac{1}{4}\right) = -\sqrt{15}$$

(答) ケ. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ コ. $-\sqrt{15}$

[2] (1) $x = \sqrt{3} - 1$ より

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{x} &= \sqrt{3} - 1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \sqrt{3} - 1 + \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{また } x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4 = (2\sqrt{3})^2 - 4 = 8$$

(答) サ. $2\sqrt{3}$ シ. 8

(2) $x^2 + y^2 = 1$ より $y^2 = 1 - x^2$ … ①

① より $1 - x^2 \geq 0$ すなわち $-1 \leq x \leq 1$

$$x + y^2 = x + (1 - x^2) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって, $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$, $x = -1$ のとき最小値 -1

(答) ス. $\frac{5}{4}$ セ. -1

(3) P(2, -1) を x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけそれぞれ平行移動した点は

$$(3, -1), (2, -3)$$

これらは $C: y = ax^2 + bx - 19$ 上にあるから

$$-1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 19, \quad -3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 19$$

整理すると $3a + b = 6, 2a + b = 8$

これを解いて $a = -2, b = 12$

(答) ソ. -2 タ. 12

(4) $a = 6, B = 120^\circ, R = 6$ を正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$$

に代入すると

$$\frac{6}{\sin A} = \frac{b}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 6$$

ゆえに $\sin A = \frac{1}{2}, b = 12 \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$

$B = 120^\circ$ より, $A < 60^\circ$ であるから $A = 30^\circ$

(答) チ. 30 ツ. $6\sqrt{3}$

(5) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) より

$$2(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

したがって $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$ よって $\theta = 60^\circ, 180^\circ$

(答) テ. ト. $60^\circ, 180^\circ$

[3] $B = x^2 + bx + 1$ より

$$\begin{aligned} B^2 &= (x^2 + bx + 1)^2 \\ &= (x^2)^2 + (bx)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot bx + 2 \cdot bx \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x^2 \\ &= x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2)x^2 + 2bx + 1 \\ C &= A - B \\ &= (8 - 2b)x^3 + (a - b^2 - 2)x^2 + (2 - 2b)x + 2 \end{aligned}$$

C が x の1次式であるから

$$8 - 2b = 0, \quad a - b^2 - 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad b = 4, \quad a = 18$$

このとき $C = -6x + 2$

(答) ナ. $b^2 + 2$ ニ. 18 ヌ. 4 ネ. $-6x + 2$

[4] $\frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = \frac{a+b}{6} = 2k$ であるから

$$b + c = 8k \cdots \textcircled{1}, \quad c + a = 10k \cdots \textcircled{2}, \quad a + b = 12k \cdots \textcircled{3}$$

上の3式の辺々を加えると

$$2a + 2b + 2c = 30k \quad \text{よって} \quad a + b + c = 15k \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より $a = 7k$ これを②, ③に代入して $b = 5k, c = 3k$

余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = -\frac{1}{2}$$

したがって $A = 120^\circ$

$\triangle ABC$ の面積より, $\frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 3k \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{よって} \quad a = 7k = 7 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

(答) ノ. $7k$ ハ. $5k$ ヒ. $3k$ フ. 120° ヘ. $\frac{14\sqrt{5}}{5}$

1.35 平成 26 年度推薦後期試験 (90 分)

- [1] (1) $(2x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$ を展開したときの x^3 の係数は , x^2 の係数は である。
- (2) $\frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{n\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 2(\sqrt{15} - 1)$ をみたす整数 m, n は $m =$, $n =$ である。
- (3) 方程式 $|x - 5| = \frac{1}{2}x + 1$ の解は , である。
- (4) 2 次関数 $y = -x^2 + 6x - 6$ の $1 \leq x \leq 6$ における最大値は で、最小値は である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ ならば、 $\sin \theta =$, $\cos \theta =$ である。
- [2] (1) $2a^2 - 2b^2 - 3c^2 - 3ab + 7bc - ac$ を因数分解すると $\times$ となる。
- (2) 区間 $-1 \leq x \leq 3$ において $x^2 - 4x - a^2 + 4a < 0$ であるとき、定数 a の範囲は $a <$, $a >$ である。
- (3) 放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ が x 軸の正の部分で x 軸に接し、点 $(1, 4)$ を通るならば、定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において、 $AB = 2$, $CA = 1$ とする。角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると、 $\triangle ABD$ の面積は $\triangle ACD$ の面積の 倍である。このとき、 $BC = \frac{9}{4}$ ならば $BD =$ である。
- (5) 底面の半径が 2cm で高さが $h\text{cm}$ の円柱を D とする。 D と相似な円柱 E の高さが 9cm で、その体積が D の体積の $\frac{27}{8}$ 倍であるなら、 E の底面の半径は cm で、 $h =$ cm である。
- [3] 放物線 $C_1 : y = x^2 + 2x - 1$ 上に 2 点 $P(-2, -1)$, $Q(1, 2)$ をとる。別の放物線 $C_2 : y = -ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) が P, Q を通るなら、 b, c は a を用いて $b =$, $c =$ と書ける。このとき、 $-2 < p < 1$ をみたす p に対して、 y 軸に平行な直線 $x = p$ と C_1 の交点 R および直線 $x = p$ と C_2 の交点 S の間の距離 RS は $p =$ のとき、最大値 をとる。

- [4] 2 辺 AD, BC が平行な台形 ABCD において, $AD = 2$, $BC = 4$, $CD = 1$, $\angle BCD = 60^\circ$ とすると ABCD の面積は ノ である。辺 AD 上の点 P と BC 上の点 Q を, 線分 PQ が辺 AD に垂直で四辺形 ABCD の面積を 2 等分するようにとる。このとき $PD = x$ とおくと, 四辺形 PQCD の面積は x を用いると, ハ であるから, $x =$ ヒ である。また, $\angle ABC = \alpha^\circ$ とおくと $\tan \alpha^\circ =$ フ であるから $\alpha =$ ヘ である。

解答例

- [1] (1) $(2x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$ を展開したとき

$$x^3 \text{ の係数は } 2 \times 1 + 1 \times 1 = \mathbf{3}$$

$$x^2 \text{ の係数は } 2 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = \mathbf{0}$$

(答) ア. 3 イ. 0

$$(2) \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{n\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 2(\sqrt{15} - 1) \text{ より}$$

$$m\sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + n\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 4(\sqrt{15} - 1)$$

$$(m + n)\sqrt{15} + (-3m + 5n) = 4\sqrt{15} - 4$$

$m + n$, $-3m + 5n$ は有理数であるから

$$m + n = 4, \quad -3m + 5n = -4$$

これを解いて $\mathbf{m = 3, n = 1}$

(答) ウ. 3 エ. 1

$$(3) |x - 5| = \frac{1}{2}x + 1 \text{ より } \frac{1}{2}x + 1 \geq 0 \text{ すなわち } x \geq -2$$

i) $x \geq 5$ のとき

$$x - 5 = \frac{1}{2}x + 1 \text{ これを解いて } x = 12$$

ii) $-2 \leq x < 5$ のとき

$$-(x - 5) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ これを解いて } x = \frac{8}{3}$$

よって $\mathbf{x = 12, \frac{8}{3}}$

(答) オ. 12 カ. $\frac{8}{3}$

- (4) $y = -x^2 + 6x - 6$ を変形すると $y = -(x - 3)^2 + 3$
 よって $x = 3$ のとき最大値 **3**, $x = 6$ のとき最小値 **-6**

(答) キ. 3 ク. -6

- (5) $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ を $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ に代入すると

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{2} < 0 \text{ より } \theta \text{ は鈍角であるから } \cos \theta < 0$$

$$\text{よって } \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{(答) ケ. } \frac{1}{\sqrt{5}} \quad コ. -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- [2] (1) $2a^2 - 2b^2 - 3c^2 - 3ab + 7bc - ac$ を a について整理すると

$$\begin{aligned} 2a^2 + (-3b - c)a - 2b^2 + 7bc - 3c^2 &= 2a^2 + (-3b - c)a - (b - 3c)(2b - c) \\ &= \{a - (2b - c)\}\{2a + (b - 3c)\} \\ &= (\mathbf{a - 2b + c})(\mathbf{2a + b - 3c}) \end{aligned}$$

(答) サ. シ. $a - 2b + c$, $2a + b - 3c$

- (2) $f(x) = x^2 - 4x - a^2 + 4a = (x - 2)^2 - a^2 + 4a - 4$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値は

$$f(-1) = -a^2 + 4a + 5$$

このとき, $f(-1) < 0$ であるから

$$-a^2 + 4a + 5 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 1)(a - 5) > 0$$

これを解いて $\mathbf{a < -1, a > 5}$

(答) ス. -1 セ. 5

- (3) $y = x^2 + 2ax + b$ は x 軸に接するから

$$y = (x + a)^2 \quad b = a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

接点 $(-a, 0)$ の x 座標は正であるから

$$-a > 0 \quad \text{すなわち} \quad a < 0$$

$y = (x + a)^2$ は点 $(1, 4)$ を通るから

$$4 = (1 + a)^2 \quad a \text{ の符号に注意して} \quad \mathbf{a = -3}$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $\mathbf{b = 9}$

(答) ソ. -3 タ. 9

- (4) D は線分 BC を $2:1$ に内分するから $\triangle ABD : \triangle ACD = 2:1$

よって、 $\triangle ABD$ の面積は、 $\triangle ACD$ の面積の 2 倍である.

$$BC = \frac{9}{4} \text{ のとき} \quad BD = \frac{2}{2+1}BC = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

(答) チ. 2 ツ. $\frac{3}{2}$

- (5) D と E の体積比が $1 : \left(\frac{3}{2}\right)^3$ であるから、 D と E の相似比は $1 : \frac{3}{2}$

したがって E の底面の半径は $2 \times \frac{3}{2} = \mathbf{3}$ (cm)

$$h = 9 \times \frac{2}{3} = \mathbf{6} \text{ (cm)}$$

(答) テ. 3 ト. 6

[3] $C_2: y = -ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) が点 $P(-2, -1)$, $Q(1, 2)$ を通るから

$$-4a - 2b + c = -1, \quad -a + b + c = 2$$

上の 2 式から $\mathbf{b = 1 - a, \ c = 2a + 3}$

$-2 \leq x \leq 1$ において, C_2 は C_1 の上側にある.

$R(p, p^2 + 2p - 1)$, $S(p, -ap^2 + bp + c)$ より

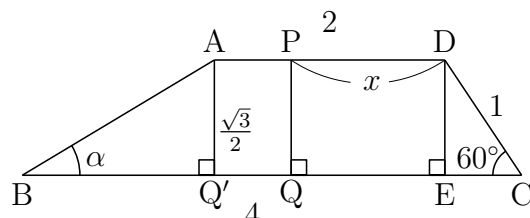
$$\begin{aligned} RS &= (-a - 1)p^2 + (b - 2)p + (c + 1) \\ &= (-a - 1)p^2 + (1 - a - 2)p + (2a + 3 + 1) \\ &= -(a + 1)p^2 - (a + 1)p + 2a + 4 \\ &= -(a + 1) \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}a + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

よって, $\mathbf{p = -\frac{1}{2}}$ のとき, 最大値 $\frac{9}{4}\mathbf{a} + \frac{17}{4}$

(答) ナ. $1 - a$ ニ. $2a + 3$ ヌ. $-\frac{1}{2}$ ネ. $\frac{9}{4}a + \frac{17}{4}$

[4] 四角形 ABCD の高さ DE は $DE = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

四角形 ABCD の面積 S は $\frac{1}{2}(2+4) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



四角形 PQCD の面積は

$$\frac{1}{2}\{x + (x + \cos 60^\circ)\} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}(4x + 1)\sqrt{3}$$

四角形 PQCD の面積は、四角形 ABCD の面積の $\frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{8}(4x + 1)\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{5}{4}$$

上の図で $CE = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$BQ' = BC - AD - CE = 4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

したがって $\tan \alpha = \frac{AQ'}{BQ'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ よって $\alpha = 30^\circ$

(答) ノ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ハ. $\frac{1}{8}(4x + 1)\sqrt{3}$ ヒ. $\frac{5}{4}$ フ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ヘ. 30

1.36 平成 26 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) $x^3 - ax^2 - 5x - 3$ が $x^2 + bx - 3$ で割り切れるならば, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $\frac{2 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} + \frac{2}{1 - \sqrt{2}i}$ を $a + bi$ (a, b は実数) の形に表すと, $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 直線 $\ell : 4x + 3y - 6 = 0$ と直交し, 点 $P(4, 2)$ を通る直線の方程式は, $y = \boxed{\text{オ}}$ で, P と ℓ の距離は $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $0 < \theta < 2\pi$ のとき, $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ をみたす θ は, $\theta = \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $\frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}} - \frac{5 \times 2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}} = -\frac{11}{3}$ をみたす x の値は, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 円 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + a = 0$ ($a < 5$) と直線 $3x + 4y + 4 = 0$ が接するとき, 円の中心と直線との距離は $\boxed{\text{サ}}$ であり, $a = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 原点 O を中心とする半径 2 の円の周上に点 P をとり, P より x 軸におろした垂線の足を Q とする。 $\angle POQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とするとき, $\triangle POQ$ の面積が $\frac{1}{2}$ 以上となるのは, $\boxed{\text{ス}} \leq \theta \leq \boxed{\text{セ}}$ のときである。
- (3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$ をみたす x は, $x = \boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3p^2x + p$ が極大値と極小値を持つとき, p の範囲は $\boxed{\text{チ}} < p < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 放物線 $C : y = 1 - x^2$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は $S = \boxed{\text{テ}}$ である。
また C と直線 $y = a$ ($0 < a < 1$) で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{8}S$ であるならば, $a = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 点 $P(a, 0)$ ($a > 1$) を中心とする半径 1 の円 C と x 軸との交点で, その x 座標が a より大きい点を Q とする。原点を通り C に接する直線 ℓ の傾きを m ($m > 0$) とし, ℓ と C の接点を R とすると, m^2 を a を用いて $m^2 = \boxed{\text{ナ}}$ と書ける。また R の x 座標は a を用いて $\boxed{\text{ニ}}$ と書ける。特に, Q の x 座標が R の x 座標の 2 倍であるならば, $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で, ℓ と x 軸のなす角は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] 放物線 $y = x(2 - x)$ の、点 $A(a, a(2 - a))$ ($1 < a < 2$) における接線は、 $y = \boxed{\text{ノ}}$ である。その接線と直線 $x = 2$ および放物線で囲まれた部分の面積を S_1 とすると、 $S_1 = \boxed{\text{ハ}}$ である。また、接線と直線 $x = 2$ との交点 P、接線と x 軸との交点 Q および $R(2, 0)$ に対して、 $\triangle PQR$ の面積を S_2 とすると、 $S_2 = \boxed{\text{ヒ}}$ である。特に、 $S_1 = S_2$ ならば、 $a = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

- [1] (1) x^3 の項と定数項に注意して

$$x^3 - ax^2 - 5x - 3 = (x^2 + bx - 3)(x + 1)$$

右辺を展開すると

$$x^3 - ax^2 - 5x - 3 = x^3 + (b + 1)x^2 + (b - 3)x - 3$$

同じ次数の項の係数を比較して

$$-a = b + 1, \quad -5 = b - 3 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1, \quad b = -2$$

(答) ア. 1 イ. -2

$$(2) \frac{2 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} + \frac{2}{1 - \sqrt{2}i} = \frac{(2 - \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) + 2(1 + \sqrt{2})}{1 + 2} = \frac{2 - \sqrt{2}i}{3}$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(答) \text{ウ. } -\frac{2}{3} \quad \text{エ. } -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

- (3) $P(4, 2)$ を通り、 $\ell: 4x + 3y - 6 = 0$ に垂直な直線は

$$3(x - 4) - 4(y - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{4}x - 1$$

$$P \text{ と } \ell \text{ の距離は } \frac{|4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{16}{5}$$

$$(答) \text{オ. } \frac{3}{4}x - 1 \quad \text{カ. } \frac{16}{5}$$

- (4) $2\sin^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$ ($0 < \theta < 2\pi$) より

$$2(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (\cos \theta - 1)(2\cos \theta + 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$(答) \text{キ. } \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$(5) \frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}} - \frac{5 \times 2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}}} = -\frac{11}{3} \text{ から } \frac{1}{2^x - 1} - \frac{5 \times 2^x}{2^x + 1} = -\frac{11}{3}$$

$$t = 2^x \text{ とおくと } \frac{1}{t-1} - \frac{5t}{t+1} = -\frac{11}{3}$$

$$3\{(t+1) - 5t(t-1)\} = -11(t+1)(t-1)$$

$$(t-4)(2t-1) = 0$$

$$t = 4, \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } 2^x = 4, \frac{1}{2} \text{ これを解いて } \mathbf{x = 2, -1}$$

(答) ケ. コ. 2, -1

[2] (1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + a = 0$ を変形すると

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5-a$$

したがって、円の中心は $(1, 2)$ 、半径 $\sqrt{5-a}$

円の中心から直線 $3x + 4y + 4 = 0$ までの距離 d は

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}$$

円と直線が接するとき、 $d = r$ であるから

$$3 = \sqrt{5-a} \text{ これを解いて } \mathbf{a = -4}$$

(答) サ. 3 シ. -4

(2) $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) より

$$OQ = 2 \cos \theta, \quad PQ = 2 \sin \theta$$

$$\text{したがって } \triangle POQ = \frac{1}{2} OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta = \sin 2\theta \geq \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < 2\theta < \pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{5}{6}\pi \quad \text{よって} \quad \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$$

(答) ス. $\frac{\pi}{12}$ セ. $\frac{5}{12}\pi$

(3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$ より $\log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} = 3$

方程式から

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 2) = 0$$

したがって $\log_3 x = 1, 2$ すなわち $x = 3, 9$

(答) ソ. タ. 3, 9

(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3p^2x + p$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3p^2 = 3(x^2 - 2x + p^2)$$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつとき, $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつから,

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \cdot p^2 > 0 \quad \text{よって} \quad -1 < p < 1$$

(答) チ. -1 ツ. 1

(5) $C: y = 1 - x^2 = -(x+1)(x-1)$

C と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 = \frac{4}{3}$$

C と直線 $y = a$ ($0 < a < 1$) との共有点の x 座標は

$$1 - x^2 = a \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{1-a}$$

条件から

$$\frac{1}{6}(2\sqrt{1-a})^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (\sqrt{1-a})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{したがって} \quad \sqrt{1-a} = \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{3}{4}$$

(答) テ. $\frac{4}{3}$ ト. $\frac{3}{4}$

- [3] 点 $(a, 0)$ から直線 $\ell: mx - y = 0$ までの距離が円の半径 1 であるから

$$\frac{|ma|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

両辺を平方して整理すると

$$m^2 a^2 = m^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = \frac{1}{a^2 - 1}$$

点 $(a, 0)$ を通り, $\ell: y = mx \cdots \textcircled{1}$ に垂直な直線は

$$y = -\frac{1}{m}(x - a) \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から, y を消去すると

$$mx = -\frac{1}{m}(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad m^2 x = -x + a$$

$m^2 = \frac{1}{a^2 - 1}$ を上式に代入すると

$$\frac{x}{a^2 - 1} = -x + a \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a}$$

Q の x 座標が R の x 座標の 2 倍であるとき

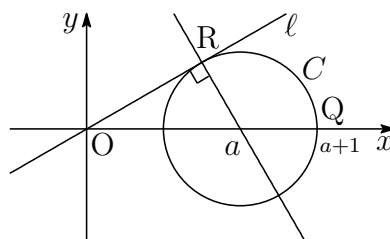
$$a + 1 = 2 \times \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \text{ であるから } m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ℓ と x 軸のなす角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = 30^\circ$$

$$(\text{答}) \text{ ナ. } \frac{1}{a^2 - 1} \quad \text{ニ. } \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} \quad \text{又. 2} \quad \text{ネ. 30}$$



[4] $y = x(2 - x) = -x^2 + 2x$ を微分すると

$$y' = -2x + 2$$

点 $A(a, a(2 - a))$ における接線は ($1 < a < 2$)

$$y - a(2 - a) = (-2a + 2)(x - a)$$

すなわち $y = (-2a + 2)x + a^2 \quad \dots \textcircled{1}$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^2 \{(-2a + 2)x + a^2 - x(2 - x)\} dx \\ &= \int_a^2 (x - a)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^2 = \frac{1}{3}(2 - a)^3 \end{aligned}$$

P の y 座標は, ① に $x = 2$ を代入して

$$y = (-2a + 2) \cdot 2 + a^2 = (2 - a)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

また, Q の x 座標は, ① に $y = 0$ を代入して

$$0 = (-2a + 2)x + a^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{a^2}{2(a - 1)}$$

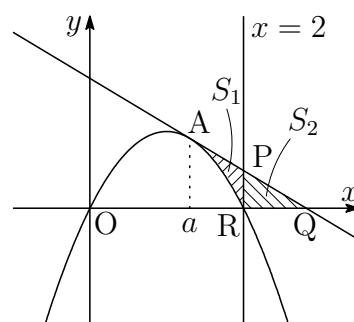
$$\text{したがって} \quad QR = \frac{a^2}{2(a - 1)} - 2 = \frac{(2 - a)^2}{2(a - 1)} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から} \quad S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{(2 - a)^2}{2(a - 1)} \times (2 - a)^2 = \frac{(2 - a)^4}{4(a - 1)}$$

とくに, $S_1 = S_2$ のとき

$$\frac{1}{3}(2 - a)^3 = \frac{(2 - a)^4}{4(a - 1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3} = \frac{2 - a}{4(a - 1)} \quad \text{よって} \quad a = \frac{10}{7}$$

$$\text{(答)} \quad \text{ノ. } (-2a + 2)x + a^2 \quad \text{ハ. } \frac{1}{3}(2 - a)^3 \quad \text{ヒ. } \frac{(2 - a)^4}{4(a - 1)} \quad \text{フ. } \frac{10}{7}$$



1.37 平成 25 年度推薦前期試験 (90 分)

- [1] (1) $(ax + y - b)^2$ を展開したとき, xy の係数は 4, x の係数は -12 である。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 次不等式 $ax^2 + (a + b)x + 1 > 0$ の解が, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ であるとき, $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 2 次関数 $y = -x^2 + ax - a + 1$ のグラフが x 軸に接するとき, $a = \boxed{\text{オ}}$ であり, 接点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において, 辺 CD の中点を M とすると $AM = \boxed{\text{キ}}$ である。また $\angle ABM = \theta$ とすると, $\cos \theta = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) ある地点 A から, ビルの土台までの距離が 102m である。そのビルの屋上を点 A から見上げる角度は 30° であるとする。A から見てビルより先にある, 高さ 300m のタワーの先端がビルの屋上と一直線に見えるなら, ビルの高さは $\boxed{\text{ケ}}$ m, 点 A からタワーの土台までの間の距離は $\boxed{\text{コ}}$ m である, ただし点 A とビルおよびタワーの土台は一直線上にあるとし, $\sqrt{3} = 1.7$ とする。
- [2] (1) $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{32}}{\sqrt{12} - \sqrt{8}}$ の分母を有理化し $a + b\sqrt{6}$ (a, b は整数) の形に書くと, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $|x| + 2|x - 1| = x + 3$ の解は, $x = \boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2 次曲線 $y = -x^2 + 2x - 3$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線 C の, $2 \leq x \leq 5$ における最大値 $\boxed{\text{ソ}}$ で最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $2\sin \theta - \tan \theta - 2\cos \theta + 1 = 0$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) の解は, $\theta = \boxed{\text{チ}}^\circ$, $\boxed{\text{ツ}}^\circ$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = \sqrt{2}$ であるとき, $AC = \boxed{\text{テ}}$, $AB = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 関数 $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 10$ で, $t = x^2 + 2x$ とおいて, y を t で表すと $y = \boxed{\text{ナ}}$ である。また, t は $\boxed{\text{ニ}}$ 以上の値をとる。したがって, y は $x = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。
- [4] 四辺形 ABCD において, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 3$, $DA = 1$ で $\angle B = 60^\circ$ とすると, $AC = \boxed{\text{ノ}}$ である。また, $\cos \angle D = \boxed{\text{ハ}}$ であるから, $\angle D = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ となる。これより四辺形 ABCD の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $(ax+y-b)^2$ を展開したとき, xy の係数は $2a$, x の係数は $-2ab$ であるから

$$2a = 4, \quad -2ab = -12$$

これを解いて $\mathbf{a = 2, \quad b = 3}$

(答) ア. 2 イ. 3

(2) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ を解とする 2 次不等式の一つは

$$(2x+1)(3x-1) < 0 \quad \text{すなわち} \quad 6x^2 + x - 1 < 0$$

定数項に注意して $-6x^2 - x + 1 > 0$

同じ次数の項の係数を比較して

$$\mathbf{a = -6, \quad a + b = -1 \quad \text{よって} \quad b = 5}$$

(答) ウ. -6 エ. 5

(3) 2 次関数 $y = -x^2 + ax - a + 1$ の判別式は

$$D = a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-a + 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

この関数のグラフは x 軸に接するので, $D = 0$ より

$$(a - 2)^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a = 2}$$

接点の x 座標は $x = -\frac{a}{2 \cdot (-1)} = \frac{a}{2}$

上の 2 式より, 求める接点の x 座標は $\mathbf{x = 1}$

(答) オ. 2 カ. 1

$$(2) |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x < 1) \end{cases} \text{ であるから,}$$

次の3つの場合分けを行う。

i) $x < 0$ のとき, 方程式は

$$(-x) + 2(-x+1) = x+3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{4}$$

ii) $0 \leq x < 1$ のとき, 方程式は

$$x + 2(-x+1) = x+3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{2}$$

これは $0 \leq x < 1$ に反するので不適

iii) $1 \leq x$ のとき

$$x + 2(x-1) = x+3 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\text{i)} \sim \text{iii) から} \quad x = -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ ス. セ. } -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$$

(3) 2次関数 $y = -x^2 + 2x - 3$ を x 軸方向に3, y 軸方向に3だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y-3 = -(x-3)^2 + 2(x-3) - 3 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 8x - 15$$

2次関数 $y = -(x-4)^2 + 1$ ($2 \leq x \leq 5$) は

$$x=4 \text{ で最大値 } 1, x=2 \text{ で最小値 } -3$$

をとる.

$$(\text{答}) \text{ ソ. 1} \quad \text{タ. } -3$$

(4) $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$ より, 方程式は

$$2 \cos \theta \tan \theta - \tan \theta - 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\tan \theta (2 \cos \theta - 1) - (2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$(\tan \theta - 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{したがって} \quad \tan \theta = 1 \quad \text{または} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より} \quad \theta = 45^\circ, 60^\circ$$

$$(\text{答}) \text{ チ. ツ. } 45, 60$$

$$(5) \ a = \sqrt{2}, \ b = AC, \ c = AB$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ により

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad AC = b = 2$$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A \\ &= \sqrt{2} \cos 45^\circ + 2 \cos 30^\circ = 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad AB = 1 + \sqrt{3}$$

$$(\text{答}) \quad \text{テ. } 2 \quad \text{ト. } 1 + \sqrt{3}$$

[3] 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 10 \\ &= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + 8x^2 + 16x + 10 \\ &= (x^2 + 2x)^2 + 8(x^2 + 2x) + 10 \\ &= t^2 + 8t + 10 \end{aligned}$$

$$t = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 \text{ より } t \geq -1$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= t^2 + 8t + 10 \\ &= (t + 4)^2 - 6 \end{aligned}$$

$t \geq -1$ において, y は, $t = -1$ すなわち $x = -1$ のとき最小値 **3** をとる.

$$(\text{答}) \quad \text{ナ. } t^2 + 8t + 10 \quad \text{ニ. } -1 \quad \text{ヌ. } -1 \quad \text{ネ. } 3$$

[4] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 13$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{13}$

また, $\triangle BCD$ に余弦定理を適用して

$$\cos \angle D = \frac{CD^2 + DA^2 - AC^2}{2CD \cdot DA} = \frac{3^2 + 1^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 3 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

したがって $\angle D = 120^\circ$

よって, 四辺形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B + \frac{1}{2} CD \cdot DA \sin D \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \sin 120^\circ \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{15}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ノ. $\sqrt{13}$ ハ. $-\frac{1}{2}$ ヒ. 120 フ. $\frac{15}{4}\sqrt{3}$

1.38 平成 25 年度推薦後期試験 (90 分)

- [1] (1) $2a^2 - b^2 + c^2 + ab - 3ac$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $(1 - a - b)x^2 + (1 + a - b)y^2 + (2b + c)xy = 2(3y - x)(2x - y)$ となるとき、 $a = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $c = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 2 次曲線 $y = 2x^2 + (a - 2)x + \frac{1}{2}(a^2 - 3a) + 1$ が x 軸と 2 点を共有するのは $\boxed{\text{オ}} < a < \boxed{\text{カ}}$ のときである。
- (4) $\triangle ABC$ において、 $AB = 4$ 、 $AC = 2$ 、 $BC = a$ とする。 $60^\circ \leq \angle A \leq 120^\circ$ のとき、 a の範囲は $\boxed{\text{キ}} \leq a \leq \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $\sin 10^\circ = a$ のとき、 $\sin 80^\circ$ 、 $\cos 100^\circ$ を a を用いて表すと、 $\sin 80^\circ = \boxed{\text{ケ}}$ 、 $\cos 100^\circ = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ のとき、 $a^2 - a - 1 = \boxed{\text{サ}}$ 、 $a^3 + a^2 + a + 1 = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $a > 0$ とする。2 次方程式 $2x^2 + 2ax + a + 1 = 0$ の 2 つの解の差が 1 より大きく、2 より小さくなるとき、 a の範囲は $\boxed{\text{ス}} < a < \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $a \geq 3$ のとき、不等式 $2|x - a| \leq x - 3$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{ソ}} \leq x \leq \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 連立不等式 $\begin{cases} 2x + 3b < 4(x - a) \\ bx > -x - a \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-1 < x < 3$ であるならば、 $a = \boxed{\text{チ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $2x + y = 1$ のとき、 $2x^2 + y^2$ の最大値は $\boxed{\text{テ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 直線 $\ell: y = \frac{3}{2}(x + 1)$ と 2 次曲線 $C: y = -2(x^2 - 2x - 3)$ において、 x 座標 a をもつ ℓ 上の点 P と C 上の点 Q に対して、 P の y 座標が Q の y 座標より小さくなるとき、 a の範囲は $\boxed{\text{ナ}}$ である。このとき、線分 PQ の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。さらに、 Q を通り x 軸に平行な直線と曲線 C の交点を R とすると、 R の x 座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。 R の x 座標が Q の x 座標より小さくなるとき、 a の範囲は $\boxed{\text{ネ}}$ である。さらに、点 S を、四辺形 $PQRS$ が長方形となるようにとると、その長方形の周の長さは $a = \boxed{\text{ノ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ハ}}$ をとる。

- [4] $\triangle ABC$ において、 $AB = 2$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ とする。このとき、 $AC =$ ヒ である。A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とすると、 $AH =$ フ である。辺 AB , AC 上に点 D , E を、 $AD = AE$ となるようにとる。 $AD = x$ とおき、 $DH^2 + EH^2$ を x で表すと、 $DH^2 + EH^2 =$ ヘ である。この値を最小にするのは $x =$ ホ のときである。

解答例

- [1] (1) a について整理すると

$$\begin{aligned} & 2a^2 - b^2 + c^2 + ab - 3ac \\ &= 2a^2 + (b - 3c)a - (b + c)(b - c) \\ &= \{a + (b - c)\}\{2a - (b + c)\} \\ &= (a + b - c)(2a - b - c) \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $a + b - c$, $2a - b - c$

- (2) $(1 - a - b)x^2 + (1 + a - b)y^2 + (2b + c)xy = 2(3y - x)(2x - y)$ の右辺を展開すると

$$(1 - a - b)x^2 + (1 + a - b)y^2 + (2b + c)xy = -4x^2 - 6y^2 + 14xy$$

x^2 , y^2 , xy の項の係数が等しいから

$$1 - a - b = -4, \quad 1 + a - b = -6, \quad 2b + c = 14$$

これを解いて $a = -1$, $b = 6$, $c = 2$

(答) ウ. -1 エ. 2

- (3) 判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (a - 2)^2 - 4 \cdot 2 \left\{ \frac{1}{2}(a^2 - 3a) + 1 \right\} \\ &= -(3a^2 - 8a + 4) \\ &= -(a - 2)(3a - 2) \end{aligned}$$

このとき、 $D > 0$ であるから

$$-(a - 2)(3a - 2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 2)(3a - 2) < 0$$

よって $\frac{2}{3} < a < 2$

(答) オ. $\frac{2}{3}$ カ. 2

(4) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{2^2 + 4^2 - a^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{20 - a^2}{16}$$

$$60^\circ \leq A \leq 120^\circ \text{ のとき } -\frac{1}{2} \leq \cos A \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } -\frac{1}{2} \leq \frac{20 - a^2}{16} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } 12 \leq a^2 \leq 28$$

$$\text{よって } 2\sqrt{3} \leq a \leq 2\sqrt{7}$$

(答) キ. $2\sqrt{3}$ ク. $2\sqrt{7}$

$$(5) \cos 10^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 10^\circ} = \sqrt{1 - a^2}, \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\text{したがって } \sin 80^\circ = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ, \cos 80^\circ = \sin 10^\circ = a$$

$$\text{したがって } \cos 100^\circ = -a$$

(答) ケ. $\sqrt{1 - a^2}$ コ. $-a$

$$[2] (1) a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a^2 - a - 1 &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

 $a^2 = a + 1$ であるから

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + a + 1 &= a^2(a + 1) + a + 1 \\ &= (a + 1)(a + 1) + a + 1 \\ &= a^2 + 3a + 2 \\ &= (a + 1) + 3a + 2 \\ &= 4a + 3 \\ &= 4 \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 3 = 5 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(答) サ. 0 シ. $5 - 2\sqrt{5}$

(2) この2次方程式の解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{2} = -a, \quad \alpha\beta = \frac{a+1}{2}$$

ゆえに

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4 \times \frac{a+1}{2} = a^2 - 2a - 2$$

$$1 < |\alpha - \beta| < 2 \text{ であるから } 1 < (\alpha - \beta)^2 < 4$$

$$\text{したがって } 1 < a^2 - 2a - 2 < 4$$

$$a > 0 \text{ に注意してこれを解くと } 3 < a < 1 + \sqrt{7}$$

(答) ス. 3 セ. $1 + \sqrt{7}$

(3) 与えられた不等式から $-(x-3) \leq 2(x-a) \leq x-3$

$$\text{これを解いて } \frac{2}{3}a + 1 \leq x \leq 2a - 3$$

$$\text{(答) ソ. } \frac{2}{3}a + 1 \quad \text{タ. } 2a - 3$$

(4) $2x + 3b < 4(x-a)$ を解いて $x > 2a + \frac{3}{2}b$

$$\text{不等式の解から } 2a + \frac{3}{2}b = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$bx > -x - a \text{ すなわち } (b+1)x > -a$$

$$\text{この不等式の解が } x < 3 \text{ であるから, } b+1 < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{ゆえに } \frac{-a}{b+1} = 3 \text{ すなわち } a = -3b - 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ に注意しながら, } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ を解いて } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{10}{9}$$

$$\text{(答) チ. } \frac{1}{3} \quad \text{ツ. } -\frac{10}{9}$$

$$(5) \ 2x + y = 1 \text{ より } \quad y = 1 - 2x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \geq 0, y \geq 0$ であるから, ① より

$$x \geq 0, \quad 1 - 2x \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① より

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (1 - 2x)^2 \\ &= 6x^2 - 4x + 1 \\ &= 6 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

② の範囲に注意して $x = 0$ のとき最大値 1 , $x = \frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$

(答) テ. 1 ト. $\frac{2}{3}$

[3] $x = a$ のとき

P の y 座標は $\frac{3}{2}(a + 1)$

Q の y 座標は $-2(a^2 - 2a - 3)$

P の y 座標が Q の y 座標より小さいとき

$$\frac{3}{2}(a + 1) < -2(a^2 - 2a - 3)$$

整理すると $(a + 1)(4a - 9) < 0$

これを解いて $-1 < a < \frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$

このとき, 線分 PQ の長さは

$$-2(a^2 - 2a - 3) - \frac{3}{2}(a + 1) = -2a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{9}{2}$$

R の x 座標は

$$-2(x^2 - 2x - 3) = -2(a^2 - 2a - 3)$$

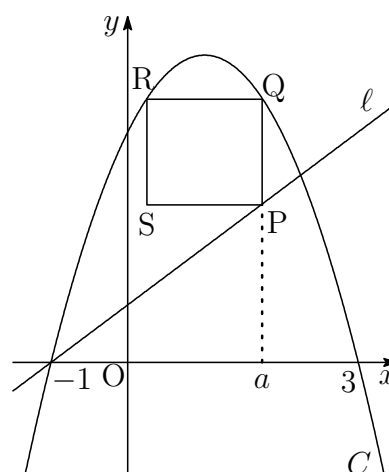
すなわち $(x - a)(x + a - 2) = 0$

$x \neq a$ に注意して $x = -a + 2$

R の x 座標が Q の x 座標より小さいとき

$$-a + 2 < a \quad \textcircled{1} \text{ に注意して } \quad 1 < a < \frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

QR の長さは $a - (-a + 2) = 2a - 2$



長方形 PQRS の周の長さは

$$\begin{aligned} 2PQ + 2QR &= 2 \left(-2a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{9}{2} \right) + 2(2a - 2) \\ &= -4a^2 + 9a + 5 \\ &= -4 \left(a - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{161}{16} \end{aligned}$$

② に注意して $a = \frac{9}{8}$ のとき, 最小値 $\frac{161}{16}$

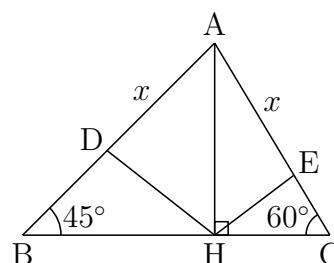
(答) ナ. $-1 < a < \frac{9}{4}$ ニ. $-2a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{9}{2}$ ヌ. $-a + 2$ ネ. $1 < a < \frac{9}{4}$
ノ. $\frac{9}{8}$ ハ. $\frac{161}{16}$

[4] $\triangle ABC$ に正弦定理を適用して

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin 60^\circ}$$

これを解いて $AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$AH = AB \sin 45^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



$$BH = AH, \quad CH = AC \cos 60^\circ \quad \text{より} \quad BH = \sqrt{2}, \quad CH = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\triangle BDH$ と $\triangle CEH$ にそれぞれ余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} DH^2 &= (\sqrt{2})^2 + (2-x)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} (2-x) \cos 45^\circ \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ EH^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - x \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - x \right) \cos 60^\circ \\ &= x^2 - \sqrt{6}x + 2 \end{aligned}$$

$$\text{上の2式より} \quad DH^2 + EH^2 = 2x^2 - (2 + \sqrt{6})x + 4$$

この値を最小にする x の値は, $0 < x < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ に注意して

$$x = -\frac{-(2 + \sqrt{6})}{2 \cdot 2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}$$

(答) ビ. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ フ. $\sqrt{2}$ ヘ. $2x^2 - (2 + \sqrt{6})x + 4$ ホ. $\frac{2 + \sqrt{6}}{4}$

1.39 平成 25 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) 整式 $3x^3 + 8x^2 + 7x + 6$ を整式 $ax + b$ で割ると、商が $x^2 + 2x + 1$ 、余りが 4 であった。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 直線 $x - 2y - 4 = 0$ 、 $3x + 2y - 4 = 0$ の交点と、点 $(3, -2)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $4\cos^2\theta - 2\left(1 - \tan\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta - 4 + \sqrt{3} > 0$ となる θ の範囲は $\boxed{\text{オ}} < \theta < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $x > 0$ とする。方程式 $\log_2 x - \log_x 4 + 1 = 0$ を、 $y = \log_2 x$ とおいて y の式に直すと $\boxed{\text{キ}} = 0$ となる。従って、方程式の解は $x = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 関数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ は $x = \boxed{\text{ケ}}$ で極大であり、極大値は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 方程式 $x^3 + ax^2 - 3x + b = 0$ において、 $x = 2 + i$ が解ならば、実数 a 、 b の値は、 $a = \boxed{\text{サ}}$ 、 $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 円 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $(\sqrt{3}, -1)$ における接線 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{ス}}$ である。 C 上の点 (a, b) における接線が ℓ と直交するなら、 $(a, b) = \boxed{\text{セ}}$ である。ただし $a > 0$ とする。
- (3) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ 、 $\cos\beta = -\frac{1}{2}$ ($0 < \alpha < 90^\circ$ 、 $90^\circ < \beta < 180^\circ$) のとき、
 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{6}$ 、 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\boxed{\text{タ}}}{6}$ である。
- (4) $2^x - 2^{-x} = 4$ のとき、 $2^x + 2^{-x} = \boxed{\text{チ}}$ 、 $4^x - 4^{-x} = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 関数 $f(x)$ と定数 a が、 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$ 、 $\int_0^x f(t) dt = \frac{a}{9}x^3$ を満たすとき、
 $a = \boxed{\text{テ}}$ 、 $f(x) = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] $\triangle ABC$ において、 $AB = 2$ 、 $AC = 4$ とする。 $\angle A = 2\theta$ とするとき、 $\triangle ABC$ の面積を θ を用いて表すと $\boxed{\text{ナ}}$ である。 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とし、 $AD = \ell$ とするとき、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ の面積を S_1 、 S_2 を ℓ と θ を用いて表すと、 $S_1 = \boxed{\text{ニ}}$ 、 $S_2 = \boxed{\text{ヌ}}$ である。さらに、 ℓ を θ を用いて表すと、 $\ell = \boxed{\text{ネ}}$ となる。特に、 $BC = 3$ のとき、 $\ell = \boxed{\text{ノ}}$ である。

- [4] $P(a, 0)$ ($a > 0$) と原点 O の中点を M とし、 M を通り y 軸と平行な直線と放物線 $C: y = x^2$ の交点を A とすると、 A における C の接線 ℓ_1 の方程式は $y =$ ハ である。 O を通り ℓ_1 と平行な直線 ℓ_2 と C の、 O 以外の交点の座標は ヒ であるから C と ℓ_2 で囲まれる部分の面積 S は フ となる。また、2 直線 ℓ_1, ℓ_2 と y 軸および直線 $x = a$ で囲まれる平行四辺形の面積は S の ヘ 倍である。

解答例

- [1] (1) 問題から

$$\begin{aligned} 3x^3 + 8x^2 + 7x + 6 &= (ax + b)(x^2 + 2x + 1) + 4 \\ \text{ゆえに} \quad 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2 &= (ax + b)(x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

$$x^3 \text{ の係数と定数項を比較して} \quad a = 3, b = 2$$

(答) ア. 3 イ. 2

- (2) 2 直線 $x - 2y - 4 = 0$, $3x + 2y - 4 = 0$ の交点の座標は

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (x, y) = (2, -1)$$

求める直線は、2 点 $(2, -1)$, $(3, -2)$ を通る直線であるから

$$y - (-1) = \frac{-2 - (-1)}{3 - 2}(x - 2) \quad \text{よって} \quad y = -x + 1$$

[別解]

2 直線 $x - 2y - 4 = 0$, $3x + 2y - 4 = 0$ の交点を通る直線は、

$$(x - 2y - 4) + k(3x + 2y - 4) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける (k は定数). これが点 $(3, -2)$ を通るから

$$\{3 - 2 \cdot (-2) - 4\} + k\{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 4\} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -3$$

$k = -3$ を $\textcircled{1}$ に代入して

$$(x - 2y - 4) - 3(3x + 2y - 4) = 0 \quad \text{よって} \quad y = -x + 1$$

(答) ウ. -1 エ. 1

(3) 与えられた不等式から

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 2(1 - \sqrt{3}) \sin \theta - 4 + \sqrt{3} > 0$$

$$-4 \sin^2 \theta - 2(1 - \sqrt{3}) \sin \theta + \sqrt{3} > 0$$

$$4 \sin^2 \theta + 2(1 - \sqrt{3}) \sin \theta - \sqrt{3} < 0$$

$$(2 \sin \theta + 1)(2 \sin \theta - \sqrt{3}) < 0$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

$$\text{(答) オ. } -\frac{\pi}{6} \quad \text{エ. } \frac{\pi}{3}$$

(4) 方程式を変形すると

$$\log_2 x - \frac{\log_2 4}{\log_2 x} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y - \frac{2}{y} + 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad y^2 + y - 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad y = -2, 1$$

$$\text{よって} \quad \log_2 x = -2, 1 \text{ から } \quad x = \frac{1}{4}, 2$$

$$\text{(答) ク. } \frac{1}{4}, 2$$

$$(5) f'(x) = 3x^2 + x - 2 = (x+1)(3x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, \frac{2}{3}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 $\frac{37}{54}$	$\nearrow$

よって, $x = -1$ のとき極大値 3 をとる.

$$\text{(答) ケ. } -1 \quad \text{コ. } 3$$

[2] (1) $2+i$ が方程式 $x^3 + ax^2 - 3x + b = 0$ の解であるから

$$(2+i)^3 + a(2+i)^2 - 3(2+i) + b = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (3a+b-4) + (4a+8)i = 0$$

$3a+b-4$, $4a+8$ は実数であるから

$$3a+b-4=0, 4a+b=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=-2, b=10$$

(答) サ. -2 シ. 10

(2) $C: x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $(\sqrt{3}, -1)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\sqrt{3}x - 1 \cdot y = 4 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sqrt{3}x - 4$$

$x^2 + y^2 = 4$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は $ax + by = 4$

これが ℓ に垂直なので, $b \neq 0$ に注意して $y = -\frac{a}{b}x + \frac{4}{b}$

この接線が直線 ℓ に垂直であるから

$$-\frac{a}{b} \times \sqrt{3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \sqrt{3}a \quad \dots \textcircled{1}$$

点 (a, b) は, 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にあるから $a^2 + b^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$

$a > 0$ に注意して, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解いて $(a, b) = (1, \sqrt{3})$

(答) ス. $\sqrt{3}x - 4$ セ. $(1, \sqrt{3})$

(3) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より, $\cos \alpha > 0$ であるから

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$90^\circ < \beta < 180^\circ$ より, $\sin \beta > 0$ であるから

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって, 加法定理により

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

(答) ソ. $-1 + 2\sqrt{6}$ タ. $-2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(4) $t = 2^x$ とおくと, $2^x - 2^{-x} = 4$ より

$$t - \frac{1}{t} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 4t - 1 = 0$$

$t > 0$ に注意して, これを解くと $t = 2 + \sqrt{5}$

$$\text{ゆえに} \quad 2^x = \sqrt{5} + 2, \quad 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{5} - 2$$

よって

$$2^x + 2^{-x} = (\sqrt{5} + 2) + (\sqrt{5} - 2) = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{-x} &= (2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x}) \\ &= 2\sqrt{5} \times 4 = 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

(答) チ. $2\sqrt{5}$ ツ. $8\sqrt{5}$

(5) $\int_0^x f(t) dt = \frac{a}{9}x^3$ を x で微分すると $f(x) = \frac{a}{3}x^2$

したがって

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{a}{3}x^2 = \left[\frac{a}{9}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{9}a$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \text{ であるから}$$

$$\frac{2}{9}a = 2 \quad \text{よって} \quad a = 9$$

(答) テ. 9 ト. $\frac{a}{3}x^2$

[3] $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin 2\theta = 4 \sin 2\theta$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ell \sin \theta = \ell \sin \theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \ell \sin \theta = 2\ell \sin \theta$$

$S_1 + S_2 = 4 \sin 2\theta = 8 \sin \theta \cos \theta$ であるから

$$\ell \sin \theta + 2\ell \sin \theta = 8 \sin \theta \cos \theta$$

$\sin \theta \neq 0$ に注意して $\ell = \frac{8}{3} \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$

AD は $\angle A$ の二等分線であるから $BD : DC = AB : AC$

したがって、 $BC = 3$ のとき $BD = 1$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

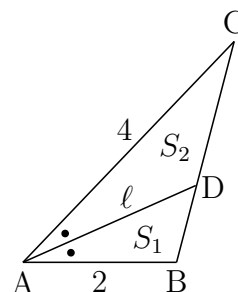
$$1^2 = 2^2 + \ell^2 - 2 \cdot 2 \cdot \ell \cos \theta$$

① より、 $\cos \theta = \frac{3}{8} \ell$ を上式に代入すると

$$1^2 = 2^2 + \ell^2 - 2 \cdot 2 \cdot \ell \times \frac{3}{8} \ell \quad \text{ゆえに} \quad \ell^2 = 6$$

$\ell > 0$ であるから $\ell = \sqrt{6}$

(答) ナ. $4 \sin 2\theta$ ニ. $\ell \sin \theta$ ヌ. $2\ell \sin \theta$ ネ. $\frac{8}{3} \cos \theta$ ノ. $\sqrt{6}$



[4] A の座標は $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$

$y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$x = \frac{a}{2}$ のとき $y' = 2 \times \frac{a}{2} = a$

したがって、 ℓ_1 の方程式は

$$y - \frac{a^2}{4} = a \left(x - \frac{a}{2} \right)$$

ゆえに $y = ax - \frac{a^2}{4}$

ℓ_2 は、原点を通り傾き a の直線であるから $y = ax$

ℓ_2 と C の交点の座標は

$$\begin{cases} y = ax \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{これを解いて } (0, 0), (a, a^2)$$

C と ℓ_2 で囲まれる部分の面積 S は

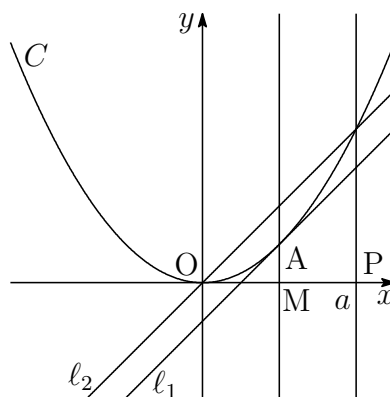
$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (ax - x^2) dx = - \int_0^a x(x - a) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) (a - 0)^3 = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 と y 軸および直線 $x = a$ で囲まれる平行四辺形の面積は

$$\frac{a^2}{4} \times a = \frac{a^3}{4}$$

これは S の面積の $\frac{a^3}{4} \div \frac{a^3}{6} = \frac{3}{2}$ 倍

(答) ハ. $ax - \frac{a^2}{4}$ ヒ. (a, a^2) フ. $\frac{3}{2}$



1.40 平成24年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)^2$ を整理すると, $\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \times \sqrt{10}$ となる。
- (2) 2次方程式 $2x^2 + 5\sqrt{3}x - 9 = 0$ の解は, $x = \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $a - 2b = x$, $ab = y$ とおく。次の式を x, y で表すと, $a^2 + 4b^2 = \boxed{\text{オ}}, a^3 - 8b^3 = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $a > 0$ のとき, $\begin{cases} 2x - a < -3ax - 2b \\ -x + 2a < x - 3b \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-\frac{5}{2} < x < 1$ であるならば, $a = \boxed{\text{キ}}, b = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{ケ}}, \tan \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 周の長さ 16cm, 面積 15cm^2 の長方形の隣り合う2辺の長さは $\boxed{\text{サ}}\text{cm}$ と $\boxed{\text{シ}}\text{cm}$ である。
- (2) 2次曲線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $6x^2 - x - 1 = 0$ の2つの解の逆数が2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解であるとき, $a = \boxed{\text{ソ}}, b = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 点 $A(-2, 0)$ を通る直線 ℓ と y 軸との交点を B とする。原点を O とするとき, $\angle BAO = 60^\circ$ ならば, ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 1辺の長さが2の正六角形 $ABCDEF$ の内角の和は $\boxed{\text{テ}}^\circ$ である。この正六角形の中心より辺 AB に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] x, y は負でない整数で, 等式 $x^2(x^2 + 4) + y^2(y^2 - 4) = 2x^2y^2 - 3$ をみたすとする。 $x^2 - y^2 = t$ とおいて, この等式を t で表すと $\boxed{\text{ナ}} = 0$ となる。したがって, $x^2 - y^2$ の値は $\boxed{\text{ニ}}, \boxed{\text{ヌ}}$ である。このことから, 等式をみたす x, y の組 (x, y) は $\boxed{\text{ネ}}, \boxed{\text{ノ}}$ である。
- [4] $\triangle ABC$ において $\angle B = 30^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{7}$ ならば, $AB = \boxed{\text{ハ}}$ であるから, $\triangle ABC$ の面積 S_1 は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。辺 BC 上に $BE = \frac{2}{\sqrt{3}}$ となる点 E をとる。辺 AB 上に点 D をとり, $\triangle DBE$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{1}{3}S_1 < S_2 < \frac{1}{2}S_1$ が成り立つのは $\boxed{\text{フ}} < BD < \boxed{\text{ヘ}}$ のときである。

解答例

$$[1] (1) \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5+\sqrt{10}}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} + 2 + 3 = \frac{16}{3}$$

したがって

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{10}}{3} + \frac{16}{3} = 7 + \frac{1}{3} \times \sqrt{10}$$

(答) ア. 7 イ. $\frac{1}{3}$

(2) 解の公式により

$$x = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{4}$$

$$= \frac{-5\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, -3\sqrt{3}$$

(答) ウ. エ. $\frac{\sqrt{3}}{2}, -3\sqrt{3}$

$$(3) \quad \begin{aligned} a^2 + 4b^2 &= a^2 - 4ab + 4b^2 + 4ab \\ &= (a - 2b)^2 + 4ab \\ &= \mathbf{x^2 + 4y} \end{aligned}$$

この結果から

$$\begin{aligned} a^3 - 8b^3 &= a^3 - (2b)^3 \\ &= (a - 2b)\{a^2 + a \cdot 2b + (2b)^2\} \\ &= (a - 2b)\{(a^2 + 4b^2) + 2ab\} \\ &= x\{(x^2 + 4y) + 2y\} = \mathbf{x(x^2 + 6y)} \end{aligned}$$

(答) オ. $x^2 + 4y$ カ. $x(x^2 + 6y)$

$$\begin{array}{ll}
 (4) \text{ 第1式より} & (3a+2)x < a-2b \\
 3a+2 > 0 \text{ であるから} & x < \frac{a-2b}{3a+2} \quad \dots \textcircled{1} \\
 \text{第2式より} & -2x < -2a-3b \\
 \text{ゆえに} & x > \frac{2a+3b}{2} \quad \dots \textcircled{2}
 \end{array}$$

①, ②の共通範囲が $-\frac{5}{2} < x < 1$ であるから

$$\frac{2a+3b}{2} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b}{3a+2} = 1$$

したがって $2a+3b = -5, \quad a+b = -1$

これを解いて $\mathbf{a = 2, \quad b = -3}$

(答) キ. 2 ク. -3

(5) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\cos \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(答) ケ. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ コ. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

[2] (1) 2 辺の長さを x cm, y cm とする.

周の長さから $x + y = 8$

面積から $xy = 15$

x, y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2 - 8t + 15 = 0$$

これを解いて $t = 3, 5$

(答) サ. シ. 3, 5

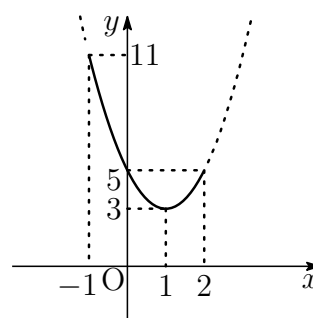
(2) $y = 2x^2 - 4x + 5$ を変形すると

$$y = 2(x - 1)^2 + 3$$

$-1 \leq x \leq 2$ でのグラフは、右の図の実線部分である. よって, y は

$x = -1$ で最大値 11 をとり,

$x = 1$ で最小値 3 をとる.



(答) ス. 11 セ. 3

(3) 2 次方程式 $6x^2 - x - 1 = 0$ の解は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

この 2 数の逆数 2, -3 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - \{2 + (-3)\}x + 2 \cdot (-3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

よって, 係数を比較して $a = 1, b = -6$

(答) ソ. 1 タ. -6

(4) ℓ は, 点 A($-2, 0$) を通り, 傾き $\pm \tan 60^\circ$ の直線であるから

$$y = \pm \sqrt{3}(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad y = \pm \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{複号同順})$$

(答) チ. $\pm \sqrt{3}$ ツ. $\pm 2\sqrt{3}$ (複号同順)

直線 ℓ は, 2 本存在するので, センター試験のように

$$y = \boxed{}x + \boxed{}, \quad y = -\boxed{}x - \boxed{}$$

とすべきであった.

(5) 六角形の内角の和は $(6 - 2) \times 180^\circ = \mathbf{720^\circ}$

正六角形の中心を O とすると、 $\triangle OAB$ は正三角形であるから、求める垂線の長さは

$$2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(答) テ. 720 ト. $\sqrt{3}$

[3] 与式を整理すると $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2 - 4y^2 + 3 = 0$

ゆえに $(x^2 - y^2)^2 + 4(x^2 - y^2) + 3 = 0$

$x^2 - y^2 = t$ とおくと $t^2 + 4t + 3 = 0$

これを解いて $t = -1, -3$

したがって $(x + y)(x - y) = -1, -3$

x, y は負でない整数であるから、 $x + y \geq 0$ に注意して

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

第2式は $x = -1$ となり、不適。したがって、第1, 第3式を解いて

$$(x, y) = (0, 1), (1, 2)$$

(答) ナ. $t^2 + 4t + 3$ ニ. 又. $-1, -3$ ネ. ノ. $(0, 1), (1, 2)$

[4] 余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ により

$$(\sqrt{7})^2 = c^2 + (\sqrt{3})^2 - 2c \cdot \sqrt{3} \cos 30^\circ \quad \text{すなわち} \quad c^2 - 3c - 4 = 0$$

$c > 0$ に注意して、これを解くと $c = 4$ ゆえに $\mathbf{AB} = 4$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ = \sqrt{3}$$

$BD = x$ とすると、 $\triangle DBE$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}BD \cdot BE \sin B = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

上の諸式を $\frac{1}{3}S_1 < S_2 < \frac{1}{2}S_1$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{x}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{2 < x < 3}$$

(答) ハ. 4 ヒ. $\sqrt{3}$ フ. 2 ヘ. 3

1.41 平成24年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $\frac{4}{5-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると だから、その整数部分は である。
- (2) 2次方程式 $x^2 + (2a+1)x + a^2 - 1 = 0$ が実数解を持つとき、 a の範囲は $a \geq$ である。とくに重解を持つならば、その解は である。
- (3) $2|x-2| < x+3$ が成り立つ x の範囲は $< x <$ である。
- (4) 2次関数 $y = 2x^2 - 3x + 2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると、2点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通る。このとき、 $p =$, $q =$ である。
- (5) 半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する三角形 ABC において $\angle A = 135^\circ$ ならば $BC =$ である。さらに、 $\angle B = 30^\circ$ ならば、 $AB =$ である。
- [2] (1) $2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - 2a^2 + 3a - 1$ を因数分解すると、 $\times$ である。
- (2) 2つの2次関数 $y = x^2 + ax + 2a$, $y = x^2 - ax + a^2 - 3$ のグラフと x 軸との共有点の個数は、それぞれ2個である。このとき a の範囲は $< x <$ である。
- (3) $a > 0$ とする。2次関数 $y = x^2 - 6x + 11$ の $0 \leq x \leq a$ における最大値が11、最小値が2ならば、 a の値の範囲は $\leq a \leq$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$ のとき、 $\angle A =$ $^\circ$ である。また、 $\triangle ABC$ の面積は である。
- (5) 高さが4cmの円柱がある。その表面積は、半径4cmの球の表面積に等しい。このとき円柱の表面積は cm^2 であり、その底面の半径は cm である。
- [3] 2次曲線 $C_1: y = -x^2 + 2x$ の x 軸との2交点は原点 O と $A(\text{ナ}, 0)$ である。 C_1 を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した曲線を C_2 とする。 C_2 と x 軸との2交点を P , Q とすると、 P と Q の間の距離は q を用いると である。従って P と Q の距離が4であるならば、 $q =$ である。このとき P , Q の一方が O , A の間にあるのは $< p <$ または $< p <$ のときである。
- [4] $\triangle ABC$ は、辺 AC と BC の長さが2である二等辺三角形で、 $90^\circ < \angle C < 180^\circ$ とする。 $\sin \angle A$, $\cos \angle A$ は、2次方程式 $2x^2 - (1 + \sqrt{3})x + k = 0$ の解であるとき、 $k =$ であり、 $\angle A =$ $^\circ$ である。このとき、 $AB =$ であり、 $\triangle ABC$ の面積 である。

解答例

$$[1] (1) \frac{4}{5-\sqrt{3}} = \frac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \frac{4(5+\sqrt{3})}{25-3} = \frac{10+2\sqrt{3}}{11}$$

$$\text{ここで } 2\sqrt{3} = \sqrt{12}, \quad 3 < \sqrt{12} < 4$$

$$\text{したがって } \frac{10+3}{11} < \frac{10+2\sqrt{3}}{11} < \frac{10+4}{11}$$

よって、その整数部分は 1

$$(\text{答}) \text{ ア. } \frac{10+2\sqrt{3}}{11} \quad \text{イ. } 1$$

(2) 2次方程式 $x^2 + (2a+1)x + a^2 - 1 = 0$ の判別式 D は

$$D = (2a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 1) = 4a + 5$$

この2次方程式が実数解をもつとき、 $D \geq 0$ であるから

$$4a + 5 \geq 0 \quad \text{これを解いて } a \geq -\frac{5}{4}$$

とくに重解をもつとき $D = 0$ すなわち $a = -\frac{5}{4}$
したがって、その重解は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2a+1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}(2a+1) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ 2 \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) + 1 \right\} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{ ウ. } -\frac{5}{4} \quad \text{エ. } \frac{3}{4}$$

(3) 与えられた不等式から $|2x-4| < x+3$

$$\text{したがって } -(x+3) < 2x-4 < x+3$$

$$\text{これを解いて } \frac{1}{3} < x < 7$$

$$(\text{答}) \text{ オ. } \frac{1}{3} \quad \text{カ. } 7$$

- (4) 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 2 \cdots \textcircled{1}$ を平行移動した放物線の方程式は

$$y = 2x^2 + bx + c$$

とおける. これが, 2点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通るから

$$6 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c, \quad 0 = 2 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

すなわち $b + c = 4$, $3b + c = -18$

これを解いて $b = -11$, $c = 15$

ゆえに, 平行移動後の放物線の方程式は

$$y = 2x^2 - 11x + 15 \cdots \textcircled{2}$$

放物線 $\textcircled{1}$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-3}{2 \cdot 2}, -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right)$$

また, 放物線 $\textcircled{2}$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-11}{2 \cdot 2}, -\frac{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15}{4 \cdot 2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{8} \right)$$

よって $p = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2$, $q = -\frac{1}{8} - \frac{7}{8} = -1$

(答) キ. 2 ク. -1

- (5) 正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2 \cdot \sqrt{2}$

ゆえに $a = 2\sqrt{2} \sin 135^\circ = 2$, $b = 2\sqrt{2} \sin 30^\circ = \sqrt{2}$

第1余弦定理により

$$c = a \cos B + b \cos A = 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 135^\circ = \sqrt{3} - 1$$

(答) ケ. 2 コ. $\sqrt{3} - 1$

第1余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A$$

なお, 余弦定理とは, 第2余弦定理のことである.

$$\begin{aligned}
 [2] \quad (1) \quad & 2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - 2a^2 + 3a - 1 \\
 &= 2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - (a-1)(2a-1) \\
 &= \{2x + (2a-1)\}\{(a+1)x - (a-1)\} \\
 &= (2x + 2a - 1)(ax + x - a + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccl}
 2 & & 2a-1 & \longrightarrow & 2a^2 + a - 1 \\
 & \searrow & & & \\
 a+1 & \nearrow & -(a-1) & \longrightarrow & -2a + 2 \\
 \hline
 2(a+1) & & -(a-1)(2a-1) & & 2a^2 - a + 1
 \end{array}$$

(答) サ. シ. $2x + 2a - 1$, $ax + x - a + 1$

- (2) 2つの2次関数 $y = x^2 + ax + 2a$, $y = x^2 - ax + a^2 - 3$ がともに x 軸と異なる2点で交わるので, 係数について

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a > 0 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 3) > 0$$

したがって, 連立不等式 $\begin{cases} a^2 - 8a > 0 \\ a^2 - 4 < 0 \end{cases}$ の解を求めればよい.

第1式から $a < 0, 8 < a \dots \textcircled{1}$

第2式から $-2 < a < 2 \dots \textcircled{2}$

よって, ①, ②の共通範囲を求めて $-2 < a < 0$

(答) ス. -2 セ. 0

- (3) $y = x^2 - 6x + 11$ の右辺を変形すると

$$y = (x-3)^2 + 2$$

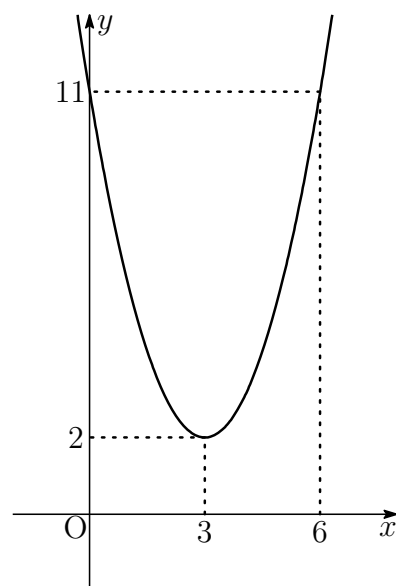
$y = 11$ となるとき x の値は

$$x = 0, 6$$

$0 \leq x \leq a$ において, この2次関数の最大値が11, 最小値が2であるための a の値の範囲は, 右のグラフから

$$3 \leq a \leq 6$$

(答) ソ. 3 タ. 6



(4) $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$ であるから, 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

ゆえに $A = 60^\circ$

また, $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

(答) チ. 60 ツ. $10\sqrt{3}$

(5) 半径 4cm の球の表面積は $4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ [cm^2]

円柱の半径を $r\text{cm}$ とすると, その表面積は

$$2 \times \pi r^2 + 2\pi r \cdot 4 = (2r^2 + 8r)\pi$$
 [cm^2]

球と円柱の表面積が等しいので

$$(2r^2 + 8r)\pi = 64\pi \quad \text{すなわち} \quad r^2 + 4r - 32 = 0$$

$r > 0$ に注意して, これを解くと $r = 4$

(答) テ. 64π ト. 4

[3] C_1 と x 軸との共有点の x 座標は

$$-x^2 + 2x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0, \mathbf{2}$$

$C_1: y = -(x-1)^2 + 1$ であるから, これを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものが

$$C_2: y - q = -(x - p - 1)^2 + 1$$

であるから, C_2 と x 軸との交点 P, Q の x 座標は

$$-q = -(x - p - 1)^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x - p - 1)^2 = q + 1$$

$$\text{ゆえに} \quad x = p + 1 \pm \sqrt{q + 1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが, P, Q の x 座標であるから,

$$PQ = (p + 1 + \sqrt{q + 1}) - (p + 1 - \sqrt{q + 1}) = 2\sqrt{q + 1}$$

$$PQ=4 \text{ のとき} \quad 2\sqrt{q + 1} = 4 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{q = 3}$$

このとき, ① より, P, Q の x 座標は $p - 1, p + 3$

したがって, P, Q の一方が O, A の間にあるのは

$$p - 1 < 0 < p + 3 < 2 \quad \text{または} \quad 0 < p - 1 < 2 < p + 3$$

$$\text{ゆえに} \quad \mathbf{-3 < p < -1} \quad \text{または} \quad \mathbf{1 < p < 3}$$

(答) ナ. 2 ニ. $2\sqrt{q + 1}$ ヌ. 3 ネ. ノ. $-3 < p < -1, 1 < p < 3$

[4] $a = b = 2$ の二等辺三角形であるから $A = B$

$$\text{ゆえに } C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 2A \quad \dots \textcircled{1}$$

$90^\circ < C < 180^\circ$ であるから

$$90^\circ < 180^\circ - 2A < 180^\circ \quad \text{ゆえに } 0^\circ < A < 45^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

$\sin A$, $\cos A$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$(x - \sin A)(x - \cos A) = 0$$

$$\text{すなわち } x^2 - (\sin A + \cos A)x + \sin A \cos A = 0$$

これが, $2x^2 - (1 + \sqrt{3})x + k = 0 \dots \textcircled{3}$ に一致するので, x^2 の係数に注意して

$$\sin A + \cos A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \sin A \cos A = \frac{k}{2}$$

上の 2 式を $(\sin A + \cos A)^2 - 2 \sin A \cos A = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{2} = 1 \quad \text{ゆえに } k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを $\textcircled{3}$ に代入して整理すると $(2x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$

したがって, この方程式の解は $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\textcircled{2} \text{ により } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに } A = 30^\circ$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $C = 120^\circ$

$$\text{正弦定理より } \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 120^\circ} \quad \text{これを解いて } AB = 2\sqrt{3}$$

また, $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}$$

(答) ハ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヒ. 30 フ. $2\sqrt{3}$ ヘ. $\sqrt{3}$

1.42 平成 24 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ を $(x - 1)^2$ で割った余りが 2 ならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$ は、中心が $\boxed{\text{ウ}}$, 半径が $\boxed{\text{エ}}$ の円を表す。
- (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で、 $\sin \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin 2\theta = \boxed{\text{オ}}$, $\cos 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 方程式 $2^{x-1} - 3(\sqrt{2})^{x-2} - 2 = 0$ は $y = (\sqrt{2})^x$ において y の方程式になおすと $\boxed{\text{キ}} = 0$ となる。従って解は $x = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 30$ の極小値は $\boxed{\text{ケ}}$, 極大値は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) a を実数とする。方程式 $x^3 - 2(a + 1)x^2 + 5ax - 2a = 0$ の実数解が $x = 2$ だけであるとき、 a の値の範囲は $\boxed{\text{サ}} < a < \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2 点 $A(2, -1)$, $B(3, 2)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{ス}}$ である。 $C(-2, 3)$ とすると、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において $\angle C = 2\angle B$ で $AB : AC = \sqrt{3} : 1$ であるなら、 $\angle B = \boxed{\text{ソ}}^\circ$ で BC は AC の $\boxed{\text{タ}}$ 倍である。
- (4) 関数 $y = \left(\log_3 \frac{x}{9}\right) \left(\log_3 \frac{x}{3}\right)$ の $3 \leq x \leq 9$ における最大値は $\boxed{\text{チ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 放物線 $C_1 : y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積 S_1 は $\boxed{\text{テ}}$ である。それらの 2 交点を通る放物線 $C_2 : y = ax^2 - 4ax + 3a + 2$ ($a > 1$) と C_1 で囲まれる部分の面積が、 S_1 の $\frac{1}{2}$ 倍ならば、 $a = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 点 $(1, 1)$ から、放物線 $C : y = 3x^2 - x + 2$ に引いた接線の接点を P, Q とすると、 P, Q の座標は $\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ である。このとき、2 点 P, Q を通る直線は $y = \boxed{\text{ヌ}}$ であり、この直線と放物線 C で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] 直線 $\ell_1 : y = \frac{3}{4}x$ と x 軸の両方に接する半径 1 の円を C_1 とし、 C_1 の中心 A の x 座標を a ($a > 0$)、 ℓ_1 と C_1 の接点を P とする。 $\angle POA = \theta$ とおくと、 $\tan \theta$ は a を用いて $\tan \theta = \boxed{\text{ノ}}$ と書ける。これを用いると、 a の値は $\boxed{\text{ハ}}$ となる。次に、点 P で ℓ_1 に接する円 C_2 の中心 B が x 軸上にあるとすると、円 C_2 の半径 PB は $\boxed{\text{ヒ}}$ で B の x 座標は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を, x の1次式 $Q(x)$ とおくと

$$x^3 + ax^2 + bx - 3 = (x-1)^2 Q(x) + 2$$

$$\text{ゆえに} \quad x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 - 2x + 1)Q(x)$$

x^3 の係数と定数項を比較して, $Q(x) = x - 5$ となるから

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1)Q(x) &= (x^2 - 2x + 1)(x - 5) \\ &= x^3 - 7x^2 + 11x - 5 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a = -7, b = 11$$

(答) ア. -7 イ. 11

(2) 方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$ を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -8 + 1 + 9$$

$$\text{ゆえに} \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$$

よって, 中心 $(-1, 3)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円を表す.

(答) ウ. $(-1, 3)$ エ. $\sqrt{2}$

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

したがって

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

(答) オ. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ エ. $\frac{7}{8}$

(4) 与えられた方程式の両辺に 2 をかけると

$$2^x - 3(\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$$y = (\sqrt{2})^x \cdots \textcircled{1} \text{ とおくと}$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+1)(y-4) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } y > 0 \text{ であるから } y = 4$$

$$\text{したがって } (\sqrt{2})^x = 4 \quad \text{これを解いて } x = 4$$

$$\text{(答) キ. } y^2 - 3y - 4 \quad \text{ク. } 4$$

$$(5) f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -4, 2$$

したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 110	$\searrow$	極小 2	$\nearrow$

よって, $x = -4$ のとき極大値 110, $x = 2$ のとき極小値 2 をとる.

$$\text{(答) ケ. } 2 \quad \text{コ. } 110$$

$$[2] (1) P(x) = x^3 - 2(a+1)x^2 + 5ax - 2a \text{ とおくと } P(2) = 0$$

$P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつので

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2ax + a)$$

$P(x) = 0$ の実数解が $x = 2$ だけであるのは, 次の i), ii) の場合である.

i) $x^2 - 2ax + a = 0$ が重解 $x = 2$ をもつとき

$$-\frac{2a}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2 - 1 \cdot a = 0$$

このとき, これを満たす a はない.

ii) $x^2 - 2ax + a = 0$ が虚数解をもつとき

$$(-a)^2 - 1 \cdot a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-1) < 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < a < 1$$

$$\text{(答) サ. } 0 \quad \text{シ. } 1$$

(2) 2点 A(2, -1), B(3, 2) を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{2 - (-1)}{3 - 2}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 7$$

AB間の距離は $AB = \sqrt{(3-2)^2 + \{2 - (-1)\}^2} = \sqrt{10}$

点 C(-2, 3) から直線 $3x - y - 7 = 0$ までの距離 d は

$$d = \frac{|3 \cdot (-2) - 3 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$$

したがって, $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{16}{\sqrt{10}} = 8$$

(答) ス. $3x - 7$ セ. 8

(3) 正弦定理により $AB : AC = \sin C : \sin B$

ゆえに $\sin C : \sin B = \sqrt{3} : 1$

すなわち $\sin C = \sqrt{3} \sin B$

$C = 2B$ より

$$\sin 2B = \sqrt{3} \sin B \quad \text{ゆえに} \quad 2 \sin B \cos B = \sqrt{3} \sin B$$

$$\sin B \neq 0 \text{ であるから} \quad \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

正弦定理により, $BC : AC = \sin A : \sin B$ であるから

$$BC : AC = \sin 90^\circ : \sin 30^\circ = 2 : 1$$

よって, BC は AC の 2 倍

(答) ソ. 30 タ. 2

(4) $t = \log_3 x$ とおくと, $3 \leq x \leq 9$ より $1 \leq t \leq 2$

$$\left(\log_3 \frac{x}{9}\right)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right) = (\log_3 x - 2)(\log_3 x - 1)$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= (t-2)(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2) \\ &= t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ゆえに $-\frac{1}{4} \leq y \leq 0$

よって, 求める関数の最大値は **0**, 最小値は $-\frac{1}{4}$

(答) チ. 0 ツ. $-\frac{1}{4}$

(5) 放物線 $C_1: y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1, 3$$

よって, 求める図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^2 \{2 - (x^2 - 4x + 5)\} dx \\ &= - \int_1^3 (x-1)(x-3) dx = - \left(-\frac{1}{6}\right) (3-1)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$C_1: y = x^2 - 4x + 5$ と $C_2: y = ax^2 - 4ax + 3a + 2$ ($a > 1$) で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^3 \{(x^2 - 4x + 5) - (ax^2 - 4ax + 3a + 2)\} dx \\ &= -(a-1) \int_1^3 (x-1)(x-3) dx \\ &= -(a-1) \times \left(-\frac{1}{6}\right) (3-1)^3 = \frac{4}{3}(a-1) \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{2}{3} \text{ であるから, 上式により } \quad a = \frac{3}{2}$$

(答) テ. $\frac{4}{3}$ ト. $\frac{3}{2}$

[3] $y = 3x^2 - x + 2$ を微分すると $y' = 6x - 1$

接点の座標を $(a, 3a^2 - a + 2)$ とすると、この点における接線の傾きは $6a - 1$ であるから、接線の方程式は

$$y - (3a^2 - a + 2) = (6a - 1)(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad y = (6a - 1)x - 3a^2 + 2$$

これが点 $(1, 1)$ を通るから

$$1 = (6a - 1) \cdot 1 - 3a^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0, 2$$

ゆえに、接点の座標は $(0, 2), (2, 12)$

この2点を通る直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{12 - 2}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{ゆえに} \quad y = 5x + 2$$

この直線と放物線 $C: y = 3x^2 - x + 4$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(5x + 2) - (3x^2 - x + 2)\} dx \\ &= -3 \int_0^2 x(x - 2) dx = -3 \left(-\frac{1}{6} \right) (2 - 0)^3 = 4 \end{aligned}$$

(答) ナ. ニ. $(0, 2), (2, 12)$ ヌ. $5x + 2$ ネ. 4

[4] $\angle AOB = \theta$ であるから, A の y 座標は $a \tan \theta$,
円 C_1 の半径が 1 であるから

$$a \tan \theta = 1 \quad \text{よって} \quad \tan \theta = \frac{1}{a}$$

$\tan 2\theta = \frac{3}{4}$ であるから

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{3}{4}$$

ゆえに $(\tan \theta + 3)(3 \tan \theta - 1) = 0$

$\tan \theta > 0$ であるから $\tan \theta = \frac{1}{3}$

したがって $a = 3$

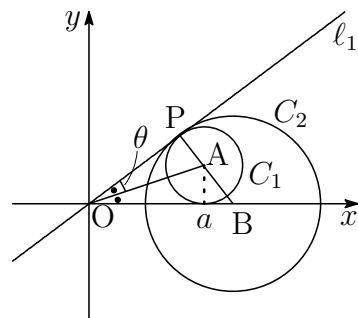
$OP = a$ であるから

$$PB = OP \tan 2\theta = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

また, B の x 座標は

$$\sqrt{OP^2 + PB^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{15}{4}$$

(答) ノ. $\frac{1}{a}$ ハ. 3 ヒ. $\frac{9}{4}$ フ. $\frac{15}{4}$



1.43 平成23年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ を展開すると x^3 の係数は , x^2 の係数は となる。
- (2) $(n + m\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$ をみたす整数 m, n は $m =$, $n =$ である。
- (3) 連立不等式 $5x + 3 \leq 2x + 4$, $2x - 3 \leq 4x + 5$ をみたす x の範囲は $\leq x \leq$ である。
- (4) 2点 $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$ に対して, x 軸に関して点 A と対称な点 C の座標は で, 2点 B, C を通る直線と x 軸との交点の座標は である。
- (5) $a > 0$ のとき, 放物線 $y = -ax^2 + 4ax - 3a + 3$ の $1 \leq x \leq 4$ における最大値は である。このとき, 最小値が -3 であるならば $a =$ である。
- [2] (1) $x^2 - y^2 + 6y - 9$ を因数分解すると $(\text{サ}) \times (\text{シ})$ となる。
- (2) $\triangle ABC$ において, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AB = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるならば, $CA =$, $BC =$ である。
- (3) 曲線 $C_1: y = 2x^2 - 3x - 2$ を x 軸方向に a だけ平行移動した曲線を C_2 とする。 C_1 と x 軸との交点を左から P, Q とし, C_2 と x 軸との交点を左から R, S とすると, S の x 座標は であるから, $PS = 5$ となる正数 a の値は である。
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $y = -\sin^2 \theta + 2 \cos \theta - 1$ の最大値は , 最小値は である。
- (5) 川幅が $100\sqrt{3}$ m で両岸が平行な川の両岸にそれぞれ点 P, Q を, 線分 PQ が岸に直交するようにとる。点 Q のある岸の Q の下流に $\angle QPR = 60^\circ$ である目印の点 R をとると $QR =$ m である。流れが岸に平行であるとするとき, 川の中央における流速を調べるため PQ の中央 A から流した物体が PR の中点 B を通るまでに要した時間が25分であった。このとき流速は分速 m である。
- [3] A, B, C の玉1個の重さは, それぞれ1g, 5g, 10gである。これらの玉を取り混ぜ, 合計100個, 重さの合計が730gにしたい, ただし選ばない種類の玉があってもよいとする。 A 玉を x 個, B 玉を y 個, C 玉を z 個選んだとき, 与えられた条件を式で表すと $= 100$, $= 730$ である。 C 玉の個数 z の最大値は であり, そのとき $x =$, $y =$ である。

- [4] $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC において, $AB = 8$, $AC = a$ とすると $BC = \boxed{\text{ハ}}$ である。辺 BC 上の中点 M より辺 AB に下ろした垂線の足を N とすると $BN = \boxed{\text{ヒ}}$ である。特に $AN : BN = 3 : 1$ であるならば $a = \boxed{\text{フ}}$ で, $\cos A = \boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

- [1] (1) $x^2 + 2x = t$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (t-1)(t+2) = t^2 + t - 2 \\ &= (x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x) - 2 \\ &= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + x^2 + 2x - 2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

(答) ア. 4 イ. 5

- (2) 与式の両辺を $1 + \sqrt{3}$ で割ると

$$\begin{aligned} n + m\sqrt{3} &= \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{3 - 1} = -3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

m, n は有理数であるから $\mathbf{m = 2, n = -3}$

(答) ウ. 2 エ. -3

- (3) $5x + 3 \leq 2x + 4$ を解いて $x \leq \frac{1}{3}$ … ①

$$2x - 3 \leq 4x + 5 \text{ を解いて } x \geq -4 \quad \dots \text{ ②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } -4 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

(答) オ. -4 カ. $\frac{1}{3}$

- (4) x 軸に関して点 A(-1, 2) と対称な点 C の座標は $(-1, -2)$

$$2 \text{ 点 } B(3, 4), C(-1, -2) \text{ を通る直線の方程式は } y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

この直線の x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{これを解いて } x = \frac{1}{3}$$

よって, 2 点 B, C を通る直線の x 軸との交点の座標は $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(答) キ. $(-1, -2)$ ク. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(5) $y = -ax^2 + 4ax - 3a + 3$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -a(x^2 - 4x) - 3a + 3 \\ &= -a\{(x-2)^2 - 2^2\} - 3a + 3 \\ &= -a(x-2)^2 + a + 3 \end{aligned}$$

x^2 の係数について $-a < 0$ であるから, $1 \leq x \leq 4$ において,
 y は $x = 2$ で最大値 $a + 3$ をとり, $x = 4$ で最小値 $-3a + 3$ をとる.
 最小値が -3 であるとき

$$-3a + 3 = -3 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

(答) ケ. $a + 3$ コ. 2

$$\begin{aligned} [2] \quad (1) \quad x^2 - y^2 + 6y - 9 &= x^2 - (y-3)^2 \\ &= \{x + (y-3)\}\{x - (y-3)\} \\ &= (x + y - 3)(x - y + 3) \end{aligned}$$

(答) サ. シ. $x + y - 3$, $x - y + 3$

(2) $c = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $B = 45^\circ$, $C = 60^\circ$. 正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
 $b \sin C = c \sin B$ であるから

$$b \sin 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin 45^\circ \quad \text{ゆえに} \quad b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを解いて $b = \sqrt{3}$

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B = \sqrt{3} \cos 60^\circ + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(答) ス. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ セ. $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

第1余弦定理

$a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$
 なお, 余弦定理とは, 第2余弦定理のことである.

(3) $y = 2x^2 - 3x - 2$ より $y = (x - 2)(2x + 1)$

したがって $P(-\frac{1}{2}, 0)$, $Q(2, 0)$

Q を x 軸方向に a だけ平行移動した点が S であるから $S(2 + a, 0)$

$$a > 0 \text{ に注意して } PS = (2 + a) - \left(-\frac{1}{2}\right) = a + \frac{5}{2}$$

$$PS = 5 \text{ のとき } a + \frac{5}{2} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{5}{2}$$

(答) ソ. $2 + a$ タ. $\frac{5}{2}$

(4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\cos \theta = x$ とすると $-1 \leq x \leq 1$

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$ であるから, 関数は

$$\begin{aligned} y &= -(1 - x^2) + 2x - 1 \\ &= x^2 + 2x - 2 \\ &= (x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって $x = 1$ すなわち $\theta = 0^\circ$ のとき 最大値 **1**

$x = -1$ すなわち $\theta = 180^\circ$ のとき 最小値 **-3**

(答) チ. 1 ツ. -3

(5) 右の図より

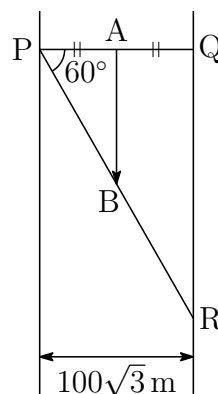
$$\begin{aligned} QR &= PQ \tan 60^\circ \\ &= 100\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= \mathbf{300} \text{ [m]} \end{aligned}$$

$AB = \frac{1}{2}QR$ であるから

$$AB = \frac{1}{2} \times 300 = 150 \text{ [m]}$$

よって, 求める流速は $\frac{150}{25} = \mathbf{6}$ [m/分]

(答) テ. 300 ト. 6



[3] 題意より $x + y + z = 100$, $x + 5y + 10z = 730$

$$\text{上の2式より} \quad \begin{cases} x + y = 100 - z & \cdots \textcircled{1} \\ x + 5y = 730 - 10z & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ① より

$$4y = 630 - 9z \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{9(70 - z)}{4} \quad \cdots \textcircled{3}$$

① $\times 5$ - ② より

$$4x = 5z - 230 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{5(z - 46)}{4} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$x \geq 0$, $y \geq 0$ であるから, ③, ④ より

$$70 - z \geq 0 \quad \text{かつ} \quad z - 46 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 46 \leq z \leq 70$$

よって, z の最大値は, ③, ④ に注意して **70**, このとき $x = 30$, $y = 0$

(答) ナ. $x + y + z$ ニ. $x + 5y + 10z$ ヌ. 70 ネ. 30 ノ. 0

[4] 三平方の定理を $\triangle ABC$ に適用すると

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{64 - a^2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{64 - a^2}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{64 - a^2}}{8}$$

$\angle BMN = A$ であるから

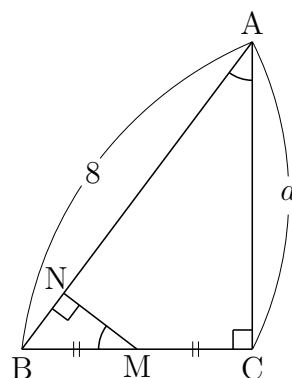
$$BN = BM \sin \angle BMC = \frac{1}{2}\sqrt{64 - a^2} \times \frac{\sqrt{64 - a^2}}{8} = \frac{64 - a^2}{16}$$

$AN : BN = 3 : 1$ であるから, $AB = 8$ より $BN = 2$

$$\text{したがって} \quad \frac{64 - a^2}{16} = 2 \quad a > 0 \text{ であるから} \quad a = 4\sqrt{2}$$

$$\cos A = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(答)} \quad \text{ハ. } \sqrt{64 - a^2} \quad \text{ヒ. } \frac{64 - a^2}{16} \quad \text{フ. } 4\sqrt{2} \quad \text{ヘ. } \frac{1}{\sqrt{2}}$$



1.44 平成 23 年度推薦後期試験 (90 分)

- [1] (1) 勝手な x に対して, $(2x - a)(x + 2) = 2x^2 + bx - 6$ が成り立つならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{(a-3)^2}$ の根号をはずし簡単にすると $\boxed{\text{ウ}}a - \boxed{\text{エ}}$ となる。ただし, $1 < a < 3$ とする。
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ の頂点が $(2, -4)$ であるとき, $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $6x^2 + ax - 2 = 0$ の 1 つの解が $\frac{1}{2}$ であるとき, $a = \boxed{\text{キ}}$ であり, もう 1 つの解は $x = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $CA = \sqrt{57}$ ならば, $\cos \angle B = \boxed{\text{ケ}}$ であるので, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 11x + 9y - 6$ を因数分解すると $(\boxed{\text{サ}}) \times (\boxed{\text{シ}})$ である。
- (2) 2 次関数 $y = 2x^2 - 8x + k$ の $0 \leq x \leq 3$ における最大値が 5 であるとき, $k = \boxed{\text{ス}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) すべての実数 x に対して 2 次不等式 $x^2 + 2(k+1)x + 4 > 0$ が成り立つような定数 k の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < k < \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 1 + \sqrt{3}$, $BC = 2$ とする。 $\angle B = 60^\circ$ のとき, $AC = \boxed{\text{チ}}$, $\angle A = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ である。
- (5) 半径 4cm の鉄球がある。この鉄球を溶かして 8 個の鉄球をつくる時, その半径は $\boxed{\text{テ}}$ cm である。新しくできた鉄球の表面積の合計は, もと鉄球の $\boxed{\text{ト}}$ 倍である。
- [3] 長方形 ABCD において, 2 点 A, B が x 軸上にあり, 2 点 C, D が放物線 $\Gamma: y = -2x^2 - 4x + 10$ 上にあるとする。ただし点 B の x 座標が点 A の x 座標より大きいとする。このとき, $AB = a$ とすると, 点 B の x 座標は $\boxed{\text{ナ}}$ であるから, 長方形 ABCD の面積は $\boxed{\text{ニ}}$ である。また Γ の頂点を E とすると, $\triangle EDC$ の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。従って長方形 ABCD の面積が $\triangle EDC$ の面積より大きくなるのは $0 < a < \boxed{\text{ネ}}$ のときである。
- [4] $\triangle ABC$ において, $\angle A$ の 2 等分線と BC の交点を D とし, $\angle A = 60^\circ$, $DC = 2$ とする。 $\theta = \angle C$ とおくと, $0 < \sin \theta \leq \boxed{\text{ノ}}$ であるので, AD の長さは $\theta = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ のとき最大値 $\boxed{\text{ヒ}}$ をとる。このとき, $BD = \boxed{\text{フ}}$, $AB = \boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

[1] (1) 等式の左辺を展開し、 x について整理すると

$$2x^2 + (-a + 4)x - 2a = 2x^2 + bx - 6$$

上式は、 x に関する恒等式であるから、同じ次数の項の係数は等しいから

$$-a + 4 = b, \quad -2a = -6$$

これを解いて $\mathbf{a = 3, b = 1}$

(答) ア. 3 イ. 1

$$(2) \sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{(a-3)^2} = |a-1| - |a-3|$$

$1 < a < 3$ であるから

$$|a-1| = a-1, \quad |a-3| = -(a-3) = -a+3$$

よって (与式) $= (a-1) - (-a+3) = \mathbf{2a - 4}$

(答) ウ. 2 エ. 4

(3) 放物線の頂点の座標が $(2, -4)$ であるから、 x^2 の係数に注意して

$$y = (x-2)^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad y = x^2 - 4x$$

上式と $y = x^2 + ax + b$ の係数を比較して $\mathbf{a = -4, b = 0}$

(答) オ. -4 カ. 0

(4) $x = \frac{1}{2}$ は方程式 $6x^2 + ax - 2 = 0$ の解であるから

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a \times \frac{1}{2} - 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a = 1}$$

このとき、方程式は $6x^2 + x - 2 = 0$ であるから

$$(2x-1)(3x+2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$$

よって、もう1つの解は $\mathbf{x = -\frac{2}{3}}$

(答) キ. 1 ク. $-\frac{2}{3}$

(5) $a = 3\sqrt{3}$, $b = \sqrt{57}$, $c = 2\sqrt{3}$ であるから, 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{57})^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{12 + 27 - 57}{36} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって $B = 120^\circ$

よって, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(答) ケ. $-\frac{1}{2}$ コ. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

[2] (1) (x に注目する)

$$\begin{aligned}&2x^2 - 5xy - 3y^2 + 11x + 9y - 6 \\ &= 2x^2 + (-5y + 11)x - 3(y - 1)(y - 2) \\ &= \{x - 3(y - 2)\}\{2x + (y - 1)\} \\ &= (x - 3y + 6)(2x + y - 1)\end{aligned}$$

(答) サ. シ. $x - 3y + 6$, $2x + y - 1$

(2) $y = 2x^2 - 8x + k$ を変形すると $y = 2(x - 2)^2 + k - 8$
 $0 \leq x \leq 3$ において,

$x = 0$ で最大値 k , $x = 2$ で最小値 $k - 8$

をとる.

したがって, 最大値が 5 であるから $k = 5$

最小値は $k - 8 = 5 - 8 = -3$

(答) ス. 5 セ. -3

(3) すべての x について $x^2 + 2(k + 1)x + 4 > 0$ が成り立つとき, x^2 の係数が正であるから, 係数について $D/4 < 0$ をみたすので

$$(k + 1)^2 - 1 \cdot 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k + 3)(k - 1) < 0$$

これを解いて $-3 < k < 1$

(答) ソ. -3 タ. 1

(4) $c = 1 + \sqrt{3}$, $a = 2$, $B = 60^\circ$ であるから、余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot 2 \times \frac{1}{2} \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから $b = \sqrt{6}$ すなわち $AC = \sqrt{6}$

正弦定理により, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{6} \sin A = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$B = 60^\circ$ より, $A < 120^\circ$ であるから $A = 45^\circ$

(答) チ. $\sqrt{6}$ ツ. 45°

(5) 元の鉄球と溶かしてできた鉄球1個の体積比は

$$1 : \frac{1}{8} = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

よって、元の鉄球と溶かしてできた鉄球1個の相似比は

$$1 : \frac{1}{2}$$

溶かしてできた鉄球1個の半径は $4 \times \frac{1}{2} = 2$ [cm]

したがって、元の鉄球と溶かしてできた鉄球1個の表面積の比は

$$1 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

したがって、新しくできた鉄球の表面積の合計は元の鉄球の表面積の

$$8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \text{ 倍}$$

(答) テ. 2 ト. 2

[3] $\Gamma: y = -2x^2 - 4x + 10$ を変形すると

$$y = -2(x+1)^2 + 12$$

ゆえに、 Γ の頂点は $E(-1, 12)$
 $AB = a$ のとき、右の図のように、

B の x 座標は $-1 + \frac{a}{2}$

C の y 座標は

$$y = -2\left(-1 + \frac{a}{2} + 1\right)^2 + 12 = -\frac{a^2}{2} + 12$$

よって、長方形 $ABCD$ の面積は $a\left(-\frac{a^2}{2} + 12\right)$

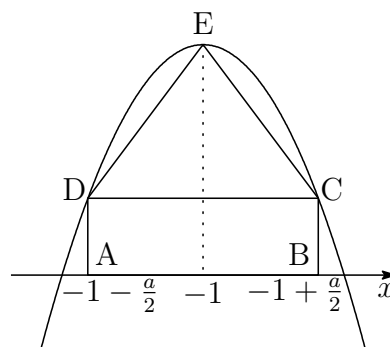
$$\triangle EDC \text{ の面積は } \frac{1}{2}a\left\{12 - \left(-\frac{a^2}{2} + 12\right)\right\} = \frac{a^3}{4}$$

長方形 $ABCD$ の面積が $\triangle EDC$ の面積より大きくなるとき、上の 2 式より

$$a\left(-\frac{a^2}{2} + 12\right) > \frac{a^3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad a(a+4)(a-4) < 0$$

このとき、 $a > 0$ であるから $0 < a < 4$

(答) ナ. $-1 + \frac{a}{2}$ ニ. $a\left(-\frac{a^2}{2} + 12\right)$ ヌ. $\frac{a^3}{4}$ ネ. 4



[4] $\triangle ADC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AD}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

ゆえに $AD = 4 \sin \theta$

また、 $0 < \sin \theta \leq 1$ であるから

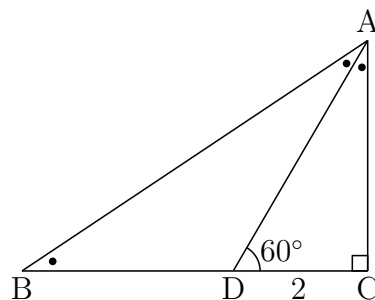
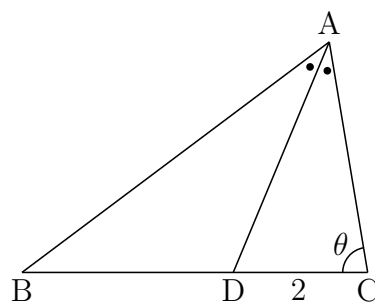
AD は $\theta = 90^\circ$ のとき最大値 4 をとる.

このとき、 $BD = AD$ の二等辺三角形であるから $BD = 4$

$\triangle ABD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \quad \text{よって} \quad AB = 4\sqrt{3}$$

(答) ノ. 1 ハ. 90 ヒ. 4 フ. 4 ヘ. $4\sqrt{3}$



1.45 平成23年度一般試験(90分)

- [1] (1) $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (2a+b)x + 1$ が $x+1$ で割り切れ、 $x-2$ で割った余りが3であれば $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 方程式 $x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y + 6a^2 - 15a + 8 = 0$ が円を表すとき、 a の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < a < \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $0 \leq x < \pi$ のとき、 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす x の値は $x = \boxed{\text{オ}}$ 、 $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\frac{1}{\sqrt{2}} < 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < \frac{1}{\sqrt{2}} 2^x$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{\text{キ}} < x < \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $F(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt$ とおくとき、 $F(x)$ の値は $\boxed{\text{ケ}} < x < \boxed{\text{コ}}$ の範囲で減少する。
- [2] (1) $x = 2 - \sqrt{3}i$ の共役な複素数を y とするとき、 $x^2 + y^2 = \boxed{\text{サ}}$ 、 $x^3 + y^3 = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 条件 $y \geq x$ 、 $y \leq 2x$ 、 $y \leq -2x + 4$ の下で $x + y$ は、 $(x, y) = \boxed{\text{ス}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。
- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲における $2\sqrt{3}\cos 2x + 4\sin x \cos x$ の最大値は $\boxed{\text{ソ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\log_3(x-3) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ が、 $x = 1$ で極値10をとるとき、 $a = \boxed{\text{テ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 放物線 $C: y = -2x^2 + \frac{1}{3}$ の頂点 P を通り、 x 軸の正方向とのなす角が θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の直線 ℓ_1 と x 軸の交点を Q とすると、 Q の座標は $m = \tan \theta$ を用いると、 $(\boxed{\text{ナ}}, 0)$ である。 Q を通り、 x 軸の正方向とのなす角が 2θ である直線を ℓ_2 とすると、 ℓ_2 の方程式は m を用いると $y = \boxed{\text{ニ}}$ である。特に、 ℓ_2 が C に接するならば $m = \boxed{\text{ヌ}}$ で、接点の x 座標は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] 放物線 $y = x^2 - 2x - 2$ を C_1 , 放物線 $y = 2x^2$ を C_2 とする。 C_2 上の点 $P(a, 2a^2)$ における接線 ℓ は $y = \boxed{\text{ノ}}$ である。 C_1 と ℓ との交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると, $\beta - \alpha = \boxed{\text{ハ}}$ である。 C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表すと, $S = \boxed{\text{ヒ}}$ である。点 P が C_2 上を動くとき, S は $a = \boxed{\text{フ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ヘ}}$ をとる。

解答例

- [1] (1) $f(x)$ は $x + 1$ で割り切れ, $x - 2$ で割った余りが 3 であるから

$$f(-1) = 0, \quad f(2) = 3$$

$$\text{ゆえに} \quad (-1)^3 + (a+1) \cdot (-1)^2 + (2a+b) \cdot (-1) + 1 = 0$$

$$2^3 + (a+1) \cdot 2^2 + (2a+b) \cdot 2 + 1 = 3$$

$$\text{整理すると} \quad a + b = 1, \quad 4a + b = -5$$

$$\text{これを解いて} \quad \mathbf{a = -2, \quad b = 3}$$

(答) ア. -2 イ. 3

- (2) 方程式 $x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y + 6a^2 - 15a + 8 = 0$ を変形すると

$$x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y = -6a^2 + 15a - 8$$

$$\{x + (a-1)\}^2 + \{y - (2a-3)\}^2 = -6a^2 + 15a - 8 + (a-1)^2 + (2a-3)^2$$

$$(x+a-1)^2 + (y-2a+3)^2 = -a^2 + a + 2$$

$$\text{これが, 円を表すから} \quad -a^2 + a + 2 > 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a^2 - a - 2 < 0$$

$$\text{したがって} \quad (a+1)(a-2) < 0$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{-1 < a < 2}$$

(答) ウ. -1 エ. 2

- (3) $0 \leq x < \pi$ より $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\text{このとき, } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を満たす } x \text{ は}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{x = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi}$$

(答) オ. カ. $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi$

- (4) 与式を変形すると $2^{-\frac{1}{2}} < 2^{2-\frac{1}{2}x} < 2^{x-\frac{1}{2}}$
 底2は1より大きいから $-\frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2}x < x - \frac{1}{2}$

これを解いて $\frac{5}{3} < x < 5$

(答) ケ. $\frac{5}{3}$ コ. 5

- (5) $F(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt$ を x について微分すると

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt = x^2 - 3x + 2$$

$F(x)$ が減少するのは, $F'(x) < 0$ となる x の値の範囲であるから

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 1 < x < 2$$

(答) ケ. 1 コ. 2

- [2] (1) y は x と共役であるから $y = 2 + \sqrt{3}i$

$$x + y = (2 - \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i) = 4$$

$$xy = (2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i) = 7$$

したがって

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 7 = 2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 4^3 - 3 \cdot 7 \cdot 4 = -20$$

(答) サ. 2 シ. -20

- (2) 与えられた連立不等式の表す領域は, 3点

$$(0, 0), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (1, 2)$$

を頂点とする三角形の周および内部である.

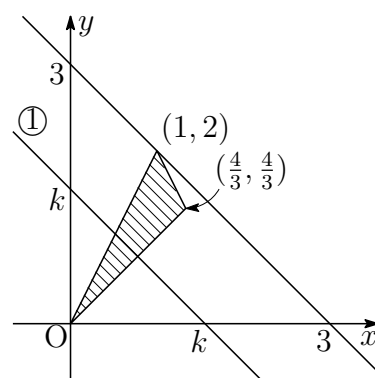
$$x + y = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと, これは傾きが -1 , y 切片が k である直線を表す. 直線 $\textcircled{1}$ がこの領域と共有点をもつときの k の値の最大値を求めればよい.

したがって, 直線 $\textcircled{1}$ が点 $(1, 2)$ を通るとき k は最大値 3 をとる.

よって, $x + y$ は, $(x, y) = (1, 2)$ のとき, 最大値 3 をとる.

(答) ス. $(1, 2)$ セ. 3



(3) 与式を変形すると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\cos 2x + 4\sin x \cos x &= 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x \\ &= 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ より, $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから

$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 **4**, $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 **2** をとる.

(答) ソ. 4 タ. 2

(4) 真数は正であるから

$$x - 3 > 0, \quad x - 5 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\log_3(x - 3) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$ を変形すると

$$\begin{aligned} \log_3(x - 3) + \log_3(x - 5) &< 2 \\ \log_3(x - 3)(x - 5) &< \log_3 9 \end{aligned}$$

底 3 は 1 より大きいから $(x - 3)(x - 5) < 9$

① に注意して, これを解くと $5 < x < 4 + \sqrt{10}$

(答) チ. 5 ツ. $4 + \sqrt{10}$

(5) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(1) = 10$, $f'(1) = 0$ であるから

$$1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4a = 10, \quad 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0$$

整理すると $5a + b = 9$, $2a + b = -3$

これを解いて $a = 4$, $b = -11$

(答) テ. 4 ト. -11

[3] ℓ_1 は傾き m , y 切片が $\frac{1}{3}$ の直線であるから

$$y = mx + \frac{1}{3}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$mx + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{1}{3m}$$

したがって, Q の座標は $\left(-\frac{1}{3m}, 0\right)$

$$\ell_2 \text{ の傾きは } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

ゆえに, 直線 ℓ_2 の方程式は

[1] $m \neq 1$ のとき

$$y = \frac{2m}{1 - m^2} \left(x + \frac{1}{3m}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2m}{1 - m^2}x + \frac{2}{3(1 - m^2)}$$

[2] $m = 1$ のとき $x = -\frac{1}{3}$

ℓ_2 と C が接するのは, [1] の場合であり, C と ℓ_2 から y を消去すると

$$-2x^2 + \frac{1}{3} = \frac{2m}{1 - m^2}x + \frac{2}{3(1 - m^2)}$$

$$\text{すなわち} \quad 2x^2 + \frac{2m}{1 - m^2}x + \frac{1 + m^2}{3(1 - m^2)} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① の方程式の係数について

$$D/4 = \left(\frac{m}{1 - m^2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1 + m^2}{3(1 - m^2)} = \frac{(2m^2 - 1)(m^2 + 1)}{3(1 - m^2)^2}$$

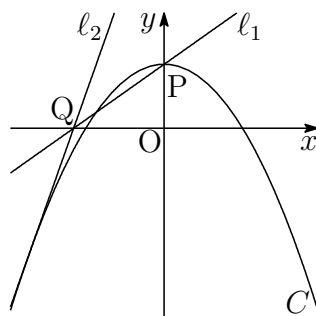
ℓ_2 が C に接するとき, $D = 0$ であるから $2m^2 - 1 = 0$

$m = \tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) であるから, $m > 0$ に注意して $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

また, 接点の x 座標は, ① および m の値により

$$-\frac{\frac{2m}{1 - m^2}}{2 \cdot 2} = -\frac{m}{2(1 - m^2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ ナ. } -\frac{1}{3m} \quad \text{ニ. } \frac{2m}{1 - m^2}x + \frac{2}{3(1 - m^2)} \quad \text{ヌ. } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ネ. } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



作問ミス

$y = \boxed{\text{ニ}}$ に適する式は, $m \neq 1$ のときであり, $m = 1$ のときは, $x = -\frac{1}{3}$

となり, $\boxed{\text{ニ}}$ に適用することができない.

本来であれば, $m > 0$ であるから

$$m \neq 1 \text{ のとき } y = \boxed{}, \quad m = 1 \text{ のとき } x = \boxed{}$$

などとすべきところであった.

[4] $y = 2x^2$ を微分すると $y' = 4x$

P における接線の傾きは $4a$ であるから, ℓ の方程式は

$$y - 2a^2 = 4a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 4ax - 2a^2$$

C_1 と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2 - 2x - 2 = 4ax - 2a^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2(2a + 1)x + 2a^2 - 2 = 0$$

この方程式の解が $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2(2a + 1), \quad \alpha\beta = 2a^2 - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4(2a^2 + 4a + 3)$

$\beta - \alpha > 0$ であるから $\beta - \alpha = 2\sqrt{2a^2 + 4a + 3}$

C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S は, ①, ② に注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(4ax - 2a^2) - (x^2 - 2x - 2)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - 2(2a + 1)x + 2a^2 - 2\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{3}(2a^2 + 4a + 3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

上式から $S = \frac{4}{3}\{2(a + 1)^2 + 1\}^{\frac{3}{2}}$

ゆえに, S は $a = -1$ で最小値 $\frac{4}{3}$ をとる.

(答) ノ. $4ax - 2a^2$ ハ. $2\sqrt{2a^2 + 4a + 3}$ ヒ. $\frac{4}{3}(2a^2 + 4a + 3)^{\frac{3}{2}}$

フ. -1 ヘ. $\frac{4}{3}$

1.46 平成22年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(2x - 3y + 3)(2x + 3y - 3)$ を展開すると $4x^2 - \boxed{\text{ア}}y^2 + \boxed{\text{イ}}y - 9$ となる。
- (2) a が 2 と異なる正の整数のとき $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{2}}{\sqrt{a} - \sqrt{2}}$ を有理数に直すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。特にその有理数が 4 となるのは $a = \boxed{\text{エ}}$ のときである。
- (3) 不等式 $3|x - 2| < 2x + 1$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 2 次不等式 $ax^2 + bx + 3 > 0$ の解が $-1 < x < 3$ であるとき、 $a = \boxed{\text{キ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $y = 3x^2 - 6x + 5$ のグラフの頂点は $\boxed{\text{ケ}}$ で、軸は直線 $x = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $y = -2x^2 + 12x - 14$ の $2 \leq x \leq 5$ における最大値は $\boxed{\text{サ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $\triangle ABC$ において $AB = 2$ 、 $BC = \sqrt{6}$ 、 $\angle C = 45^\circ$ とする。このとき $\triangle ABC$ の外接円の半径は $\boxed{\text{ス}}$ である。また、 $0 < \angle A < 90^\circ$ ならば、 $\angle A = \boxed{\text{セ}}^\circ$ である。
- (3) $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき、 $\cos \theta = \boxed{\text{ソ}}$ 、 $\tan \theta = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 四角形 $ABCD$ において $BC = 4$ 、 $CD = 2$ 、 $AD = \sqrt{3}$ 、 $\angle ABD = 30^\circ$ 、 $\angle C = 60^\circ$ ならば $BD = \boxed{\text{チ}}$ 、 $AB = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 四面体 P と四面体 Q は相似で、相似比は $2:1$ である。 P の体積が 20cm^3 、表面積が 8cm^2 のとき、 Q の体積は $\boxed{\text{テ}}\text{cm}^3$ 、表面積は $\boxed{\text{ト}}\text{cm}^2$ である。
- [3] 2 次関数 $y = -2x^2 + 12x$ のグラフ C_1 と x 軸との交点は $O(0, 0)$ と $A(\boxed{\text{ナ}}, 0)$ である。 C_1 を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを C_2 とする。 C_2 も O を通るなら、 a と b は関係式 $b = \boxed{\text{ニ}}$ をみたす。このとき、 C_2 と x 軸の O 以外の交点の座標は $B(\boxed{\text{ヌ}}, 0)$ であるから、 $OA : AB = 3 : 2$ となるのは $a = \boxed{\text{ネ}}$ のときである。ただし $a > 0$ とする。
- [4] $\triangle ABC$ において、 $AB = 4$ 、 $AC = 5$ とする。 $\angle A = \theta$ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であり、さらに等式 $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$ をみたすとする。このとき $\theta = \boxed{\text{ノ}}^\circ$ であり、 $BC = \boxed{\text{ハ}}$ である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ヒ}}$ となる。 BC 上の点 D を $\triangle ABD$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の半分になるように定めるとき $AD = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

$$\begin{aligned}
[1] \quad (1) \quad (2x - 3y + 3)(2x + 3y - 3) &= \{2x - (3y - 3)\}\{2x + (3y - 3)\} \\
&= (2x)^2 - (3y - 3)^2 \\
&= 4x^2 - (9y^2 - 18y + 9) \\
&= 4x^2 - 9y^2 + 18y - 9
\end{aligned}$$

(答) ア. 9 イ. 18

$$(2) \quad \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2}}{\sqrt{a} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{2}}{\sqrt{a} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{2})(\sqrt{a} - \sqrt{2})} = \frac{2(a + 2)}{a - 2}$$

特にこの値が 4 のとき

$$\frac{2(a + 2)}{a - 2} = 4 \quad \text{これを解いて} \quad a = 6$$

(答) ウ. $\frac{2(a + 2)}{a - 2}$ エ. 6

$$(3) \quad 3|x - 2| < 2x + 1 \quad \text{から} \quad |3(x - 2)| < 2x + 1$$

$$\text{したがって} \quad -(2x + 1) < 3(x - 2) < 2x + 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{cases} -(2x + 1) < 3(x - 2) \\ 3(x - 2) < 2x + 1 \end{cases}$$

$$\text{第 1 式から} \quad -2x - 1 < 3x - 6$$

$$\text{すなわち} \quad x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{第 2 式から} \quad 3x - 6 < 2x + 1$$

$$\text{すなわち} \quad x < 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて} \quad 1 < x < 7$$

(答) オ. 1 カ. 7

(4) $-1 < x < 3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x - 3 < 0$$

求める 2 次不等式は、定数項に注意して $-x^2 + 2x + 3 > 0$

よって $\mathbf{a = -1, b = 2}$

(答) キ. -1 ク. 2

(5) $y = 3x^2 - 6x + 5$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 5 &= 3(x^2 - 2x) + 5 \\ &= 3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &= 3(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

よって、グラフの頂点は $(1, 2)$ 、軸は $x = 1$

(答) ケ. $(1, 2)$ コ. 1

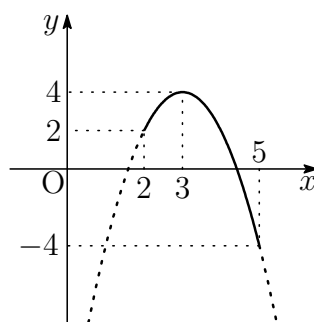
[2] (1) $y = -2x^2 + 12x - 14$ を変形すると

$$y = -2(x-3)^2 + 4$$

$2 \leq x \leq 5$ でのグラフは、右の図の実線部分である。よって、 y は

$x = 3$ で **最大値 4** をとり、
 $x = 5$ で **最小値 -4** をとる。

(答) サ. 4 シ. -4



(2) 外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\text{また} \quad \sin A = \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < \angle A < 90^\circ$ であるから $\mathbf{\angle A = 60^\circ}$

(答) ス. $\sqrt{2}$ セ. 60

(3) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{(答) ソ. } -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{タ. } -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(4) $\triangle BCD$ において

$$\frac{CD}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \cos C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

であるから, $\angle BDC = 90^\circ$. よって

$$BD = BC \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

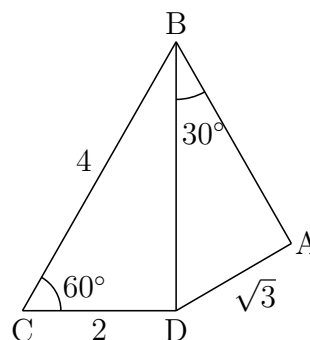
また, $\triangle ABD$ において

$$\frac{DA}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \sin B = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

であるから, $\angle DAB = 90^\circ$. よって

$$AB = BD \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\text{(答) チ. } 2\sqrt{3} \quad \text{ツ. } 3$$



(5) P と Q の相似比より, 体積比は $2^3 : 1$, 表面積の比は $2^2 : 1$ であるから

$$P \text{ の体積が } 20\text{cm}^3 \text{ であるから, } Q \text{ の体積は } 20 \times \frac{1}{2^3} = \frac{5}{2} \text{ cm}^3$$

$$P \text{ の表面積が } 8\text{cm}^2 \text{ であるから, } Q \text{ の表面積は } 8 \times \frac{1}{2^2} = 2 \text{ cm}^2$$

$$\text{(答) テ. } \frac{5}{2} \quad \text{ト. } 2$$

[3] 放物線 $C_1: y = -2x^2 + 12x$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$-2x^2 + 12x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0, 6$$

求める共有点の座標は $O(0, 0)$, $A(6, 0)$

C_1 を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は

$$y - b = -2(x - a)^2 + 12(x - a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが、原点 O を通るので

$$0 - b = -2(0 - a)^2 + 12(0 - a) \quad \text{すなわち} \quad b = 2a^2 + 12a \quad \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入して整理すると $y = -2x(x - 2a - 6)$

これから、 C_2 と x 軸の O 以外の共有点の座標は $B(2a + 6, 0)$

OA , AB は、 $a > 0$ であるから

$$OA = 6 - 0 = 6, \quad AB = (2a + 6) - 6 = 2a$$

$OA : AB = 3 : 2$ より

$$6 : 2a = 3 : 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

(答) ナ. 6 ニ. $2a^2 + 12a$ ヌ. $2a + 6$ ネ. 2

[4] $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ を変形すると

$$2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$$

整理して $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

ゆえに $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \cos\theta < 1$ であることに注意して

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 60^\circ$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\theta \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

$BC > 0$ より $BC = \sqrt{21}$

また $\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\triangle ABD$ の面積は、 $\triangle ABC$ の面積の半分であるから、 D は BC の中点である。

ゆえに $BD = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$AD = x$ とおき、これらの中線定理

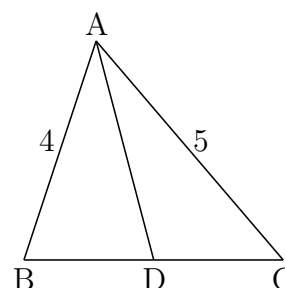
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

に代入すると

$$4^2 + 5^2 = 2\left(x^2 + \frac{21}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad x^2 = \frac{61}{4}$$

$AD > 0$ であるから $AD = \frac{\sqrt{61}}{2}$

(答) ノ. 60 ハ. $\sqrt{21}$ ヒ. $5\sqrt{3}$ フ. $\frac{\sqrt{61}}{2}$



1.47 平成22年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $(a-b-c+1)(a+1)+bc$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ア}}) \times (\boxed{\text{イ}})$ である。
- (2) $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, y = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ のとき, $x+y = \boxed{\text{ウ}}$, $x^2+y^2 = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 不等式 $|x+2| > 2|x-1|$ を解くと $\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 2次方程式 $(3a-10)x^2+4ax+a+1=0$ $\left(a \neq \frac{10}{3}\right)$ が異なる2つの実数解をもつのは $a < \boxed{\text{キ}}$ または $a > \boxed{\text{ク}}$ のときである。
- (5) 2次関数 $y = 3(x+a)^2 + b$ のグラフと, y 軸との交点の座標が $(0, -9)$ で, x 軸との交点の1つが $(1, 0)$ であるなら $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 2,000円以内で, 1本150円のジュースと1本120円の水を合計15本買うとき, ジュースをなるべく多く買うためには, ジュースを $\boxed{\text{サ}}$ 本, 水を $\boxed{\text{ス}}$ 本買えばよい。
- (2) 2次関数 $y = -2x^2 - 6x + 3$ の $-2 \leq x \leq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 4$ ならば $CA = \boxed{\text{ソ}}$ で, 3点 A, B, C を通る円の半径は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ が成り立つとき, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \boxed{\text{チ}}$, $\sin \theta - \cos \theta = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $y = \cos^2 \theta + \sin \theta$ の $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ における最大値は $\boxed{\text{テ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] x, y が $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$ をみたすとする。このとき, x のとり得る範囲は $\boxed{\text{ナ}} \leq x \leq \boxed{\text{ニ}}$ で, $4x^2 + 4xy - 4y^2 - 2x + 3$ の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\triangle ABC$ において $AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ とする。長方形 PQRS の頂点 P, Q が辺 AB 上に, R が辺 BC 上に, S が辺 CA 上にあるとする。QR = x とおくと, x を用いて, AP = $\boxed{\text{ノ}}$, QB = $\boxed{\text{ハ}}$ であるから PQ = $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また x の範囲は $0 < x < \boxed{\text{フ}}$ である。したがって長方形 PQRS の面積が最大となるのは $x = \boxed{\text{ヘ}}$ のときで, そのときの面積は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

解答例

[1] (1) $a + 1 = x$ とおくと

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= (x - b - c)x + bc \\
 &= x^2 - (b + c)x + bc \\
 &= (x - b)(x - c) \\
 &= (\mathbf{a - b + 1})(\mathbf{a - c + 1})
 \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $a - b + 1$, $a - c + 1$

$$(2) \quad x + y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \mathbf{6}$$

$$xy = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 1$$

$$\text{したがって} \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \cdot 1 = \mathbf{34}$$

(答) ウ. 6 エ. 34

(3) $|x + 2| > 2|x - 1| \geq 0$ であるから

$$|x + 2|^2 > (2|x - 1|)^2$$

$$\text{ゆえに} \quad (x + 2)^2 > 4(x - 1)^2$$

$$\text{整理すると} \quad x^2 - 4x < 0$$

$$\text{したがって} \quad x(x - 4) < 0$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{0 < x < 4}$$

(答) オ. 0 カ. 4

(4) $a \neq \frac{10}{3}$ より x^2 の係数について $3a - 10 \neq 0$ 与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき $D/4 > 0$

$$\text{ゆえに} \quad (2a)^2 - (3a - 10)(a + 1) > 0$$

$$\text{整理して} \quad a^2 + 7a + 10 > 0$$

$$\text{したがって} \quad (a + 5)(a + 2) > 0$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a < -5, \quad -2 < a}$$

(答) キ. -5 ク. -2

(5) 2次関数 $y = 3(x + a)^2 + b$ のグラフについて

$$\text{点 } (0, -9) \text{ を通るから } 3a^2 + b = -9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{点 } (1, 0) \text{ を通るから } 3(1 + a)^2 + b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 1, b = -12$

(答) ケ. 1 コ. -12

[2] (1) ジュースを x 本買うとすると, 水は $(15 - x)$ 本買うことになる.

$$\text{条件から } 150x + 120(15 - x) \leq 2000$$

$$\text{ゆえに } x \leq \frac{20}{3}$$

$$\frac{20}{3} = 6.6\dots \text{ で, } x \text{ は整数であるから } x \leq 6$$

よって, ジュースを **6** 本, 水を **9** 本買えばよい.

(答) サ. 6 シ. 9

(2) $y = -2x^2 - 6x + 3$ を変形すると

$$y = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$

$-2 \leq x \leq 1$ でのグラフは,

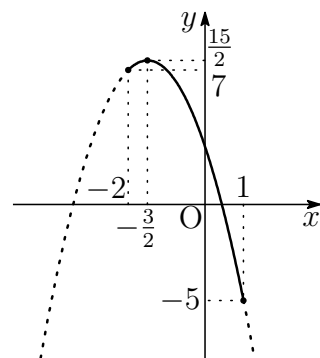
右の図の実線部分である.

よって, y は

$$x = -\frac{3}{2} \text{ で最大値 } \frac{15}{2} \text{ をとり,}$$

$$x = 1 \text{ で最小値 } -5 \text{ をとる.}$$

(答) ス. $\frac{15}{2}$ セ. -5



(3) 外接円の半径を R とすると, 正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R$$

よって $CA \sin 45^\circ = 4 \sin 30^\circ$

$$CA \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \times \frac{1}{2}$$

ゆえに $CA = 2\sqrt{2}$

また $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{4}{2 \sin 45^\circ} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

(答) ソ. $2\sqrt{2}$ タ. $2\sqrt{2}$

(4) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

ゆえに $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

したがって $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right\} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8} \right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ であるから $\sin \theta - \cos \theta > 0$

よって $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

(答) チ. $\frac{11}{16}$ ツ. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

- (5) $\cos^2 \theta + \sin \theta = -\sin^2 \theta + \sin \theta + 1$ であるから
 $\sin \theta = x$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ より

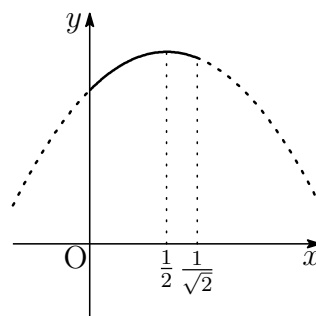
$$y = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = 30^\circ \quad \text{のとき} \quad \text{最大値} \quad \frac{5}{4}$$

$$x = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = 0^\circ \quad \text{のとき} \quad \text{最小値} \quad 1$$

$$(\text{答}) \quad \text{テ. } \frac{5}{4} \quad \text{ト. } 1$$



- [3] $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$ を y について整理すると $2y^2 - 2xy + x^2 - 2 = 0$
 y は実数であるから, y に関する 2 次方程式の係数について

$$(-2x)^2 - 4 \cdot 2(x^2 - 2) \geq 0$$

$$\text{整理すると} \quad x^2 - 4 \leq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 2 \quad \text{から} \quad 2xy - 2y^2 = x^2 - 2 \quad \dots \text{①}$$

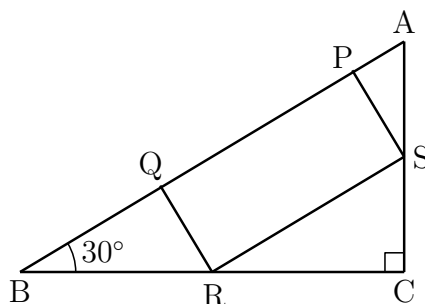
$$\begin{aligned} \text{① から} \quad 4x^2 + 4xy - 4y^2 - 2x + 3 &= 4x^2 + 2(2xy - 2y^2) - 2x + 3 \\ &= 4x^2 + 2(x^2 - 2) - 2x + 3 \\ &= 6x^2 - 2x - 1 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{7}{6} \end{aligned}$$

したがって, $-2 \leq x \leq 2$ において, 上式は

$$x = \frac{1}{6} \text{ で最小値 } -\frac{7}{6} \text{ をとり, } x = -2 \text{ で最大値 } 27 \text{ をとる.}$$

$$(\text{答}) \quad \text{ナ. } -2 \quad \text{ニ. } 2 \quad \text{ヌ. } -\frac{7}{6} \quad \text{ネ. } 27$$

[4] $QR = PS = x$ であるから、直角三角形 APS および直角三角形 BQR について



$$AP = PS \tan \angle ASP = x \tan 30^\circ = x \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$QB = QR \tan \angle BRQ = x \tan 60^\circ = x \times \sqrt{3} = \sqrt{3}x$$

$$\text{ゆえに } PQ = AB - (AP + QB) = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}x \right) = \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3}$$

$AP > 0$, $PQ > 0$ であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

長方形 PQRS の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= QR \times PQ \\ &= x \times \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x^2 - 2x) \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

① において、 S は $x = 1$ のとき最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ をとる.

$$\text{(答) } \text{ノ. } \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{ハ. } \sqrt{3}x \quad \text{ヒ. } \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} \quad \text{フ. } 2 \quad \text{ヘ. } 1 \quad \text{ホ. } \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

1.48 平成22年度一般試験(90分)

[1] (1) 等式

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx}{x^2+2x+2}$$

が x についての恒等式であるとき、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 中心が $(-1, 3)$ で半径が2の円を x 軸方向に3、 y 軸方向に -2 だけ平行移動した円の方程式は $x^2 + y^2 - \boxed{\text{ウ}}x - 2y + \boxed{\text{エ}} = 0$ である。

(3) $0 \leq x < 2\pi$ のとき $y = 3\sin x - 4\cos x$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 非公開(作問ミス)

(5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ は $x = \boxed{\text{ケ}}$ で極大値、 $x = \boxed{\text{コ}}$ で極小値をとる。

[2] (1) 直線 $3x - 2y + 6 = 0$ に関して、点 $(-5, 2)$ と対称な点の座標は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。

(2) $\triangle ABC$ において $AB : BC : CA = 2 : a : 3$ ならば、 a を用いて $\cos \angle A = \boxed{\text{ス}}$ と書ける。特に $\angle A = 60^\circ$ ならば、 $a = \boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $\log_4 x - \log_2 x^2 = 3$ のとき、 $\log_2 x = \boxed{\text{ソ}}$ だから $x = \boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 不等式 $3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 < 0$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 関数 $f(a) = \int_0^1 (2ax^2 + a^2x) dx$ は、 $a = \boxed{\text{テ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ト}}$ をとる。

[3] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) は点 $(1, 1)$ を通り、直線 $y = x + 3$ に接する。このとき $a = \boxed{\text{ナ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ニ}}$ である。この放物線と直線 $y = x - 3$ との交点を A 、 B とすると、 AB の長さは $\boxed{\text{ヌ}}$ である。 O を原点とすると $\triangle OAB$ の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[4] 放物線 $C : y = -x^2 + 4$ と x 軸で囲まれる部分を D_1 とすると、 D_1 の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ である。 x 軸に平行な直線 $\ell : y = k$ と C の交点の座標は $x = \boxed{\text{ハ}}, \boxed{\text{ヒ}}$ であるから、 ℓ と C で囲まれる部分を D_2 とすると D_2 の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。 D_2 の面積が D_1 の面積の $\frac{1}{8}$ となるのは $k = \boxed{\text{ヘ}}$ のときである。

解答例

[1] (1) 等式の両辺に $(x-1)(x^2+2x+2)$ をかけると、次の等式が得られる.

$$3x+2=a(x^2+2x+2)+bx(x-1)$$

右辺を整理すると

$$3x+2=(a+b)x^2+(2a-b)x+2a$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b, \quad 3=2a-b, \quad 2=2a$$

これを解いて $a=1, b=-1$

(答) ア. 1 イ. -1

(2) 平行移動後の円の中心は $(-1+3, 3-2)$ すなわち $(2, 1)$
半径は 2 であるから、円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

(答) ウ. 4 エ. 1

(3) $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$ を満たす角 α をとると

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad y &= 3 \sin x - 4 \cos x \\ &= 5 \left(\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) \\ &= 5(\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha) \\ &= 5 \sin(x - \alpha) \end{aligned}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ のとき } -1 \leq \sin(x - \alpha) \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad -5 \leq y \leq 5$$

よって、 y の最大値は 5, 最小値は -5

(答) オ. 5 カ. -5

(4) 作問ミスのため、問題は非公開.

$$(5) f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 2$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 12	$\searrow$	極小 -15	$\nearrow$

よって、 $x = -1$ で極大値、 $x = 2$ で極小値をとる.

(答) ケ. -1 コ. 2

- [2] (1) 直線 $3x - 2y + 6 = 0$ を l , 点 $(-5, 2)$ を A とし, l に関して A と対称な点を $B(p, q)$ とする.

[1] l の傾きは $\frac{3}{2}$, 直線 AB の傾きは $\frac{q-2}{p+5}$ である. $l \perp AB$ であるから

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{q-2}{p+5} = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2p + 3q + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

[2] 線分 AB の中点 $\left(\frac{p-5}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$3 \cdot \frac{p-5}{2} - 2 \cdot \frac{q+2}{2} + 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3p - 2q - 7 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $p = 1, q = -2$ よって $(1, -2)$

(答) サ. 1 シ. -2

- (2) $AB : BC : CA = 2 : a : 3$ であるから, 定数 k を用いて ($k \neq 0$)

$$AB = 2k, \quad BC = ak, \quad CA = 3k$$

とおくと, 余弦定理により

$$\cos \angle A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (ak)^2}{2 \cdot 3k \cdot 2k} = \frac{13 - a^2}{12}$$

特に $\angle A = 60^\circ$ のとき $\cos \angle A = \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{13 - a^2}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 7$$

$a > 0$ であるから $a = \sqrt{7}$

(答) ス. $\frac{13 - a^2}{12}$ セ. $\sqrt{7}$

- (3) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$

ゆえに $x > 0 \dots \textcircled{1}$

$\log_2 x = t$ とおくと, $\textcircled{1}$ に注意して

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}, \quad \log_2 x^2 = 2 \log_2 x = 2t$$

方程式は $\frac{t}{2} - 2t = 3$ これを解いて $t = -2$

したがって $\log_2 x = -2$ よって $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(答) ソ. -2 タ. $\frac{1}{4}$

- (4) $3^x = t$ とおくと $t > 0 \dots \textcircled{1}$

不等式は $3t^2 - 28t + 9 < 0$

ゆえに $(3t - 1)(t - 9) < 0$

$\textcircled{1}$ に注意して $\frac{1}{3} < t < 9$

したがって $\frac{1}{3} < 3^x < 9$ よって $-1 < x < 2$

(答) チ. -1 ツ. 2

- (5) 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 (2ax^2 + a^2x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

よって $a = -\frac{2}{3}$ のとき, 最小値 $-\frac{2}{9}$ をとる.

(答) テ. $-\frac{2}{3}$ ト. $-\frac{2}{9}$

[3] 放物線 $y = ax^2 + x + b$ は点 $(1, 1)$ を通るので

$$1 = a \cdot 1^2 + 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y = ax^2 + x + b$ と $y = x + 3$ から y を消去すると

$$ax^2 + x + b = x + 3 \quad \text{ゆえに} \quad ax^2 = 3 - b$$

これが重解をもつので $3 - b = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② を解いて $a = -3, b = 3$

放物線 $y = -3x^2 + x + 3$ と直線 $y = x - 3$ の共有点 A, B の座標は

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 3), (\sqrt{2}, \sqrt{2} - 3)$$

したがって, AB の長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\}^2 + \{(\sqrt{2} - 3) - (-\sqrt{2} - 3)\}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

原点 O から直線 $y = x - 3$ ($x - y - 3 = 0$) までの距離 d は

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって} \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

(答) ナ. -3 ニ. 3 ス. 4 ネ. $3\sqrt{2}$

- [4] 放物線 C と x 軸との共有点の x 座標は, $-x^2 + 4 = 0$ を解いて $x = \pm 2$
 $-2 \leq x \leq 2$ では $y \geq 0$ であるから, D_1 の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= - \int_{-2}^2 (x+2)(x-2) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) \{2 - (-2)\}^3 = \frac{32}{3} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$-x^2 + 4 = k \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm \sqrt{4-k}$$

$\sqrt{4-k} = \alpha \cdots \textcircled{2}$ とおくと, $-\alpha \leq x \leq \alpha$ では $-x^2 + 4 \geq k$ であるから,
 D_2 の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{(-x^2 + 4) - k\} dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \{x^2 - (4-k)\} dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2) dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x+\alpha)(x-\alpha) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) \{\alpha - (-\alpha)\}^3 = \frac{4}{3} \alpha^3 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

このとき $S_2 = \frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3 = \frac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}$

D_2 の面積が D_1 の面積の $\frac{1}{8}$ となるとき

$$S_2 = S_1 \times \frac{1}{8} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{3}$$

これを $\textcircled{3}$ に代入すると $\frac{4}{3}\alpha^3 = \frac{4}{3}$ ゆえに $\alpha = 1$

$\textcircled{2}$ より $\sqrt{4-k} = 1$ よって $k = 3$

(答) ノ. $\frac{32}{3}$ ハ. ヒ. $\pm\sqrt{4-k}$ フ. $\frac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}$ ヘ. 3

1.49 平成21年度推薦前期試験(90分)

- [1] (1) $(ax+b)^3$ を展開したときの x^2 の係数が12, x の係数が6ならば, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $x = \frac{4}{5 - \sqrt{3}}$ の分母を有理化すると, $x = \boxed{\text{ウ}}$ で x の整数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 2次不等式 $2x^2 + x - 6 < 0$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $2|x+1| - |x-2| = 2$ を満たす x の値は $x = \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 頂点が $(-2, 3)$ で x 軸との共有点の1つが $(-3, 0)$ である放物線 C をグラフとする2次関数は $y = \boxed{\text{サ}}$ で, C と x 軸とのもう1つの共有点は $(\boxed{\text{シ}}, 0)$ である。
- (2) 2次関数 $y = -2x^2 + 6x - \frac{7}{2}$ の定義域が $1 \leq x \leq 3$ ならば, 値域は $\boxed{\text{ス}} \leq y \leq \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $y = 2x^2 - 8x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最大値が12であるならば, $c = \boxed{\text{ソ}}$ で最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $y = x^2 + ax + b$ のグラフが点 $(3, 6)$ を通り, その頂点が直線 $y = 2x + 1$ 上にあるならば, $a = \boxed{\text{チ}}$, $b = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において $AB = 15$, $BC = 18$, $AC = 12$ とする。線分 BC 上の点 D を $BD : DC = AB : AC$ となるように定める。このとき $DC = \boxed{\text{テ}}$, $AD = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 放物線 $C : y = -ax^2 + a$ ($a > 1$) と x 軸との交点を M, N とする。 x 軸上の2点 $P(-b, 0)$, $Q(b, 0)$ ($0 < b < 1$) と放物線 C 上の2点 R, S を, 四辺形 $PQRS$ が長方形となるようにとり, その長方形の4辺の長さの和を ℓ とすると, ℓ は a, b を用いて $\boxed{\text{ナ}}$ と書ける。従って, ℓ は $b = \boxed{\text{ニ}}$ のとき最大となり, その最大値を m とすると, $m = \boxed{\text{ヌ}}$ である。特に $m = 4MN$ となるのは $a = \boxed{\text{ネ}}$ のときである。
- [4] $\triangle ABC$ において $AB : AC : BC = 4 : 5 : 6$ であるとき, $\cos A = \boxed{\text{ノ}}$, $\sin A = \boxed{\text{ハ}}$ である。更に, $\triangle ABC$ の外接円の半径が $\frac{16}{7}$ であるとき, $BC = \boxed{\text{ヒ}}$, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $(ax + b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ より, x^2 と x の係数について

$$3a^2b = 12, \quad 3ab^2 = 6$$

であるから

$$a^2b = 4, \quad ab^2 = 2$$

を得る. 上の 2 式から

$$\frac{(a^2b)^2}{ab^2} = \frac{4^2}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad a^3 = 8$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a = 2}$$

$$\text{これを第 1 式に代入して} \quad 2^2b = 4 \quad \text{よって} \quad \mathbf{b = 1}$$

(答) ア. 2 イ. 1

$$(2) \quad x = \frac{4}{5 - \sqrt{3}} = \frac{4(5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}$$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3 < \sqrt{12} < 4$ であるから

$$\frac{10 + 3}{11} < x < \frac{10 + 4}{11}$$

ゆえに, x の整数部分は $\mathbf{1}$

$$\text{(答) ウ. } \frac{10 + 2\sqrt{3}}{11} \quad \text{エ. 1}$$

$$(3) \quad 2x^2 + x - 6 < 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x + 2)(2x - 3) < 0$$

$$\text{よって} \quad -2 < x < \frac{3}{2}$$

$$\text{(答) オ. } -2 \quad \text{カ. } \frac{3}{2}$$

- (4) [1] $x < -1$ のとき $|x+1| = -x-1$, $|x-2| = -x+2$ であるから
 方程式は $2(-x-1) - (-x+2) = 2$
 これを解くと $x = -6$
 これは, $x < -1$ を満たすから, 解である.

- [2] $-1 \leq x < 2$ のとき $|x+1| = x+1$, $|x-2| = -x+2$ であるから
 方程式は $2(x+1) - (-x+2) = 2$
 これを解くと $x = \frac{2}{3}$
 これは, $-1 \leq x < 2$ を満たすから, 解である.

- [3] $2 \leq x$ のとき $|x+1| = x+1$, $|x-2| = x-2$ であるから
 方程式は $2(x+1) - (x-2) = 2$
 これを解くと $x = -2$
 これは, $2 \leq x$ に反するから, 解ではない.

以上から, 方程式の解は $x = -6, \frac{2}{3}$

(答) キ. ク. $-6, \frac{2}{3}$

- (5) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

(答) ケ. $-\frac{4}{5}$ コ. $\frac{3}{5}$

[2] (1) 頂点が点 $(-2, 3)$ であるから、この 2 次関数は

$$y = a(x + 2)^2 + 3$$

の形に表される. グラフが点 $(-3, 0)$ を通るから

$$0 = a(-3 + 2)^2 + 3$$

$$a = -3$$

よって $y = -3(x + 2)^2 + 3$

x 軸との共有点の x 座標は, $y = 0$ を代入して

$$0 = -3(x + 2)^2 + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -3, -1$$

よって, x 軸とのもう 1 つの共有点は $(-1, 0)$

(答) サ. $-3(x + 2)^2 + 3$ シ. -1

(2) $y = -2x^2 + 6x - \frac{7}{2}$ を変形すると

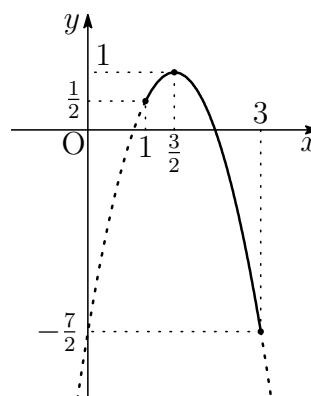
$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

$1 \leq x \leq 3$ でのグラフは, 右の図の実線部分である.

よって, 値域は

$$-\frac{7}{2} \leq y \leq 1$$

(答) ス. $-\frac{7}{2}$ セ. 1



(3) $y = 2x^2 - 8x + c$ を変形すると $y = 2(x - 2)^2 + c - 8$

放物線は下に凸であり, 定義域 $1 \leq x \leq 4$ の中央 $\frac{5}{2}$ は, 放物線の軸 $x = 2$ より右側にあるから, この関数は $x = 4$ (定義域の右端) で最大値 12 をとる.

ゆえに $2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + c = 12$ これを解いて $c = 12$

このとき, $y = 2(x - 2)^2 + 4$ となるから, $x = 2$ で最小値 4 をとる.

(答) ソ. 12 タ. 4

- (4)
- $y = x^2 + ax + b$
- のグラフが点 (3, 6) を通るから

$$6 = 3^2 + a \cdot 3 + b$$

$$\text{ゆえに } b = -3a - 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{式を変形すると } y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

放物線の頂点 $\left(-\frac{a}{2}, b - \frac{a^2}{4}\right)$ が直線 $y = 2x + 1$ 上にあるから

$$b - \frac{a^2}{4} = 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) + 1$$

$$\text{ゆえに } b = \frac{a^2}{4} - a + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

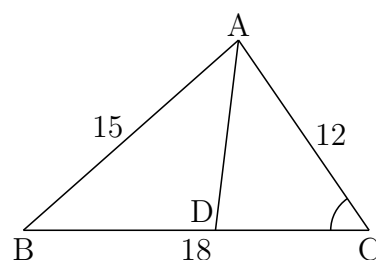
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = -4, b = 9$$

(答) チ. -4 ツ. 9

- (5)
- $BD : DC = AB : AC = 15 : 12 = 5 : 4$
- より

$$\begin{aligned} DC &= BC \times \frac{DC}{BD + DC} \\ &= 18 \times \frac{4}{5 + 4} = 8 \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を適用して



$$\cos C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2BC \cdot CA} = \frac{18^2 + 12^2 - 15^2}{2 \cdot 18 \cdot 12} = \frac{9}{16}$$

これらの結果を $\triangle ADC$ に適用して

$$\begin{aligned} AD^2 &= DC^2 + CA^2 - 2DC \cdot CA \cos C \\ &= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \times \frac{9}{16} \\ &= 100 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = 10$

(答) テ. 8 ト. 10

$$\begin{aligned}
 [3] \quad \ell &= 2(PQ + QR) \\
 &= 2\{2b + (-ab^2 + a)\} \\
 &= -2ab^2 + 4b + 2a
 \end{aligned}$$

上式から

$$\begin{aligned}
 \ell &= -2a \left(b^2 - \frac{2}{a}b \right) + 2a \\
 &= -2a \left\{ \left(b - \frac{1}{a} \right)^2 - \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right\} + 2a \\
 &= -2a \left(b - \frac{1}{a} \right)^2 + \frac{2}{a} + 2a
 \end{aligned}$$

$a > 1$ より $0 < \frac{1}{a} < 1$ であるから

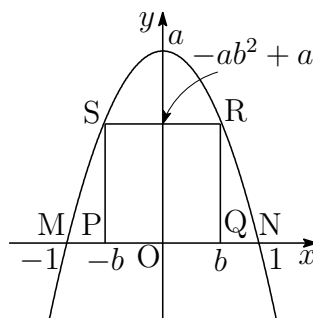
ℓ は, $b = \frac{1}{a}$ のとき, 最大値 $m = \frac{2}{a} + 2a$

$m = 4MN$ となるのは, $y = -a(x+1)(x-1)$ より, $MN = 2$ であるから

$$\frac{2}{a} + 2a = 4 \cdot 2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

$a > 1$ に注意して, これを解くと $a = 2 + \sqrt{3}$

(答) ナ. $-2ab^2 + 4b + 2a$ ニ. $\frac{1}{a}$ ヌ. $\frac{2}{a} + 2a$ ネ. $2 + \sqrt{3}$



[4] $AB : AC : BC = 4 : 5 : 6$ であるから、実数 k を用いて

$$AB = 4k, AC = 5k, BC = 6k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくことができる. これを余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (4k)^2 - (6k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 4k} = \frac{1}{8}$$

さらに $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

ゆえに $BC = 2R \sin A$
 $= 2 \times \frac{16}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $k = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

ゆえに $AB = \frac{8\sqrt{7}}{7}, AC = \frac{10\sqrt{7}}{7}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin A$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{7}}{7} \times \frac{10\sqrt{7}}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{7}$

(答) ノ. $\frac{1}{8}$ ハ. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ヒ. $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ フ. $\frac{15\sqrt{7}}{7}$

1.50 平成 21 年度推薦後期試験 (90 分)

- [1] (1) $2a^2 + ab + 5ac - b^2 - bc + 2c^2$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ となる。
- (2) a を有理数とすると、 $x = \frac{\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1} + \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ が有理数となる a の値は $a = \boxed{\text{ウ}}$ で、そのときの x の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $y = -x^2 + 4x + 3$ のグラフを x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは $y = -x^2 - \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。 $\frac{3}{2}\tan\theta = \cos\theta$ のとき、 $\sin\theta = \boxed{\text{キ}}$ で $\theta = \boxed{\text{ク}}^\circ$ である。
- (5) 半径が r cm の球の体積が、底面の直径 8cm で高さ $\frac{2}{3}$ cm の円柱の体積と等しいならば、 $r = \boxed{\text{ケ}}$ cm で球の表面積は $\boxed{\text{コ}}$ cm² である。
- [2] (1) $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - m$ のグラフと x 軸との共有点の個数は 2 で、共有点の x 座標が正であるならば、定数 m の範囲は $\boxed{\text{サ}} < m < \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y = 1$ のとき、 $2x^2 + y^2$ の最小値は $\boxed{\text{ス}}$, 最大値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2 次方程式 $-2x^2 - 4x + p - 1 = 0$ の 1 つの解が -2 以下で、もう 1 つの解が 1 以下であるならば、定数 p の範囲は $\boxed{\text{ソ}} \leq p \leq \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $\cos 160^\circ + \sin 70^\circ$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ であり、 $\cos 135^\circ \times \sin 120^\circ$ の値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ ならば、 $AB : BC : CA = \boxed{\text{テ}} : \boxed{\text{ト}} : 1$ である。
- [3] 関数 $y = (2x^2 + 4x)^2 + 3(2x^2 + 4x) + 1 + a$ において、 $t = 2x^2 + 4x + 1$ とおき、 y を t の式で表わすと $y = \boxed{\text{ナ}}$ である。 y の最小値が $\frac{3}{4}$ であるならば $a = \boxed{\text{ニ}}$ である。この a の値に対して、 $-1 \leq x \leq 1$ における y の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] 半径 2 の円周上に 3 点 A, B, C がある。点 A は固定され、2 点 B, C は $\angle BAC = 60^\circ$ の関係を保ちながら円周上を動くとする。このとき、 $BC = \boxed{\text{ノ}}$ である。 $AB = AC$ となるとき $\triangle ABC$ の面積を S_1 とすると $S_1 = \boxed{\text{ハ}}$ となる。また、 $AC = kAB$ となるとき、 AB^2 は k を用いて $AB^2 = \boxed{\text{ヒ}}$ と書けるから、このときの $\triangle ABC$ の面積 S_2 は $S_2 = \boxed{\text{フ}}$ である。とくに、 $k = 2$ ならば、 $S_2 = \boxed{\text{ヘ}} \times S_1$ である。

解答例

[1] (1) a について整理して因数分解する.

$$\begin{aligned}
 & 2a^2 + ab + 5ac - b^2 - bc + 2c^2 \\
 &= 2a^2 + (b + 5c)a - (b^2 + bc - 2c^2) \\
 &= 2a^2 + (b + 5c)a - (b + 2c)(b - c) \\
 &= \{a + (b + 2c)\}\{2a - (b - c)\} \\
 &= (a + b + 2c)(2a - b + c)
 \end{aligned}$$

$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	$\begin{array}{l} b + 2c \\ -(b - c) \end{array}$	$\longrightarrow$	$\begin{array}{l} 2b + 4c \\ -b + c \end{array}$
$\hline 2$	$-(b + 2c)(b - c)$		$b + 5c$

(答) ア. イ. $(a + b + 2c)$, $(2a - b + c)$

(2) 分母を有理化して整理する.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sqrt{3} + a}{\sqrt{3} - 1} + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + a)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} + \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\
 &= \frac{a + 7}{2} + \frac{a - 1}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$\frac{a + 7}{2}$, $\frac{a - 1}{2}$ は有理数であるから

x が有理数であるとき $\frac{a - 1}{2} = 0$ これを解いて $a = 1$

このとき $x = 4$

(答) ウ. 1 エ. 4

(3) $y = -x^2 + 4x + 3$ のグラフを x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは

$$y - 2 = -(x + 3)^2 + 4(x + 3) + 3$$

$$\text{よって } y = -x^2 - 2x + 8$$

(答) オ. 2 カ. 8

(4) $\frac{3}{2}\tan\theta = \cos\theta$ を変形すると

$$3\sin\theta = 2\cos^2\theta$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$$

$$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $0 < \sin\theta < 1$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 150^\circ$$

(答) キ. $\frac{1}{2}$ ク. 150°

(5) 題意から $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \cdot 4^2 \times \frac{2}{3}$

整理して $r^3 = 8$ これを解いて $r = 2$ (cm)

ゆえに、球の表面積は $4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (cm²)

(答) ケ. 2 コ. 16π

- [2] (1) $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - m$ を変形すると $y = (x - m)^2 + m^2 - m$
 グラフは、下に凸の放物線で、 x 軸との共有点の個数が 2 個であるから

$$m^2 - m < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < m < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

共有点の x 座標が正であるから $m > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通部分を求めて $0 < m < 1$

(答) サ. 0 シ. 1

- (2) $y = 1 - 2x \cdots \textcircled{1}$ であるから、 $y \geq 0$ より

$$1 - 2x \geq 0$$

$$x \geq 0 \text{ に注意して} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ より} \quad 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (1 - 2x)^2 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

③ は ② において、 $x = \frac{1}{3}$ で最小値 $\frac{1}{3}$ をとり、 $x = 0$ で最大値 1 をとる.

(答) ス. $\frac{1}{3}$ セ. 1

- (3) $f(x) = -2x^2 - 4x + p - 1$ とおくと

$$f(x) = -2(x + 1)^2 + p + 1$$

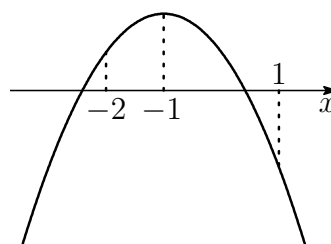
1 つの解が -2 以下で、もう 1 つの解が 1 以下であるから、右のグラフから

$$f(-2) \geq 0, \quad f(1) \leq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{cases} -2(-2)^2 - 4(-2) + p - 1 \geq 0 \\ -2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + p - 1 \leq 0 \end{cases}$$

これを解いて $1 \leq p \leq 7$

(答) ソ. 1 タ. 7



(4) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ であるから

$$\cos 160^\circ + \sin 70^\circ = (-\cos 20^\circ) + \cos 20^\circ = 0$$

$$\text{また} \quad \cos 135^\circ \times \sin 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$(\text{答}) \text{チ. } 0 \quad \text{ツ. } -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(5) $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

正弦定理により

$$\begin{aligned} AB : BC : CA &= \sin C : \sin A : \sin B \\ &= \sin 60^\circ : \sin 75^\circ : \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} : \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{\sqrt{3} + 1}{2} : 1 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \text{テ. } \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{ト. } \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

[3] $t = 2x^2 + 4x + 1$ より, $t = 2(x + 1)^2 - 1 \quad \dots \textcircled{1}$

ゆえに $t \geq -1 \quad \dots \textcircled{2}$

$2x^2 + 4x = t - 1$ であるから

$$\begin{aligned} y &= (2x^2 + 4x)^2 + 3(2x^2 + 4x) + 1 + a \\ &= (t - 1)^2 + 3(t - 1) + 1 + a \\ &= t^2 + t - 1 + a \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + a \end{aligned}$$

y の最小値が $\frac{3}{4}$ であるから, $\textcircled{2}$ に注意して

$$-\frac{5}{4} + a = \frac{3}{4} \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

$-1 \leq x \leq 1$ において, $\textcircled{1}$ から $-1 \leq t \leq 7$

また, $y = t^2 + t - 1$ であるから, このとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } 1, \quad t = 7 \text{ で最大値 } 57$$

をとる.

(答) ナ. $t^2 + t - 1 + a$ ニ. 2 ス. 1 ネ. 57

[4] 正弦定理により $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$

ゆえに $BC = 2R \sin \angle BAC$
 $= 2 \cdot 2 \sin 60^\circ$
 $= 2 \cdot 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

AB = AC となるとき, $\triangle ABC$ は一辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

余弦定理により $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC \cos \angle BAC$

ゆえに $(2\sqrt{3})^2 = AB^2 + (kAB)^2 - 2AB \cdot kAB \cos 60^\circ$

したがって $12 = (1 + k^2 - k)AB^2$

よって $AB^2 = \frac{12}{k^2 - k + 1} \quad \dots \textcircled{1}$

このとき $S_2 = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot kAB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}kAB^2}{4}$

$\textcircled{1}$ より $= \frac{3\sqrt{3}k}{k^2 - k + 1}$

$k = 2$ のとき, $S_2 = 2\sqrt{3}$ であるから $S_2 = \frac{2}{3} \times S_1$

(答) ノ. $2\sqrt{3}$ ハ. $3\sqrt{3}$ ヒ. $\frac{12}{k^2 - k + 1}$ フ. $\frac{3\sqrt{3}k}{k^2 - k + 1}$ ヘ. $\frac{2}{3}$

1.51 平成21年度一般試験(90分)

- [1] (1) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $BC = 5$, $CA = 4$ ならば, $\cos \angle ABC =$ ア で, $\triangle ABC$ の面積は イ である。
- (2) 方程式 $x^3 = 8$ の虚数解の一つを ω とするとき, $\omega^2 + 2\omega + 4 =$ ウ, $\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 =$ エ である。
- (3) 点 $P(2, 1)$ から直線 $2x + 3y = 20$ におろした垂線を PH とする。このとき, H の座標は オ であり, 2点 P, H の距離は カ である。
- (4) $2^{x+2} - 33 + 2^{3-x} < 0$ をみたす x の範囲は キ $< x <$ ク である。
- (5) 長方形 $ABCD$ において, $AB = 2\text{km}$, $BC = 3\text{km}$ とする。時刻0で, 点 P が A を出発し B に向かって時速 2km で, 点 Q が B を出発して C に向かって時速 3km で動くとする。このとき, 出発して ケ 時間までは2点 P, Q の距離は減少し, P が B に到着するまでの P, Q の最短距離は コ km である。
- [2] (1) 整式 $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割った余りが $-2x + 3$ で $x^2 - 2x - 3$ で割った余りが $x + 2$ とする。このとき, $P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りは サ $x +$ シ である。
- (2) 3次方程式 $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ が $x = -1$ を解にもち, それ以外の解を α, β とするとき, $\alpha + \beta = 3$ ならば, $a =$ ス, $b =$ セ である。
- (3) 原点 O を通る直線 $y = mx$ ($m > 0$) と円 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ の2交点を P, Q とする。 $OP : OQ = 2 : 3$ ならば, 点 P の x 座標は ソ で $m =$ タ である。
- (4) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき, 8^{10} は チ 桁の数であり, 5^{10} は ツ 桁の数である。
- (5) 放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $y = ax$ ($a \geq 0$) で囲まれる部分を D とすると, D の面積は テ である。 x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいならば a の値は ト である。
- [3] 放物線 $C : y = ax^2$ と, 原点 O を通り x 軸の正の部分とのなす角が θ の直線との交点を P , O を通り x 軸の正方向とのなす角が 2θ の直線との交点を Q とする。ただし $0 < a$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 $m = \tan \theta$ とおくと, P の x 座標は a と m を用いて ナ と書ける。また C 上の点 R を, R の x 座標が P の x 座標の2倍であるようにとると, 2点 P, R を通る直線の傾きは ニ である。2点 P, R を通る直線が2点 O, Q を通る直線と平行であるあるならば $m =$ ヌ であるから, $\theta =$ ネ で Q の x 座標は P の x 座標の ノ 倍である。

- [4] $x = \sin \theta - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると, $x = \sqrt{2} \sin(\theta - \boxed{\text{ハ}})$ と表すことができるので, x のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ヒ}} \leq \theta \leq \boxed{\text{フ}}$ となる。このとき関数 $y = 5x^3 + 6x^2 - 6$ は $\theta = \boxed{\text{ヘ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ホ}}$ をとる。

解答例

- [1] (1) $a = 5$, $b = 4$, $c = 2$ であるから, 余弦定理により

$$\cos \angle ABC = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{13}{20}$$

$$\sin \angle ABC > 0 \text{ であるから } \sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{231}}{20}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2}ca \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \times \frac{231}{20} = \frac{\sqrt{231}}{4}$$

$$\text{(答) ア. } \frac{13}{20} \quad \text{イ. } \frac{\sqrt{231}}{4}$$

- (2) ω はこの方程式の解であるから

$$\omega^3 = 8 \quad \text{ゆえに} \quad (\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4) = 0$$

$$\omega \text{ は虚数であるから, } \omega - 2 \neq 0 \text{ より } \omega^2 + 2\omega + 4 = 0$$

$$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2(\omega^2 + 2\omega + 4) + \omega^3 \text{ であるから, 上の結果を代入して}$$

$$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2 \times 0 + 8 = 8$$

$$\text{(答) ウ. } 0 \quad \text{エ. } 8$$

- (3) 点 P(2, 1) を通り直線 $2x + 3y = 20 \cdots \text{①}$ に垂直な直線の方程式は

$$3(x - 2) - 2(y - 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y = 4 \cdots \text{②}$$

$$\text{H の座標は ①, ② の連立方程式の解であるから} \quad \text{H}(4, 4)$$

$$\text{よって} \quad \text{PH} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{(答) オ. } (4, 4) \quad \text{カ. } \sqrt{13}$$

(4) 方程式を変形すると $4(2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 < 0$

ゆえに $(2^x - 8)(4 \cdot 2^x - 1) < 0$

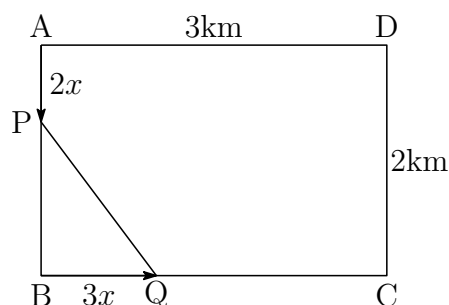
したがって $\frac{1}{4} < 2^x < 8$

底2は1より大きいので $-2 < x < 3$

(答) キ. -2 ク. 3

- (5) x 時間後のAP, BQの距離は ($0 < x < 1$), それぞれ $2x$ km, $3x$ km であるから, $\triangle PBQ$ を三平方定理に適用して

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PB^2 + BQ^2 \\ &= (2 - 2x)^2 + (3x)^2 \\ &= 13x^2 - 8x + 4 \\ &= 13 \left(x - \frac{4}{13} \right)^2 + \frac{36}{13} \end{aligned}$$



したがって, $\frac{4}{13}$ 時間まで2点P, Qの距離は減少し,

PがBに到着するまでのP, Qの最短距離は $\sqrt{\frac{36}{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ (km)

(答) ケ. $\frac{4}{13}$ コ. $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

- [2] (1) $P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りを $ax + b$ とおいて, 商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)Q(x) + ax + b$$

この等式より $P(2) = 2a + b$, $P(3) = 3a + b$

また, $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$, $x^2 - 2x - 3$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると, 条件から

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)Q_1(x) - 2x + 3$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 3)Q_2(x) + x + 2$$

第1式に $x = 2$, 第2式に $x = 3$ を代入すると

$$P(2) = -1, P(3) = 5$$

したがって $2a + b = -1$, $3a + b = 5$

これを解くと $a = 6$, $b = -13$

よって, 求める余りは $6x - 13$

(答) サ. 6 シ. -13

(2) $x = -1$ は 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ の解であるから

$$(-1)^3 + a(-1)^2 + 3(-1) + b = 0 \quad \text{すなわち} \quad a + b = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この 3 次方程式の解と係数の関係により $\alpha + \beta + (-1) = -\frac{a}{1}$

$$\alpha + \beta = 3 \text{ をこれに代入して } a = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } b = 6$$

(答) ス. -2 セ. 6

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解を α, β, γ とすると

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

(3) $OP : OQ = 2 : 3$ であるから, 2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ $2\alpha, 3\alpha$ とおける.

$y = mx$ ($m > 0$) を $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ に代入して整理すると

$$(m^2 + 1)x^2 - 8x + 12 = 0$$

このとき, 解と係数の関係から

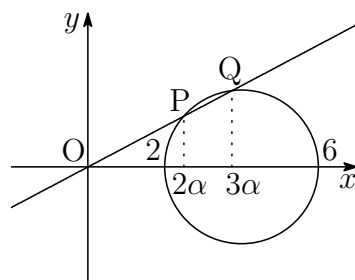
$$2\alpha + 3\alpha = -\frac{-8}{m^2 + 1} \quad 2\alpha \cdot 3\alpha = \frac{12}{m^2 + 1}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{5\alpha}{8} = \frac{1}{m^2 + 1} \quad \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{m^2 + 1}$$

$$\text{上の 2 式から} \quad \alpha = \frac{5}{4}, \quad m = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$\text{ゆえに, 点 P の } x \text{ 座標は} \quad 2\alpha = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{(答) ソ. } \frac{5}{2} \quad \text{タ. } \frac{\sqrt{7}}{5}$$



$$(4) \quad \log_{10} 8^{10} = \log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$$

$$\log_{10} 5^{10} = 10 \log_{10} \frac{10}{2} = 10(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 10(1 - 0.3010) = 6.99$$

$9 < \log_{10} 8^{10} < 10$, $6 < \log_{10} 5^{10} < 7$ であるから

$$10^9 < 8^{10} < 10^{10}, \quad 10^6 < 5^{10} < 10^7$$

よって、 8^{10} は **10** 桁の数であり、 5^{10} は **7** 桁の数である.

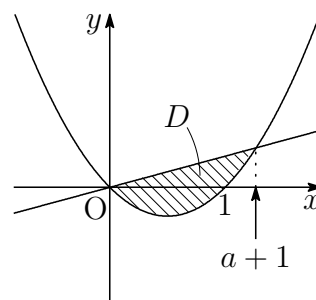
(答) チ. 10 ツ. 7

(5) 方程式 $x^2 - x = ax$ を解くと

$$x^2 - (a+1)x = 0 \text{ より } x = 0, a+1$$

よって、 D の面積 S_1 は、図から

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a+1} \{ax - (x^2 - x)\} dx \\ &= - \int_0^{a+1} x\{x - (a+1)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(a+1)^3 \end{aligned}$$



この放物線と x 軸の交点の x 座標は

$$x^2 - x = 0 \text{ より } x = 0, 1$$

よって、 x 軸より下にある D の部分の面積 S_2 は、図から

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \{-(x^2 - x)\} dx \\ &= - \int_0^1 x(x - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいとき、 $S_1 = 2S_2$ が成り立つので

$$\frac{1}{6}(a+1)^3 = 2 \times \frac{1}{6} \quad \text{これを解いて} \quad a = \sqrt[3]{2} - 1$$

(答) テ. $\frac{1}{6}(a+1)^3$ ト. $\sqrt[3]{2} - 1$

[3] 直線 OP の傾きは m であるから,

その方程式は $y = mx$

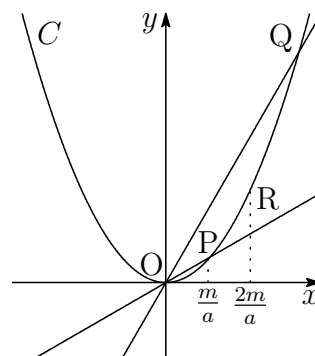
P の座標は $(x \neq 0)$, $y = ax^2$ と $y = mx$

を解いて

$$P\left(\frac{m}{a}, \frac{m^2}{a}\right)$$

C 上の点 R の x 座標は $\frac{2m}{a}$ であるから

$$R\left(\frac{2m}{a}, \frac{4m^2}{a}\right)$$



よって, 直線 PR の傾きは $\frac{\frac{4m^2}{a} - \frac{m^2}{a}}{\frac{2m}{a} - \frac{m}{a}} = 3m$

また, 直線 OQ の傾きは $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2m}{1 - m^2}$

2 直線 PR, OQ が平行であるとき $3m = \frac{2m}{1 - m^2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから, $m = \tan \theta > 0$ に注意して, この方程式を解くと

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

したがって, 直線 OQ の傾きは $\tan 2\theta = \tan \left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

このとき, P の x 座標は $(x \neq 0)$, $ax^2 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ を解いて $x = \frac{1}{\sqrt{3}a}$

Q の x 座標は $(x \neq 0)$, $ax^2 = \sqrt{3}x$ を解いて $x = \frac{\sqrt{3}}{a}$

よって, $\frac{\sqrt{3}}{a} \div \frac{1}{\sqrt{3}a} = 3$ より, Q の x 座標は P の x 座標の 3 倍である.

(答) ナ. $\frac{m}{a}$ ニ. $3m$ ヌ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ネ. $\frac{\pi}{6}$ ノ. 3

$$[4] \quad \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ より, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$x = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right), \quad -1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$y = 5x^3 + 6x^2 - 6$ を微分して $y' = 15x^2 + 12x = 3x(5x + 4)$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = -\frac{4}{5}, 0$$

y の増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	$\nearrow$	極大 $-\frac{118}{25}$	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$	$6+10\sqrt{2}$

よって, この関数は

$x = 0$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 最小値 -6 をとる.

(答) ハ. $\frac{\pi}{4}$ ヒ. -1 フ. $\sqrt{2}$ ヘ. $\frac{\pi}{4}$ ホ. -6

1.52 平成 20 年度推薦前期試験 (90 分)

- [1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したときの x^2 の係数は , x の係数は である。
- (2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると $(\text{ウ}) \times (\text{エ})$ となる。
- (3) $y=2x^2-4x+5$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動させると $y=2x^2-8x+13$ となった。このとき, $p=\text{オ}$, $q=\text{カ}$ である。
- (4) 2 次不等式 $x^2+ax+b \leq 0$ の解が $2 \leq x \leq 4$ であるとき, $a=\text{キ}$, $b=\text{ク}$ である。
- (5) $\tan \theta = 2$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) ならば, $\cos \theta = \text{ケ}$, $\sin \theta = \text{コ}$ である。
- [2] (1) $x-3+2|x-2| < 0$ となる x の範囲は $\text{サ} < x < \text{シ}$ である。
- (2) 2 次関数のグラフが 3 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$ を通るとき, その 2 次関数は $y=\text{ス}$ であり, そのグラフの頂点は セ である。
- (3) 2 次関数 $y=-3x^2+12x-4$ の定義域が $1 \leq x \leq 4$ であるとき, 最大値は ソ , 最小値は タ である。
- (4) 両岸が平行な川がある。現在いる点 O と対岸の点 P を結ぶ直線が川と直角であるとする。点 O を通り川に平行な直線上の $\angle PQO = 60^\circ$ となる点 Q は, $OQ = 60\sqrt{3}\text{m}$ の点であった。このとき, $OP = \text{チ}\text{m}$ である。線分 OQ の延長線上にあり $\angle PRO = 30^\circ$ となる点 R は $OR = \text{ツ}\text{m}$ の点である。
- (5) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$ ならば, $\angle C = \text{テ}^\circ$ で, $AB = \text{ト}$ である。
- [3] 2 次関数 $y = x^2 - 3x + 4$ の $a \leq x \leq a+1$ における最大値を b とする。 b を a で表すと $a \leq \text{ナ}$ のときは $b = \text{ニ}$, a がそれ以外の範囲にあるときは $b = \text{ヌ}$ である。また, b は, $a = \text{ネ}$ のとき最小値 ノ をとる。
- [4] 四角形 $ABCD$ において, $AB = 20$, $BC = 25$, $CD = 30$, $DA = 15$ で $\angle ABC = 120^\circ$ ならば, $\triangle ABC$ の面積は ハ で $AC = \text{ヒ}$ となる。 $\angle CDA = \theta$ とおくと $\cos \theta = \text{フ}$ であるから, $\sin \theta = \text{ヘ}$ となり, $\triangle ACD$ の面積は ホ となる。

解答例

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したとき

$$x^2 \text{ の項は } 2x \times 4x + 1 \times 3x^2 = 11x^2$$

$$x \text{ の項は } 2x \times 2 + 1 \times 4x = 8x$$

したがって、 x^2 の係数は **11**、 x の係数は **8** である。

(答) ア. 11 イ. 8

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると

$$(x+3)(3x-2)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 3 \rightarrow 9 \\ 3 & \times & -2 \rightarrow -2 \\ \hline & & -6 \quad 7 \end{array}$$

(答) ウ. エ. $x+3$, $3x-2$

(3) $y=2x^2-4x+5$ を変形すると $y=2(x-1)^2+3$

$y=2x^2-8x+13$ を変形すると $y=2(x-2)^2+5$

よって、頂点は $(1, 3)$ から $(2, 5)$ に移動する。

したがって、第2式は、第1式を

$$x \text{ 軸方向に } p=2-1=1, \quad y \text{ 軸方向に } q=5-3=2$$

だけ平行移動したものである。

(答) オ. 1 カ. 2

(4) $2 \leq x \leq 4$ を解とする2次不等式の1つは

$$(x-2)(x-4) \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-6x+8 \leq 0$$

したがって、 $x^2+ax+b \leq 0$ の係数と比較して $a=-6$, $b=8$

(答) キ. -6 ク. 8

(5) $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{また} \quad \sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(答) ケ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ コ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

[2] (1) [1] $x \geq 2$ のとき $|x-2| = x-2$ であるから

$$\text{不等式は } x-3+2(x-2) < 0$$

$$\text{これを解いて } x < \frac{7}{3}$$

$$x \geq 2 \text{ に注意して } 2 \leq x < \frac{7}{3}$$

[2] $x < 2$ のとき $x-2 = -(x-2) = -x+2$ であるから

$$\text{不等式は } x-3+2(-x+2) < 0$$

$$\text{これを解いて } x > 1$$

$$x < 2 \text{ に注意して } 1 < x < 2$$

$$\text{したがって、求める解は } 1 < x < \frac{7}{3}$$

【別解】 $x-3+2|x-2| < 0$ から $|x-2| < \frac{3-x}{2}$

$$\text{したがって } -\frac{3-x}{2} < x-2 < \frac{3-x}{2}$$

$$-\frac{3-x}{2} < x-2 \text{ を解いて } x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x-2 < \frac{3-x}{2} \text{ を解いて } x < \frac{7}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } 1 < x < \frac{7}{3}$$

$$(\text{答}) \text{ サ. } 1 \quad \text{シ. } \frac{7}{3}$$

(2) x 軸と2点 $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わるから、求める2次関数は

$$y = a(x-1)(x-3)$$

の形で表される. このグラフが点 $(0, 6)$ を通るから

$$6 = a \cdot (-1) \cdot (-3) \quad \text{ゆえに } a = 2$$

$$\text{よって } y = 2(x-1)(x-3) \quad \text{すなわち } y = 2x^2 - 8x + 6$$

また, $2x^2 - 8x + 6 = 2(x-2)^2 - 2$ であるから, 頂点の座標は $(2, -2)$

$$(\text{答}) \text{ ス. } 2x^2 - 8x + 6 \quad \text{セ. } (2, -2)$$

(3) $y = -3x^2 + 12x - 4$ を変形すると

$$y = -3(x-2)^2 + 8$$

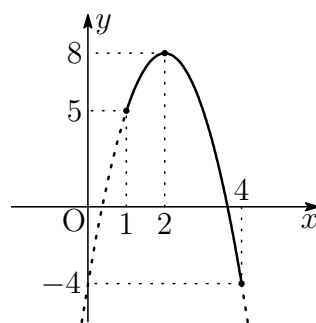
$1 \leq x \leq 4$ は, 右の図の実線部分である.

よって, y は

$$x = 2 \text{ で最大値 } 8 \text{ をとり,}$$

$$x = 4 \text{ で最小値 } -4 \text{ をとる.}$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. } 8 \quad \text{タ. } -4$$

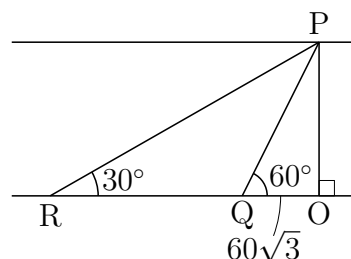


(4) $\triangle OPQ$ において

$$\begin{aligned} OP &= OQ \tan 60^\circ \\ &= 60\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \mathbf{180} \text{ (m)} \end{aligned}$$

 $\triangle OPR$ において

$$\begin{aligned} OR &= OP \tan \angle OPR \\ &= 180 \tan 60^\circ = \mathbf{180\sqrt{3}} \text{ (m)} \end{aligned}$$

(答) チ. 180 ツ. $180\sqrt{3}$ (5) $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = \mathbf{120^\circ}$

$$\text{正弦定理により } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{よって } AB \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \sin 120^\circ$$

$$AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって } AB = \mathbf{3\sqrt{3}}$$

(答) テ. 120 ト. $3\sqrt{3}$

[3] $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ であるから、与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で、軸は $x = \frac{3}{2}$ である。 $a \leq x \leq a+1$ の中央は $x = \frac{2a+1}{2}$

$$[1] \frac{2a+1}{2} < \frac{3}{2} \quad \text{すなわち } a < 1 \text{ のとき}$$

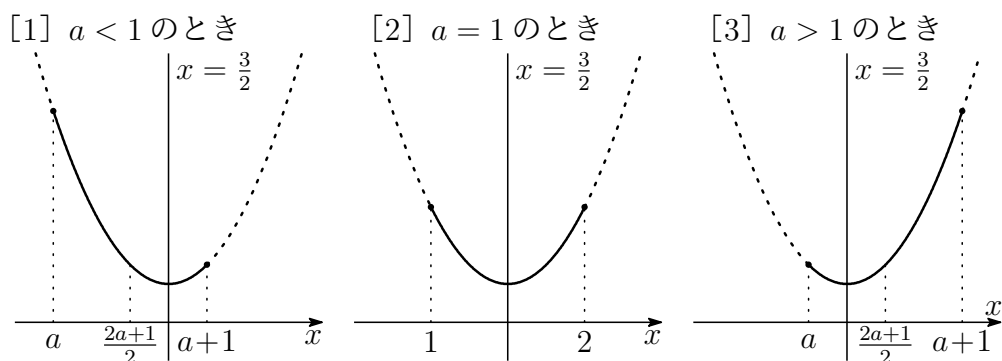
$$x = a \text{ で最大値をとるから } b = a^2 - 3a + 4$$

$$[2] \frac{2a+1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{すなわち } a = 1 \text{ のとき}$$

$$x = 1, 2 \text{ で最大値をとるから } b = 2$$

$$[3] \frac{3}{2} < \frac{2a+1}{2} \quad \text{すなわち } a > 1 \text{ のとき}$$

$$x = a+1 \text{ で最大値をとるから } b = (a+1)^2 - 3(a+1) + 4 = a^2 - a + 2$$



したがって、 $a \leq 1$ のとき

$$b = a^2 - 3a + 4$$

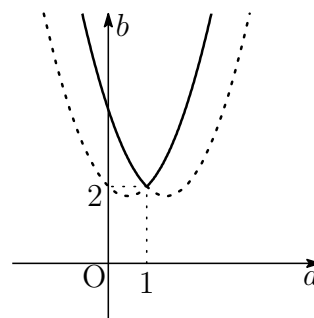
a がそれ以外の範囲にあるとき

$$b = a^2 - a + 2$$

である.

また、グラフは右の図の実線部分である.

よって、 b は、 $a = 1$ のとき最小値 2 をとる.

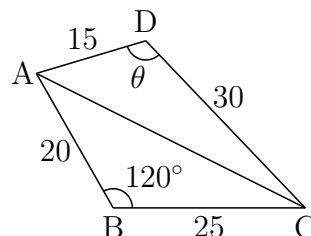


[4] $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \sin 120^\circ = 125\sqrt{3}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\ &= 20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cos 120^\circ \\ &= 1525 \end{aligned}$$



$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{1525} = 5\sqrt{61}$

$\triangle ACD$ に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{CD^2 + DA^2 - AC^2}{2CD \cdot DA} \\ &= \frac{30^2 + 15^2 - 1525}{2 \cdot 30 \cdot 15} = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

したがって、 $\triangle ACD$ の面積は

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} CD \cdot DA \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{65}}{9} = 25\sqrt{65}$$

(答) ハ. $125\sqrt{3}$ ヒ. $5\sqrt{61}$ フ. $-\frac{4}{9}$ ヘ. $\frac{\sqrt{65}}{9}$ ホ. $25\sqrt{65}$

1.53 平成20年度推薦後期試験(90分)

- [1] (1) $(2x - 3y)(x - y)(3x - 2y)$ を展開すると $\boxed{\text{ア}}x^3 - \boxed{\text{ア}}y^3 - \boxed{\text{イ}}x^2y + \boxed{\text{イ}}xy^2$ である。
- (2) 放物線 $y = 2x^2 - 12x + 22$ を平行移動して放物線 $y = 2x^2 + 4x - 3$ と重ねるためには x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。
- (3) 2次関数 $y = a(x - 2)^2 + b$ ($a < 0$) の $1 \leq x \leq 4$ における最大値が3で最小値が1であるならば $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 連立2次不等式 $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$ の解は $\boxed{\text{キ}} \leq x \leq \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\tan \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y - 3$ を因数分解すると, $(\boxed{\text{サ}}) \times (\boxed{\text{シ}})$ である。
- (2) 2次関数 $y = x^2 - 4x + a$ の定義域が $0 \leq x \leq 3$ で, その最大値と最小値の和が -2 であるとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2次方程式 $3x^2 + 2ax + 2a - 3 = 0$ は $a = \boxed{\text{ソ}}$ のとき, ただ1つの実数解を持つ。また, すべての解が3より小さいのは $a > \boxed{\text{タ}}$ のときである。
- (4) 長さ3のひもを長方形の形にしたときの短辺の長さを a , 長辺の長さを b とすると, $a + b = \boxed{\text{チ}}$ である。このとき, 長方形の面積が $\frac{1}{2}$ 以下であるなら, $0 \leq a \leq \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $a = \cos 10^\circ$, $b = \sin 20^\circ$ を用いると
 $\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = \boxed{\text{テ}}$, $\sin 80^\circ + \cos 110^\circ = \boxed{\text{ト}}$ と表される。
- [3] O を原点, 放物線 $y = -\sqrt{3}(4x^2 - 1)$ の頂点の座標を P とすると, PO の長さは $\boxed{\text{ナ}}$ である。 x 軸上の2点 A, B を $\triangle PAB$ が正三角形となるようにとるとき, 辺 AB の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。次に放物線上の点 Q と x 軸上の点 C, D を $\triangle QCD$ が正三角形となるようにとる。Q の x 座標を a ($0 < a < \frac{1}{2}$) とすると, 辺 CD の長さは a を用いて $\boxed{\text{ヌ}}$ と表せる。したがって, CD の長さが AB の長さの $\frac{1}{2}$ となるのは, $a = \boxed{\text{ネ}}$ のときである。
- [4] 面積が24である $\triangle ABC$ の辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ D, E, F を $AD : DB = 1 : 3$, $BE : EC = 1 : 1$, $CF : FA = 2 : 1$ となるようにとる。このとき $\triangle ADF$, $\triangle BED$, $\triangle CFE$ の面積をそれぞれ S_1 , S_2 , S_3 とするとき, $S_1 = \boxed{\text{ノ}}$, $S_2 = \boxed{\text{ハ}}$, $S_3 = \boxed{\text{ヒ}}$ である。また, $\triangle DEF$ の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

$$\begin{aligned}
[1] \quad (1) \quad & (2x-3y)(x-y)(3x-2y) \\
&= (x-y) \times (2x-3y)(3x-2y) \\
&= (x-y)(6x^2-13xy+6y^2) \\
&= x(6x^2-13xy+6y^2) - y(6x^2-13xy+6y^2) \\
&= 6x^3 - 6y^3 - 19x^2y + 19xy^2
\end{aligned}$$

(答) ア. 6 イ. 19

$$\begin{aligned}
(2) \quad & y = 2x^2 - 12x + 22 \text{ を変形すると } y = 2(x-3)^2 + 4 \\
& y = 2x^2 + 4x - 3 \text{ を変形すると } y = 2(x+1)^2 - 5 \\
& \text{よって, 頂点は } (3, 4) \text{ から } (-1, -5) \text{ に移動する.}
\end{aligned}$$

したがって, 第2式は, 第1式を

$$x \text{ 軸方向に } -1-3=-4, \quad y \text{ 軸方向に } -5-4=-9$$

だけ平行移動したものである.

(答) ウ. -4 エ. -9

$$\begin{aligned}
(3) \quad & a < 0 \text{ であるから, } 1 \leq x \leq 4 \text{ において, 2次関数 } y = a(x-2)^2 + b \text{ は,} \\
& x=2 \text{ で最大値 } b, \quad x=4 \text{ で最小値 } 4a+b \text{ をとるので}
\end{aligned}$$

$$b = 3, \quad 4a + b = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2}$$

(答) オ. $-\frac{1}{2}$ カ. 3

$$(4) \quad \text{第1式から } (x-1)(x-3) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2 \text{ 次方程式 } x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ の解は } x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$\text{第2式の解は} \quad 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

(答) キ. 1 ク. $1 + \sqrt{2}$

$$(5) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ から } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \cos \theta \leq 0 \text{ であるから}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(答) ケ. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ コ. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

[2] (1) x について整理して因数分解する.

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y - 3 \\
 &= x^2 + (3y + 2)x + (2y^2 + y - 3) \\
 &= x^2 + (3y + 2)x + (y - 1)(2y + 3) \\
 &= \{x + (y - 1)\}\{x + (2y + 3)\} \\
 &= (x + y - 1)(x + 2y + 3)
 \end{aligned}$$

1	$\times$	$y - 1$	$\longrightarrow$	$y - 1$
1	$\times$	$2y + 3$	$\longrightarrow$	$2y + 3$
1 $(y - 1)(2y + 3)$ $3y + 2$				

(答) サ. シ. $x + y - 1$, $x + 2y + 3$

- (2) $y = x^2 - 4x + a$ を変形して $y = (x - 2)^2 + a - 4$
 $0 \leq x \leq 3$ において, $x = 2$ で最小値 $a - 4$ をとり, $x = 0$ で最大値 a をと
 る. 最大値と最小値の和が -2 であるから

$$a + (a - 4) = -2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

したがって, 最小値は $a - 4 = 1 - 4 = -3$

(答) ス. 1 セ. -3

- (3) 2次方程式 $3x^2 + 2ax + 2a - 3 = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = a^2 - 3(2a - 3) = (a - 3)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) がただ1つの実数解をもつとき, $D = 0$ であるから $a = 3$

$f(x) = 3x^2 + 2ax + 2a - 3$ とおくと

$y = f(x)$ の軸の方程式は $x = -\frac{a}{3}$

このとき $-\frac{a}{3} < 3$ ゆえに $a > -9 \quad \cdots \textcircled{2}$

$f(3) > 0$ であるから, $3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + 2a - 3 > 0$

これを解いて $a > -3 \quad \cdots \textcircled{3}$

① より, 常に $D \geq 0$ であるから

②, ③ の共通範囲を求めて $a > -3$

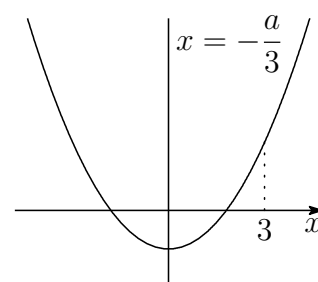
(答) ソ. 3 タ. -3

[別解] 2次方程式 $3x^2 + 2ax + 2a - 3 = 0$ の左辺を因数分解すると

$$(x + 1)(3x + 2a - 3) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1, 1 - \frac{2a}{3}$$

これらの解が3より小さいので

$$1 - \frac{2a}{3} < 3 \quad \text{これを解いて} \quad a > -3$$



(4) 周の長さから $2a + 2b = 3$ ゆえに $a + b = \frac{3}{2}$

このとき, $0 < a < b$, $b = \frac{3}{2} - a$ であるから $0 < a < \frac{3}{4}$... ①

長方形の面積が $\frac{1}{2}$ 以下であるから $ab \leq \frac{1}{2}$

すなわち $a \left(\frac{3}{2} - a \right) \leq \frac{1}{2}$

ゆえに $(a - 1)(2a - 1) \geq 0$

① に注意して $0 < a \leq \frac{1}{2}$

(答) チ. $\frac{3}{2}$ ツ. $\frac{1}{2}$

(5) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ = b$, $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ = -a$ であるから

$$\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = -a + b$$

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = a$, $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ = -b$ であるから

$$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ = a - b$$

(答) テ. $-a + b$ ト. $a - b$

[3] 放物線の方程式は $y = -4\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}$

頂点Pの座標は $(0, \sqrt{3})$ であるから $PO = \sqrt{3}$

$\triangle PAB$ が正三角形であるから $PA = PB$

このとき, 直角三角形PAOと直角三角形PBOは合同で, $\angle PAO = \angle PBO = 60^\circ$ であるから

$$AO = BO = 1 \quad \text{ゆえに} \quad AB = 2$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ であるから, Qはx軸の上側の点であり, Qからx軸に下ろした垂線の長さをhとすると $h = -\sqrt{3}(4a^2 - 1)$... ①

$\triangle QCD$ と $\triangle PAB$ は合同であるから

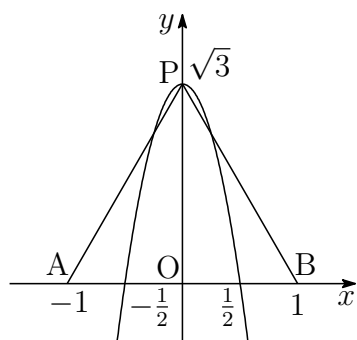
$$CD : h = AB : PO = 2 : \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad CD = \frac{2}{\sqrt{3}}h \quad \dots \text{②}$$

①, ② より $CD = 2(1 - 4a^2)$

$CD = \frac{1}{2}AB$ のとき $2(1 - 4a^2) = \frac{1}{2} \times 2$

$0 < a < \frac{1}{2}$ に注意して $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(答) ナ. $\sqrt{3}$ ニ. 2 ヌ. $2(1 - 4a^2)$ ネ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$



[4] $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくと

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C = 24$$

であるから

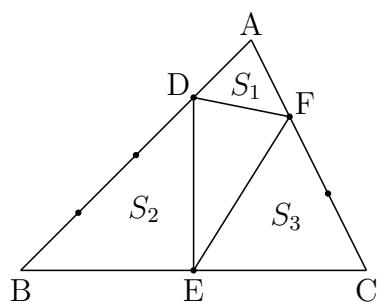
$$\triangle ADF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}c \times \frac{1}{3}b \sin A = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{12} \times 24 = 2$$

$$\triangle BED = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}c \times \frac{1}{2}a \sin B = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{3}{8} \times 24 = 9$$

$$\triangle CFE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{2}{3}b \sin C = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

したがって、 $\triangle DEF$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= 24 - (S_1 + S_2 + S_3) \\ &= 24 - (2 + 9 + 8) = 5 \end{aligned}$$



(答) ノ. 2 ハ. 9 ヒ. 8 フ. 5

1.54 平成 20 年度一般試験 (90 分)

- [1] (1) $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき, $x^2 - 4x + 1$ の値は ア である。このとき $x^3 - 2x^2 - 7x + 7$ の値は イ である。
- (2) 放物線 $C: y = -2x^2 - 2x + 2$ を平行移動して, x 軸と 2 点 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ で交わるようにするためには, C を x 軸方向に ウ , y 軸方向に エ だけ平行移動すればよい。
- (3) $x = 1 + 2i$ が方程式 $x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ の解であるとき, 実数の係数 a , b の値は, $a =$ オ , $b =$ カ である。
- (4) 方程式 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 + 3 = 0$ の解は $x =$ キ , ク である。
- (5) $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 1$ ならば, $\angle BAC =$ ケ ° で $\triangle ABC$ の面積は コ である。
- [2] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$ が $(x - 2)^2$ で割り切れるならば, $a =$ サ で, $f(x) = 0$ の $x = 2$ 以外の解は $x =$ シ である。
- (2) x が $\log_2 \left(\frac{1}{2} - 2^{x-1} \right) = 2x$ をみたすとき, $2^x =$ ス であるから, $x =$ セ である。
- (3) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ の解は $x =$ ソ , タ である。
- (4) x, y が 3 つの不等式 $y - 2x \leq 4$, $y \geq x + 1$, $x \leq 0$ を同時にみたすとき, $2y - x$ の最大値は チ , 最小値は ツ となる。
- (5) 関数 $y = x^3 - 2x$ のグラフと直線 $y = x + a$ の共有点の個数が 3 であるのは, a が テ $< a <$ ト の範囲にあるときである。
- [3] $\triangle ABC$ の重心を G とする。2 点 G, A を通る直線が $x - 2y + 1 = 0$, 2 点 G, B を通る直線が $x + y + 4 = 0$ であるとき, 点 G の座標は ナ である。さらに, 点 C の座標が $(-3, -7)$ であるなら, 点 A の座標は ニ , 点 B の座標は ノ である。2 点 A, B を通る直線と点 C の距離は ネ であるので, $\triangle ABC$ の面積は ノ である。

- [4] 原点 O から、 x 軸の正方向とのなす角が θ の方向に投げられた質点の描く軌跡は、 $m = \tan \theta$ とおくとき、放物線 $C: y = -\frac{1}{4}(1+m^2)x^2 + mx$ であるとする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。このとき、 C と x 軸との、 O 以外の交点 P の x 座標を $\sin 2\theta$ を用いて表すと ハ と書けるから、線分 OP の長さは $\theta =$ ヒ のとき最大となる。また、 C と線分 OP で囲まれる部分の面積 S は、 m を用いて表すと フ、 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表すと ヘ となるから、 $\theta = \frac{\pi}{8}$ のときの S の値は ホ である。

解答例

- [1] (1) $x - 2 = \sqrt{3}$ であるから

$$\text{両辺を2乗して} \quad (x-2)^2 = 3$$

$$\text{よって} \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

また、右の割り算から

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = (x^2 - 4x + 1)(x + 2) + 5$$

$$\begin{array}{r} x \quad +2 \\ x^2 - 4x + 1 \overline{) x^3 - 2x^2 - 7x + 7} \\ x^3 - 4x^2 \quad + x \\ \hline 2x^2 - 8x + 7 \\ 2x^2 - 8x + 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

これに上の結果を代入して

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0 \times (x + 2) + 5 = 5$$

(答) ア. 0 イ. 5

- (2) 放物線 $C: y = -2x^2 - 2x + 2$ を平行移動して、 x 軸と2点 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ で交わる放物線を C' とすると、 C' は x^2 の係数に注意して

$$y = -2(x+1)(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x^2 + 2x + 4$$

C , C' をそれぞれ変形すると

$$C: y = -2x^2 - 2x + 2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$$C': y = -2x^2 + 2x + 4 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって、頂点は点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ から点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ に移動する。ゆえに、 C を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものが C' であれば、 C , C' の頂点の座標から

$$-\frac{1}{2} + p = \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} + q = \frac{9}{2} \quad \text{よって} \quad p = 1, \quad q = 2$$

(答) ウ. 1 エ. 2

- (3)
- $1 + 2i$
- がこの方程式の解であるから

$$(1 + 2i)^3 - 4(1 + 2i)^2 + a(1 + 2i) + b = 0$$

$$\text{整理して} \quad (a + b + 1) + (2a - 18)i = 0$$

a, b は実数であるから

$$a + b + 1 = 0, \quad 2a - 18 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad \mathbf{a = 9, \quad b = -10}$$

(答) オ. 9 カ. -10

- (4) 方程式を変形すると
- $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$

$$\text{ゆえに} \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) = 0$$

$$\text{したがって} \quad \log_3 x = 1, \quad 3$$

$$\text{よって} \quad x = 3, \quad 27$$

(答) キ. ク 3, 27

- (5) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } \cos A = -\frac{1}{2} \text{ を満たす } A \text{ は } \mathbf{A = 120^\circ}$$

よって, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(答) ケ. 120 コ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- [2] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$ は $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ で割り切れるので, $f(x)$ の x^3 の係数および定数項に注意して

$$x^3 + ax^2 + bx + 8 = (x^2 - 4x + 4)(x + 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかける. 右辺を展開すると

$$x^3 + ax^2 + bx + 8 = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

x^2 の項を係数を比較して $a = -2$

① より $f(x) = (x-2)^2(x+2)$ であるから, $f(x) = 0$ の $x = 2$ 以外の解は

$$x = -2$$

(答) サ. -2 シ. -2

$$(2) \log_2 \left(\frac{1}{2} - 2^{x-1} \right) = 2x \text{ から } \frac{1}{2} - 2^{x-1} = 2^{2x}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2^x = (2^x)^2$$

$$2^x = t \text{ とおくと } (t > 0) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = t^2$$

$$\text{整理して} \quad 2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解して} \quad (t+1)(2t-1) = 0$$

$$t > 0 \text{ に注意して} \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } 2^x = \frac{1}{2} \text{ であるから } x = -1$$

(答) ス. $\frac{1}{2}$ セ. -1

(3) 左辺の三角関数を合成すると

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

であるから、この範囲で $\textcircled{1}$ を解くと

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{したがって} \quad x = \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

$$(\text{答}) \text{ ソ. タ. } \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

(4) 与えられた連立不等式の表す領域は 3 点 $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(0, 4)$ を頂点とする三角形の周および内部である.

$$2y - x = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、これは傾きが $\frac{1}{2}$, y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す.

図から、直線 $\textcircled{1}$ が

点 $(0, 4)$ を通るとき、 $\frac{k}{2}$ は最大

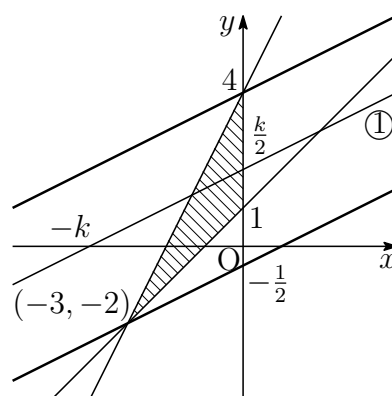
点 $(-3, -2)$ を通るとき、 $\frac{k}{2}$ は最小

である. したがって、 $2y - x$ は

$x = 0, y = 4$ のとき最大値 **8** をとり、

$x = -3, y = -2$ のとき最小値 **-1** をとる.

$$(\text{答}) \text{ チ. 8 } \quad \text{ツ. -1}$$



(5) 与えられた関数のグラフと直線の共有点の個数は、方程式

$$x^3 - 2x = x + a \quad \text{すなわち} \quad x^3 - 3x = a$$

の実数解の個数である.

関数 $y = x^3 - 3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3x \\ &= 3x(x - 1) \end{aligned}$$

y の増減表は、右のようになる.

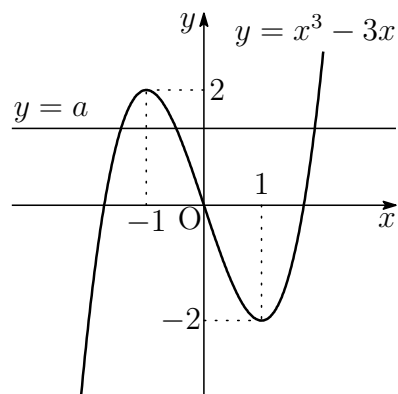
よって、 $y = x^3 - 3x$ のグラフは、
右の図のようになる.

求める a の値の範囲は、このグラフと直線 $y = a$ が異なる3個の共有点をもつ範囲であるから

$$-2 < a < 2$$

(答) テ. -2 ト. 2

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$



[3] 2 点 G, A を通る直線を ① とし, 2 点 G, B を通る直線を ② とすると, G は ① および ② 上の点であるから, G は連立方程式

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 & \cdots \text{①} \\ x + y + 4 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

の解であり, これを解いて $G(-3, -1)$

また, A, B の y 座標を, それぞれ s, t とすると, ①, ② から

$$A(2s - 1, s), B(-t - 4, t)$$

$C(-3, -7)$ のとき, $\triangle ABC$ の重心が $G(-3, -1)$ であることから

$$\frac{(2s - 1) + (-t - 4) + (-3)}{3} = -3, \quad \frac{s + t + (-7)}{3} = -1$$

整理して $2s - t = -1, s + t = 4$

ゆえに $s = 1, t = 3$

よって $A(1, 1), B(-7, 3)$

2 点 $A(1, 1), B(-7, 3)$ を通る直線 ℓ は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{-7 - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad x + 4y - 5 = 0$$

点 $C(-3, -7)$ と直線 ℓ の距離 d は

$$d = \frac{|-3 + 4 \cdot (-7) - 5|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{36}{\sqrt{17}}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} AB \times d$$

であるから

$$AB = \sqrt{(-7 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \times \frac{36}{\sqrt{17}} = 36$$

(答) ナ. $(-3, -1)$ ニ. $(1, 1)$ ス. $(-7, 3)$ ネ. $\frac{36}{\sqrt{17}}$ ノ. 36

[4] 放物線 C は

$$y = -\frac{1+m^2}{4}x \left(x - \frac{4m}{1+m^2} \right)$$

であるから、 C と x 軸との共有点で、 O 以外の点 P の x 座標は $\frac{4m}{1+m^2}$

これに $m = \tan \theta$ を代入して

$$\frac{4m}{1+m^2} = \frac{4 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} = \frac{4 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1+\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{4 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 2 \sin 2\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、 OP の長さ $2 \sin 2\theta$ は、 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大となる。

また、 C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{6} \left(-\frac{1+m^2}{4} \right) \left(\frac{4m}{1+m^2} - 0 \right)^3 \\ &= \frac{1}{24} (1+m^2) \left(\frac{4m}{1+m^2} \right)^3 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{8m^3}{3(1+m^2)^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで

$$1+m^2 = 1+\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{1+\cos 2\theta} \quad \dots \textcircled{4}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ に代入して

$$S = \frac{1}{24} \times \frac{2}{1+\cos 2\theta} \times (2 \sin 2\theta)^3 = \frac{2 \sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)} \quad \dots \textcircled{5}$$

$\theta = \frac{\pi}{8}$ のとき、 $2\theta = \frac{\pi}{4}$ であるから、 $\textcircled{5}$ より

$$S = \frac{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3}{3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{1}{3(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

(答) ハ. $2 \sin 2\theta$ ヒ. $\frac{\pi}{4}$ フ. $\frac{8m^3}{3(1+m^2)^2}$ ヘ. $\frac{2 \sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}$ ホ. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

1.55 平成 19 年度推薦試験 (90 分)

- [1] (1) 1 個 240 円の菓子 A と 1 個 150 円の菓子 B がある。A, B あわせて 15 個を 3,000 円以内で買うとき, A は最大 ア 個買える。
- (2) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ を因数分解すると, $(\text{イ}) \times (\text{ウ})^2$ である。
- (3) $z = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ のとき, 分母を有理化すると, $z = \text{エ}$ で $z + \frac{1}{z} = \text{オ}$ である。
- (4) 点 $(1, -2)$ を通る放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動したとき, 移動後の放物線は, 点 $(-1, -2)$ を通る。このとき $a = \text{カ}$, $b = \text{キ}$ である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ であるとき, $y = \cos^2 \theta + \sin \theta$ の最大値は ク , 最小値は ケ である。
- [2] (1) $\sqrt{a^2 - 4a + 4} - \sqrt{a^2 + 2a + 1}$ (ただし, $1 < a < 2$) の根号をはずし, 簡単にすると コ $a +$ サ となる。
- (2) 2 次関数 $y = 2x^2 + 4x - 1$ の $-2 \leq x \leq 0$ における最小値は シ であり, この 2 次関数の表すグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフの表す 2 次関数の $-2 \leq x \leq 0$ における最小値は ス である。
- (3) 2 次関数 $y = (a - 2)x^2 + 2a^2x + b$ の値が正となる範囲が $-1 < x < 3$ であるならば, $a = \text{セ}$, $b = \text{ソ}$ である。ただし, $a > 0$ とする。
- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = \sqrt{3} - 1$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{6}$ のとき, $\angle A = \text{タ}^\circ$, $\angle B = \text{チ}^\circ$ である。
- (5) $4\sin^2 \theta + 6\tan^2 \theta = 3$ を満たし, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲にある θ は, $\theta = \text{ツ}^\circ$, テ° である。
- [3] $P = 2x^2 + 12xy + 21y^2 + 12y + 14$ は, $(x, y) = \text{ト}$ で, 最小値 ナ をとる。また, x, y を整数とするとき, $P = 5$ を満たす x, y は, $(x, y) = \text{ニ}$, ヌ である。
- [4] 直径が 3 の円周上に 4 点 A, B, C, D が, 時計の回る方向にこの順番に並んでいる。AB = 2, $\angle DAB = 90^\circ$ であるとき, $\sin \angle ADB = \text{ネ}$ で, $\triangle ABD$ の面積は ノ である。さらに, $CB = \frac{3}{2}$ とすると, $CA = \text{ハ}$ で $\triangle ABC$ の面積は ヒ となる。

解答例

[1] (1) 菓子Aを x 個買うとすると、菓子Bは $(15-x)$ 個買うことになるから

$$240x + 150(15 - x) \leq 3000$$

整理すると $90x \leq 750$

よって $x \leq \frac{25}{3}$

$\frac{25}{3} = 8.3\cdots$ で、 x は整数であるから $x \leq 8$

したがって、Aは最大8個買える。

(答) ア. 8

(2) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ とすると

$$P(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 4 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x^2 + 4x + 4)$$

したがって

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$$

(答) イ. $x+1$ ウ. $x+2$

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 4 \\ x+1 \overline{) x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 4x^2 + 8x \\ \underline{4x^2 + 4x} \\ 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

問題点

同校入試課に本問題は因数定理を用いるため、数学IIの問題ではないかとの問い合わせたところ、 $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+a)(x+b)^2$ のように x の恒等式と考えて解く問題であるという回答があった。しかし、この解法も数学IIの「式と証明」で扱う内容であると説明したところ、今後問題作成には細心の注意を払うという回答を得た。

$$(3) z = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6})}{3 - 2} = 10 \end{aligned}$$

(答) エ. $5 + 2\sqrt{6}$ オ. 10

- (4) 放物線 $y = -x^2 + ax + b$ 上の点 (p, q) を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した点を $(-1, -2)$ とすると

$$p - 3 = -1, \quad q + 1 = -2 \quad \text{ゆえに} \quad p = 2, \quad q = -3$$

2 点 $(1, -2)$, $(2, -3)$ は放物線 $y = -x^2 + ax + b$ 上の点であるから

$$-2 = -1^2 + a \cdot 1 + b$$

$$-3 = -2^2 + a \cdot 2 + b$$

式を整理すると

$$a + b = -1, \quad 2a + b = 1$$

これを解いて $a = 2, b = -3$

(答) カ. 2 キ. -3

- (5) $\cos^2 \theta + \sin \theta = (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta$
 $= -\sin^2 \theta + \sin \theta + 1$

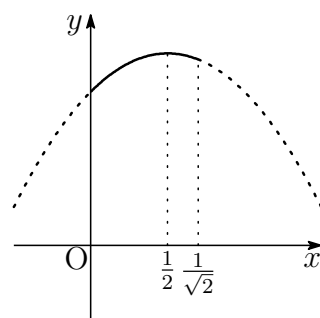
$\sin \theta = x$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ のとき

$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$y = -x^2 + x + 1$$

$$\text{すなわち} \quad y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって $x = \frac{1}{2}$ すなわち $\theta = 30^\circ$ のとき 最大値 $\frac{5}{4}$
 $x = 0$ すなわち $\theta = 0^\circ$ のとき 最小値 1



(答) ク. $\frac{5}{4}$ ケ. 1

$$\begin{aligned}
 [2] \quad (1) \quad \sqrt{a^2 - 4a + 4} - \sqrt{a^2 + 2a + 1} &= \sqrt{(a-2)^2} - \sqrt{(a+1)^2} \\
 &= |a-2| - |a+1|
 \end{aligned}$$

$1 < a < 2$ のとき, $a-2 < 0$, $a+1 > 0$ であるから

$$|a-2| = -(a-2) = -a+2$$

$$|a+1| = a+1$$

$$\text{したがって } |a-2| - |a+1| = -a+2 - (a+1) = -2a+1$$

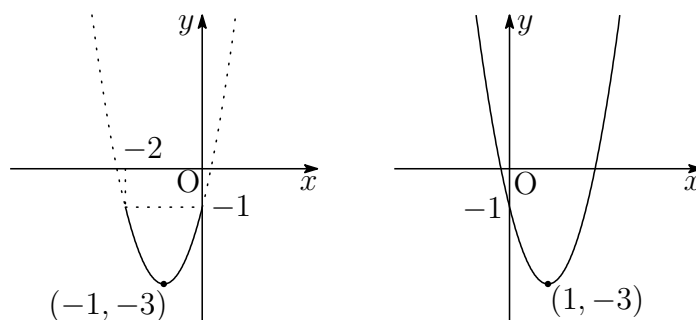
$$\text{よって } \sqrt{a^2 - 4a + 4} - \sqrt{a^2 + 2a + 1} = -2a+1$$

(答) コ. -2 サ. 1

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= 2x^2 + 4x - 1 \\
 &= 2(x+1)^2 - 3
 \end{aligned}$$

であるから, 2次関数 $y = 2x^2 + 4x - 1$ ($-2 \leq x \leq 0$) は,
 $x = -1$ で最小値 -3 をとる (左図).

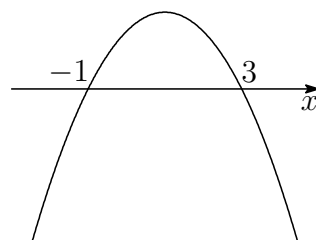
この2次関数のグラフを x 軸方向に2だけ平行移動したグラフ (右図) の表す2次関数の $-2 \leq x \leq 0$ における最小値は, $x = 0$ で最小値 -1 をとる.



(答) シ. -3 ス. -1

- (3) 条件から, 2次関数 $y = (a-2)x^2 + 2a^2x + b$ のグラフは, $-1 < x < 3$ のときだけ x 軸の上側にある.

すなわち, 上に凸の放物線で2点 $(-1, 0)$, $(3, 0)$ を通るから



$$a - 2 < 0$$

$$(a-2) \cdot (-1)^2 + 2a^2 \cdot (-1) + b = 0$$

$$(a-2) \cdot 3^2 + 2a^2 \cdot 3 + b = 0$$

$a > 0$ であるから, 第1式より $0 < a < 2$ …①

第2式より $b = 2a^2 - a + 2$ …②

第3式より $b = -6a^2 - 9a + 18$ …③

②, ③ から $2a^2 - a + 2 = -6a^2 - 9a + 18$

整理して $a^2 + a - 2 = 0$

すなわち $(a-1)(a+2) = 0$

① より $a = 1$

これを②に代入して $b = 3$

(答) セ. 1 ソ. 3

- (4) $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} - 1$

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2^2}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3} - 1) \cdot 2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{-2(\sqrt{3} - 1)}{4(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 120^\circ$

(答) タ. 45° チ. 120°

(5) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より, 与えられた式は

$$4 \sin^2 \theta + \frac{6 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 3$$

すなわち $4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 6 \sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta$

$$4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + 6 \sin^2 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta)$$

整理して $4 \sin^4 \theta - 13 \sin^2 \theta + 3 = 0$

よって $(\sin^2 \theta - 3)(4 \sin^2 \theta - 1) = 0$

$\sin^2 \theta - 3 \neq 0$ であるから

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0$$

さらに, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $0 < \sin \theta \leq 1$ であるから

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \theta = 30^\circ, 150^\circ$$

(答) ツ. テ. $30^\circ, 150^\circ$

$$\begin{aligned} [3] \quad P &= 2x^2 + 12xy + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x^2 + 6xy) + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2\{(x + 3y)^2 - (3y)^2\} + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x + 3y)^2 + 3y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x + 3y)^2 + 3(y^2 + 4y) + 14 \\ &= 2(x + 3y)^2 + 3\{(y + 2)^2 - 2^2\} + 14 \\ &= 2(x + 3y)^2 + 3(y + 2)^2 + 2 \end{aligned}$$

P は

$$x + 3y = 0 \quad \text{かつ} \quad y + 2 = 0$$

すなわち $(x, y) = (6, -2)$ のとき, 最小値 2 をとる.

$$P = 5 \text{ のとき} \quad 2(x + 3y)^2 + 3(y + 2)^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

整数 x, y について, $2(x + 3y)^2$ および $3(y + 2)^2$ のとる値は, それぞれ

$$2(x + 3y)^2 = 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 4, 2 \cdot 9, \dots$$

$$3(y + 2)^2 = 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 4, 3 \cdot 9, \dots$$

このとき, ①を満たすものは $2(x + 3y)^2 = 0$ かつ $3(y + 2)^2 = 3 \cdot 1$

すなわち $x + 3y = 0, y + 2 = \pm 1$

よって $(x, y) = (3, -1), (9, -3)$

(答) ト. $(6, -2)$ ナ. 2 ニ. ヌ. $(3, -1), (9, -3)$

[4] $\angle DAB = 90^\circ$ であるから $BD = 3$ (直径)

$$\text{したがって } \sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{また } AD &= \sqrt{BD^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \triangle ABD &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{さらに } \cos \angle BDA = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

BD は直径であるから, 直角三角形 BCD において

$$\sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{すなわち } \angle BDC = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ において, B から CA に垂線 BH を引く.

$\widehat{BC}$ に対する円周角により

$$\angle BAH = \angle BDC$$

$$\text{ゆえに } \angle BAH = 30^\circ$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角により

$$\angle BCH = \angle BDA$$

$$\text{ゆえに } \cos \angle BCH = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{よって } AH = AB \cos \angle BAH = 2 \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

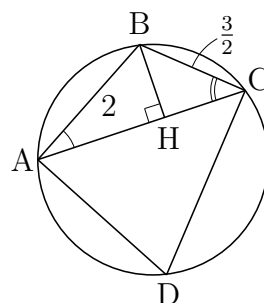
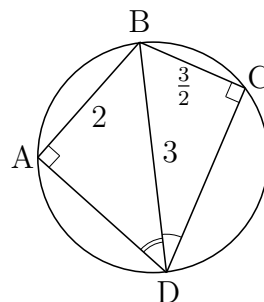
$$CH = BC \cos \angle BCH = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{したがって } CA = AH + CH = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{また } BH = AB \sin \angle BAH = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} CA \cdot BH = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ ネ. } \frac{2}{3} \quad \text{ノ. } \sqrt{5} \quad \text{ハ. } \sqrt{3} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ヒ. } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$



1.56 平成19年度一般試験(90分)

- [1] (1) 整式 $x^3 + 4x^2 + 3x + 3$ を, 整式 $x + 2$ で割ると, 商が $x^2 + 2x + a$, 余りが b であった。このとき, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2次関数 $y = 2x^2 + 4x + 3$ のグラフ C の頂点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ であり, C を x 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ だけ平行移動すれば $y = 2x^2 - 2x + 1$ のグラフと一致する。
- (3) 3次方程式 $x^3 + x^2 - ax - 4 = 0$ の1つの解が $x = -2$ であるならば, $a = \boxed{\text{カ}}$ で, 残りの解は $x = \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ である。
- (4) $3\cos 2\theta + 5\sin \theta + 1 = 0$ が成り立つとき, $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}$ となるから, $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ とすると $\theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- (5) 関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ が, $f'(1) = 0$, $\int_0^3 f(x) dx = -3$ を満たすとき, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- [2] (1) $A(0, 4)$, $B(4, 2)$ とする。このとき, A , B 間の距離は $\boxed{\text{ス}}$ で, 線分 AB の垂直二等分線は, $y = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (2) $b > 0$ のとき, 関数 $y = (2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の個数が2個ならば, $b = \boxed{\text{ソ}}$ である。このとき, この関数は $\boxed{\text{タ}} < x < \boxed{\text{チ}}$ の範囲で減少する。
- (3) $0 < x < \pi$, $\tan x = -2\sqrt{2}$ のとき, $\cos x = \boxed{\text{ツ}}$, $\cos \frac{x}{2} = \boxed{\text{テ}}$ である。
- (4) $3^{3x} - 3^{2x+2} - 3^x + 9 = 0$ を満たす x は, $x = \boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ である。
- (5) 2曲線 $C_1: y = -2x^2 + x + 2$ と $C_2: y = x^2 - 2x - 4$ の交点の x 座標は $x = \boxed{\text{ニ}}$, $\boxed{\text{ヌ}}$ であり, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [3] 3点 $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(1, 5)$ について, 点 A と直線 BC の距離は $\boxed{\text{ノ}}$ である。また, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である。直線 BC に平行な直線 ℓ が, $\triangle ABC$ の面積を2等分するとき, 点 A と直線 ℓ の距離は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また, 直線 ℓ と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{フ}}$ である。
- [4] 2次曲線 $C: y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + x - 6)$ 上の点 $P(-1, \sqrt{3})$ における C の接線と x 軸のなす角を θ とすると $\tan \theta = \boxed{\text{ヘ}}$ である。 P を通り, x 軸とのなす角が $\theta + \frac{\pi}{6}$ である直線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ホ}}$ であるから, ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{マ}}$ である。また, 直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{ミ}}$ である。

解答例

[1] (1) 右の割り算から

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 1 \\
 x + 2 \overline{) x^3 + 4x^2 + 3x + 3} \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \\
 2x^2 + 3x \\
 \underline{2x^2 + 4x} \\
 -x + 3 \\
 \underline{-x - 2} \\
 5
 \end{array}$$

(別解) 与えられた条件から, 等式

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = (x + 2)(x^2 + 2x + a) + b$$

が成り立つ. 右辺を整理すると

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = x^3 + 4x^2 + (a + 4)x + (2a + b)$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$3 = a + 4, \quad 3 = 2a + b$$

これを解いて $a = -1, b = 5$ (答) ア. -1 イ. 5 (2) $y = 2x^2 + 4x + 3 \cdots \textcircled{1}$ を変形すると $y = 2(x + 1)^2 + 1$ ゆえに, $\textcircled{1}$ の頂点の座標は $(-1, -1)$

$$y = 2x^2 - 2x + 1 \cdots \textcircled{2} \text{ を変形すると } y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

よって, 頂点は点 $(-1, 1)$ から点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に移動する. ゆえに $\textcircled{1}$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動して $\textcircled{2}$ のグラフに一致するとすれば, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の頂点の座標から

$$-1 + p = \frac{1}{2}, \quad 1 + q = \frac{1}{2}$$

$$\text{これを解いて } p = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

(答) ウ. $(-1, 1)$ エ. $\frac{3}{2}$ オ. $-\frac{1}{2}$

- (3)
- $x = -2$
- が、この方程式の解であるから

$$(-2)^3 + (-2)^2 - a \cdot (-2) - 4 = 0$$

$$\text{整理して} \quad 2a - 8 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a = 4$$

よって、方程式は

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

したがって、残りの解は $x = -1, 2$

(答) カ. 4 キ. ク. $-1, 2$

- (4) 左辺を変形すると
- $3(1 - 2\sin^2 \theta) + 5\sin \theta + 1 = 0$

$$\text{整理すると} \quad 6\sin^2 \theta - 5\sin \theta - 4 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (2\sin \theta + 1)(3\sin \theta - 4) = 0$$

$$-90^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より } -1 < \sin \theta < 1 \text{ であるから } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{この範囲で解いて} \quad \theta = -30^\circ$$

$$\text{(答) ケ. } -\frac{1}{2} \quad コ. -30$$

- (5)
- $f(x)$
- を微分して
- $f'(x) = 2x + a$

$$f'(1) = 0 \text{ より } 2 \cdot 1 + a = 0$$

$$\text{よって} \quad a = -2$$

$f(x) = x^2 - 2x + b$ であるから

$$\text{条件より} \quad \int_0^3 (x^2 - 2x + b) dx = -3$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx \right]_0^3 = -3$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 + b \cdot 3 = -3$$

$$\text{整理して} \quad 3b = -3$$

$$\text{よって} \quad b = -1$$

(答) サ. -2 シ. -1

[2] (1) A, B間の距離は $\sqrt{(4-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \text{ より } (2, 3)$$

線分 AB の傾きは $\frac{2-4}{4-0} = -\frac{1}{2}$

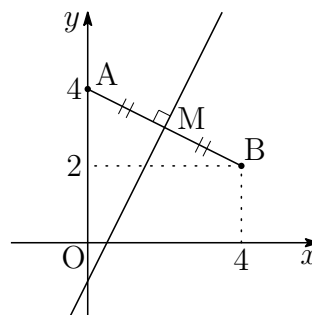
線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2$$

よって, 求める直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 1$$

(答) ス. $2\sqrt{5}$ セ. $2x - 1$



(2) $y = (2x - 1)(x^2 + bx + 9)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は, $x = \frac{1}{2}$ および 2 次方程式 $x^2 + bx + 9 = 0$ の解である. このグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個であるのは, 次の [1], [2] の場合である.

[1] 2 次方程式 $x^2 + bx + 9 = 0$ が $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ 以外の解をもつ場合

$x = \frac{1}{2}$ がこの 2 次方程式の解であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + 9 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad b = -\frac{37}{2}$$

これは, $b > 0$ に反するので不適.

[2] 2 次方程式 $x^2 + bx + 9 = 0$ が $\frac{1}{2}$ 以外の重解をもつ場合

$$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \quad b > 0 \text{ より} \quad b = 6$$

このとき, 2 次方程式 $x^2 + 6x + 9 = 0$ は, 重解 $x = -3$ ($\neq \frac{1}{2}$) をもつ.

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad y &= (2x - 1)(x^2 + 6x + 9) \\ &= 2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 \end{aligned}$$

$$\text{微分して} \quad y' = 6x^2 + 22x + 12$$

$$= 2(x + 3)(3x + 2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると} \quad x = -3, -\frac{2}{3}$$

増減表は, 右のとおりである. よって, $-3 < x < -\frac{2}{3}$ の範囲で減少する.

(答) ソ. 6 タ. -3 チ. $-\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$(3) \ 0 < x < \pi, \tan x = -2\sqrt{2} < 0 \text{ より } \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + (-2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \cos x < 0 \text{ であるから } \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \cos \frac{x}{2} > 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{答}) \text{ ツ. } -\frac{1}{3} \quad \text{ テ. } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(4) \ 3^{3x} = (3^x)^3, \ 3^{2x+2} = 3^{2x} \cdot 3^2 = 9 \cdot (3^x)^2 \text{ であるから, } 3^x = t \dots \textcircled{1} \text{ とおくと, 方程式は}$$

$$t^3 - 9t^2 - t + 9 = 0$$

$$t^2(t-9) - (t-9) = 0$$

$$(t-9)(t^2-1) = 0$$

$$(t-9)(t+1)(t-1) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } t > 0 \text{ であるから } t = 9, 1$$

$$\text{ゆえに } 3^x = 9 \text{ を解いて } x = 2$$

$$3^x = 1 \text{ を解いて } x = 0$$

$$\text{よって, 求める解は } x = 2, 0$$

$$(\text{答}) \text{ ト. ナ. } 2, 0$$

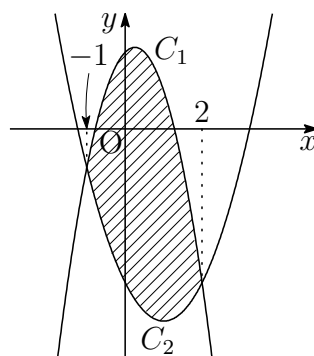
(5) 2つの放物線の共有点の x 座標は, 方程式

$$-2x^2 + x + 2 = x^2 - 2x - 4$$

を解いて $x = -1, 2$

右の図から, 求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-2x^2 + x + 2) - (x^2 - 2x - 4)\} dx \\ &= -3 \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx \\ &= -3 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$



(答) ニ. ヌ. $-1, 2$ ネ. $\frac{27}{2}$

[3] 2点 $B(2, 3)$, $C(1, 5)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{5 - 3}{1 - 2}(x - 2)$$

ゆえに $2x + y - 7 = 0$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) + 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

また $BC = \sqrt{(1 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{5}$

ゆえに $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{9}{2}$

ℓ と AB , AC の交点をそれぞれ B' , C' とする.

$\triangle AB'C'$ と $\triangle ABC$ の面積比が $1:2$ であるから, 相似比は $1:\sqrt{2}$

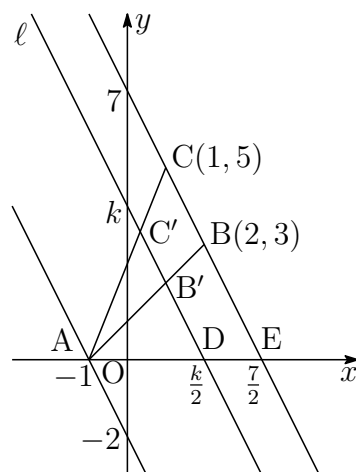
ゆえに, 点 A と直線 ℓ の距離は $\frac{1}{\sqrt{2}} \times d = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$

直線 ℓ の y 切片を k とすると, その方程式は $y = -2x + k$

ℓ , 直線 BC の x 軸との交点をそれぞれ, D , E とすると, D , E の x 座標は, それぞれ $\frac{k}{2}$, $\frac{7}{2}$ である. このとき, $AD = \frac{1}{\sqrt{2}}AE$ であるから

$$\frac{k}{2} - (-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{7}{2} - (-1) \right\} \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{9}{2}\sqrt{2} - 2$$

(答) ノ. $\frac{9}{\sqrt{5}}$ ハ. $\frac{9}{2}$ ヒ. $\frac{9}{\sqrt{10}}$ フ. $\frac{9}{2}\sqrt{2} - 2$



[4] $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + x - 6)$ を微分して $y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(2x + 1)$

P における接線の傾き $\tan \theta$ は

$$x = -1 \text{ のとき } y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\{2 \cdot (-1) + 1\} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\ell \text{ の傾きは } \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

したがって、 ℓ の方程式は

$$y - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{5}\{x - (-1)\} \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{5}x + \frac{8\sqrt{3}}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は、 $\textcircled{1}$ に $y = 0$ を代入して $x = -\frac{8}{3}$

$$(\text{答}) \quad \text{へ. } \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{ホ. } \frac{3\sqrt{3}}{5} \quad \text{マ. } \frac{3\sqrt{3}}{5}x + \frac{8\sqrt{3}}{5} \quad \text{ミ. } -\frac{8}{3}$$

1.57 平成18年度推薦試験(90分)

- [1] (1) $x = \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $x = \boxed{\text{ア}}$ となる。このとき、 $x^2 + 2x + 1$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 = 0$ を満たす y を x で表すと $y = \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 関数 $y = -3x^2 + 6x + a$ の $0 \leq x \leq 3$ における最大値が7であるとする。このとき、 $a = \boxed{\text{オ}}$ であり、 $0 \leq x \leq 3$ における y の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となる。
- (4) 関数 $y = |2x - 1|$ の定義域が $-1 \leq x \leq 2$ であるならば値域は $\boxed{\text{キ}} \leq y \leq \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ で、 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}, \cos \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) すべての x に対して、 $-2x^2 + (a + 3)x + \frac{a}{2} < 0$ であるならば、 $\boxed{\text{サ}} < a < \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2次関数 $y = x^2$ の表すグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ス}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{セ}}$ だけ平行移動した曲線の式は、 $y = x^2 + 4x - 2$ となる。
- (3) 3点 $(1, 1), \left(\frac{1}{2}, -2\right), (-2, 3)$ を通る2次関数は、 $y = \boxed{\text{ソ}}x^2 + \boxed{\text{タ}}x + \boxed{\text{チ}}$ である。
- (4) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ で、 $2\sin^2 \theta - 3\sqrt{3}\cos(90^\circ - \theta) + 3 = 0$ が成り立つとき、 $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ または $\theta = \boxed{\text{テ}}^\circ$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において、 $AB = 10, BC = 5, \angle B = 60^\circ$ のとき、 $AC = \boxed{\text{ト}}, \angle A = \boxed{\text{ナ}}^\circ$ である。
- [3] 不等式 $|x + 1| \geq 2|x|$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} \leq x \leq \boxed{\text{ヌ}}$ である。この範囲の x に対して、 $y = 3x^2 + 4x - 1$ の最小値は $\boxed{\text{ネ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

- [4] 2点 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ を通る放物線 $C: y = 2(x - a)(x - b)$ を考える。ただし, $a < b$ とする。 A, B の中点を M とし, 2点 A, M を通る放物線の頂点 P が C 上にあるとすると, P の座標を a, b を用いて表すと, (,) となる。2点 M, B を通り, C 上に頂点をもつ放物線の頂点 Q は, P を x 軸方向に だけ平行移動した点であるから, Q の座標は a, b を用いて, (,) と書ける。さらに, $\angle PMQ = 90^\circ$ とすると, $b - a =$ となる。
- [5] 円に内接する四角形 $ABCD$ において, $AB = 4, BC = 4, CD = 1, DA = 5$ のとき, $\angle A =$ $^\circ$, $\angle C =$ $^\circ$, $BD =$ である。また, この四角形の面積は である。

解答例

$$\begin{aligned}
 [1] \quad (1) \quad x &= \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(4 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\
 &= \frac{4 \times 2 + 4 \times (-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times (-\sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{8 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x + 1 &= (x + 1)^2 = \{(3 - \sqrt{2}) + 1\}^2 \\
 &= (4 - \sqrt{2})^2 \\
 &= 4^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 18 - 8\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(答) ア. $3 - \sqrt{2}$ イ. $18 - 8\sqrt{2}$ (2) 左辺を因数分解すると (x について整理)

$$\begin{aligned}
 &2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 \\
 &= 2x^2 + (-y + 3)x - (y^2 - 1) \\
 &= 2x^2 + (-y + 3)x - (y + 1)(y - 1) \\
 &= \{x - (y - 1)\}\{2x + (y + 1)\} \\
 &= (x - y + 1)(2x + y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \times & -(y - 1) \longrightarrow -2y + 2 \\
 2 & \times & y + 1 \longrightarrow y + 1 \\
 \hline
 2 & & -(y + 1)(y - 1) \longrightarrow -y + 3
 \end{array}$$

したがって, $(x - y + 1)(2x + y + 1) = 0$ から

$$x - y + 1 = 0 \quad \text{または} \quad 2x + y + 1 = 0$$

これを y について解いて $y = x + 1, -2x - 1$ (答) ウ. エ. $x + 1, -2x - 1$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad -3x^2 + 6x + a &= -3(x^2 - 2x) + a \\
 &= -3\{(x-1)^2 - 1^2\} + a \\
 &= -3(x-1)^2 + a + 3
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } y = -3(x-1)^2 + a + 3$$

$0 \leq x \leq 3$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

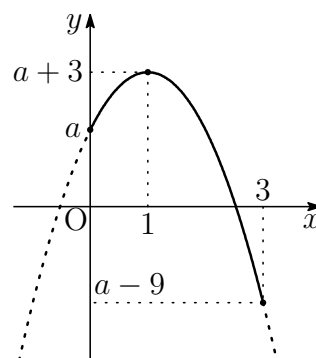
$x = 1$ で最大値 $a + 3$ をとり,

$x = 3$ で最小値 $a - 9$ をとる.

したがって $a + 3 = 7$ を解いて $a = 4$

このとき, 最小値は $4 - 9 = -5$

(答) オ. 4 カ. -5

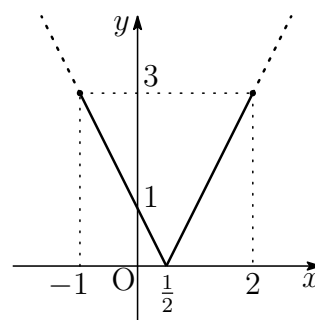


$$(4) \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases} \text{ であるから}$$

$-1 \leq x \leq 2$ での $y = |2x-1|$ のグラフは右の図の実線部分である. よって, 値域は

$$0 \leq y \leq 3$$

(答) キ. 0 ク. 3



$$(5) \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos \theta > 0$ である.

$$\text{よって } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(答) ケ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ コ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

- [2] (1) $-2x^2 + (a+3)x + \frac{a}{2}$ の x^2 の係数は負であり, すべての x に対して,
 $-2x^2 + (a+3)x + \frac{a}{2} < 0$ であるためには, $D < 0$ を満たせばよいから

$$(a+3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \frac{a}{2} < 0$$

$$a^2 + 10a + 9 < 0$$

$$(a+1)(a+9) < 0$$

$$-9 < a < -1$$

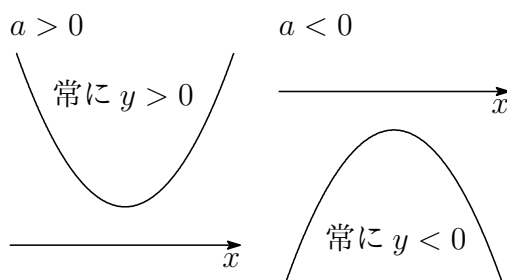
(答) サ. -9 シ. -1

研究

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は, $D < 0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$$a > 0, D < 0 \iff \text{常に } y > 0$$

$$a < 0, D < 0 \iff \text{常に } y < 0$$



2次式の定符号

$$\text{常に } ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0, D < 0$$

$$\text{常に } ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0, D < 0$$

[補足] $\text{常に } ax^2 + bx + c \geq 0 \iff a > 0, D \leq 0$

$$\text{常に } ax^2 + bx + c \leq 0 \iff a < 0, D \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x^2 + 4x - 2 &= (x + 2)^2 - 2^2 - 2 \\
 &= (x + 2)^2 - 6
 \end{aligned}$$

よって、 $y = x^2$ の頂点は $(0, 0)$ 、 $y = x^2 + 4x - 2$ の頂点は $(-2, -6)$ であるから、 $y = x^2$ を x 軸方向に -2 、 y 軸方向に -6 だけ平行移動したものが $y = x^2 + 4x - 2$ である。

(答) ス. -2 セ. -6

(3) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。

グラフが3点 $(1, 1)$ 、 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ 、 $(-2, 3)$ を通るから

$$1 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-2 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$3 = 4a - 2b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ から } 3a - 3b = 2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b = 3 \quad \text{すなわち} \quad 3a + 2b = 12 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = \frac{8}{3}, b = 2$$

$$\text{これらを } \textcircled{1} \text{ に代入して } c = -\frac{11}{3}$$

$$\text{よって、求める2次関数は } y = \frac{8}{3}x^2 + 2x - \frac{11}{3}$$

(答) ソ. $\frac{8}{3}$ タ. 2 チ. $-\frac{11}{3}$

(4) 方程式を変形すると $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$

因数分解すると $(\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $0 < \sin\theta < 1$ であるから $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

この範囲で $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(答) ツ. テ. 60, 120

〔別解〕 $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$ を解の公式に適用すると

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ &= \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0 < \sin\theta < 1$ に注意して $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 余弦定理により

$$\begin{aligned}AC^2 &= 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos 60^\circ \\ &= 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 75\end{aligned}$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

正弦定理により $\frac{5}{\sin A} = \frac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

よって $\sin A = \frac{5}{5\sqrt{3}} \sin 60^\circ = \frac{5}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$A + C = 120^\circ$ より $A < 120^\circ$ であるから $A = 30^\circ$

(答) ト. $5\sqrt{3}$ ナ. 30

[3] $|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \geq -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases}, \quad |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ であるから

$x < -1$ のとき

$$-x-1 \geq 2(-x) \quad \text{を解いて} \quad x \geq 1$$

このとき $x \geq 1$ は不適.

$-1 \leq x < 0$ のとき

$$x+1 \geq 2(-x) \quad \text{を解いて} \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{このときの } x \text{ の値の範囲は} \quad -\frac{1}{3} \leq x < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \geq 0$ のとき

$$x+1 \geq 2x \quad \text{を解いて} \quad x \leq 1$$

$$\text{このときの } x \text{ の値の範囲は} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, 求める x の値の範囲は $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 1 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) - 1 \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - 1 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

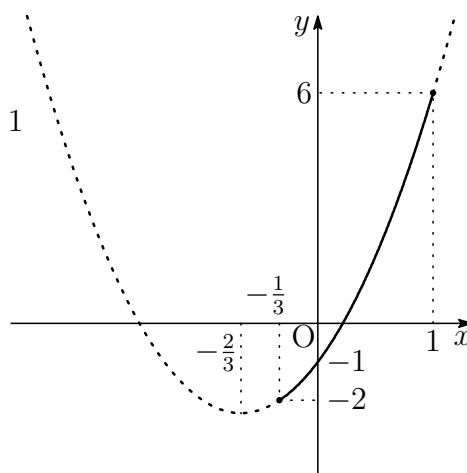
よって $y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

$$x = -\frac{1}{3} \text{ で最小値 } -2 \text{ をとり,}$$

$$x = 1 \text{ で最大値 } 6 \text{ をとる.}$$

(答) ニ. $-\frac{1}{3}$ ヌ. 1 ネ. -2 ノ. 6



[4] M は A, B の中点であるから, M の x 座標は

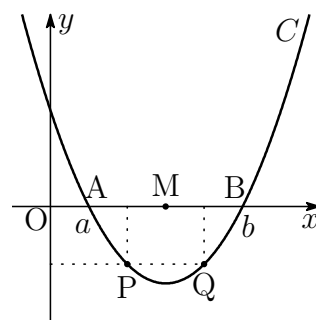
$$x = \frac{a+b}{2}$$

2 点 A, M を通る放物線の軸は, A, M の中点を通るから P の x 座標は

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a+b}{2} \right) = \frac{3a+b}{4}$$

であり, P の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2 \left(\frac{3a+b}{4} - a \right) \left(\frac{3a+b}{4} - b \right) \\ &= 2 \times \frac{b-a}{4} \times \frac{3a-3b}{4} = -\frac{3}{8}(b-a)^2 \end{aligned}$$



P と Q は放物線 C の軸 $x = \frac{a+b}{2}$ に関して対称であり, $PQ = \frac{1}{2} \times AB$ であるから, Q は P を x 軸方向に $\frac{b-a}{2}$ だけ平行移動したものである.

したがって, Q の座標は

$$\left(\frac{3a+b}{4} + \frac{b-a}{2}, -\frac{3}{8}(b-a)^2 \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{a+3b}{4}, -\frac{3}{8}(b-a)^2 \right)$$

$\angle PMQ = 90^\circ$ のとき, A, M の中点を R とするとき, $\triangle RPM$ は直角二等辺三角形であるから $PR = RM$ より

$$\frac{3}{8}(b-a)^2 = \frac{b-a}{4}$$

$b-a \neq 0$ であるから $b-a = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad & \text{ハ. } \frac{3a+b}{4} \quad \text{ヒ. } -\frac{3}{8}(b-a)^2 \quad \text{フ. } \frac{b-a}{2} \\ & \text{ヘ. } \frac{a+3b}{4} \quad \text{ホ. } -\frac{3}{8}(b-a)^2 \quad \text{マ. } \frac{2}{3} \end{aligned}$$

[5] $\angle A = \theta$ とする.

$\triangle ABD$ において, 余弦定理を用いると

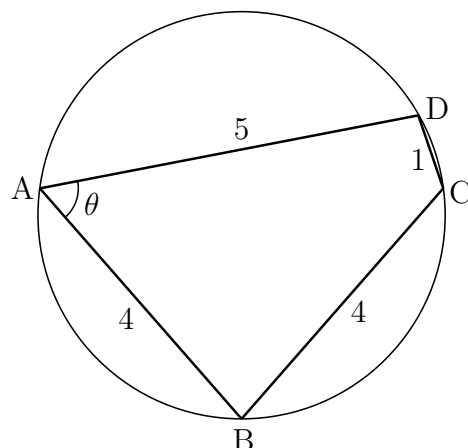
$$\begin{aligned} BD^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle C = 180^\circ - \theta$$

$\triangle BCD$ において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 17 - 8(-\cos \theta) \\ &= 17 + 8 \cos \theta \end{aligned}$$



よって $41 - 40 \cos \theta = 17 + 8 \cos \theta$ これを解いて $\cos \theta = \frac{1}{2}$

また $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$

したがって $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

このとき $BD^2 = 21$ となるから $BD = \sqrt{21}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \sin 120^\circ \\ &= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ミ. 60 ム. 120 メ. $\sqrt{21}$ モ. $6\sqrt{3}$

1.58 平成18年度一般試験(90分)

- [1] (1) 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解を α, β とし, $\alpha + 1, \beta + 1$ を解とする2次方程式を $x^2 + x - 4 = 0$ とする。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 円 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + k$ が2点で交わるとき, k の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < k < \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $180^\circ < \theta < 270^\circ$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ であるとき, $\sin 2\theta = \boxed{\text{オ}}$, $\cos 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いると, 2^{20} は $\boxed{\text{キ}}$ 桁, 3^{10} は $\boxed{\text{ク}}$ 桁の数である。
- (5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との交点の数は, $a = 5$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ 個, $a = 8$ のとき $\boxed{\text{コ}}$ 個である。
- [2] (1) 直線 $\ell: y = 2x + 3$ と点 $(1, 5)$ で接する半径 $\sqrt{5}$ の円で, ℓ の下方にある円の中心の座標は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。
- (2) x, y が4つの不等式 $x + 2y \leq 3$, $3x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を同時に満たすとき, $2x + 3y$ は $x = \boxed{\text{ス}}$, $y = \boxed{\text{セ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ソ}}$ をとる。
- (3) 不等式 $\log_2(2x+3) \leq \log_4(-4x-3)$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{タ}} < x \leq \boxed{\text{チ}}$ である。
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $2\sin \theta + 2\sqrt{3}\cos \theta$ が最大となるのは, $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ のときで, 最大値は $\boxed{\text{テ}}$ である。
- [3] 放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上の点 $P(1, 0)$, $Q(3, -2)$ における C の接線をそれぞれ ℓ, m とする。 ℓ, m の交点の座標が $(2, 1)$ であるとき, $a = \boxed{\text{ト}}$, $b = \boxed{\text{ナ}}$, $c = \boxed{\text{ニ}}$ である。このとき, C と ℓ, m で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。
- [4] 原点 O を通り, x 軸の正方向とのなす角が θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) である直線を ℓ とする。2点 $P(t, 0)$ と $Q(0, 2-t)$ を結ぶ直線が ℓ と直交するとき, $\tan \theta$ を t の式で表すと, $\tan \theta = \boxed{\text{ネ}}$ である。ただし, $0 < t < 2$ とする。また, このとき線分 PQ と ℓ の交点を R とすると, 線分 QR の長さは t と $\cos \theta$ を用いて $\boxed{\text{ノ}}$ と書ける。線分 PR の長さが線分 QR の長さの3倍であれば, $t = \boxed{\text{ハ}}$ であり, $\theta = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ である。

解答例

[1] (1) 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$$

2次方程式 $x^2 + x - 4 = 0$ の解と係数の関係から

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = -1, \quad (\alpha + 1)(\beta + 1) = -4$$

$$\text{すなわち} \quad (\alpha + \beta) + 2 = -1, \quad \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -4$$

$$\text{よって} \quad -a + 2 = -1, \quad b + (-a) + 1 = -4$$

$$\text{これらを解いて} \quad \mathbf{a = 3, b = -2}$$

(答) ア. 3 イ. -2

(2) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ と $y = x + k$ から y を消去して整理すると

$$2x^2 + 2(k - 1)x + k^2 - 4 = 0$$

が2点で交わるのは、 $D > 0$ のときであるから

$$\{2(k - 1)\}^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) > 0$$

$$-4k^2 - 8k + 36 > 0$$

$$k^2 + 2k - 9 < 0$$

$$\text{したがって} \quad -1 - \sqrt{10} < k < -1 + \sqrt{10}$$

$$\text{(答) ウ. } -1 - \sqrt{10} \quad \text{エ. } -1 + \sqrt{10}$$

【別解】点 $(1, 0)$ と直線 $x - y + k = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|1 - 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$d < \sqrt{5} \text{ より } |k + 1| < \sqrt{10}$$

$$\text{よって} \quad -\sqrt{10} < k + 1 < \sqrt{10}$$

$$\text{したがって} \quad -1 - \sqrt{10} < k < -1 + \sqrt{10}$$

$$(3) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より $\sin \theta < 0$ であるから

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{したがって} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

$$(\text{答}) \text{ オ. } \frac{24}{25} \quad \text{カ. } \frac{7}{25}$$

$$(4) \quad \log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 20 \times 0.3010 = 6.020$$

$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$ であるから

$$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 2^{20} < \log_{10} 10^7$$

$$\text{よって} \quad 10^6 < 2^{20} < 10^7$$

したがって、 **2^{20}** は **7** 桁の数である.

$$\log_{10} 3^{10} = 10 \log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$$

$4 < \log_{10} 3^{10} < 5$ であるから

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5$$

$$\text{よって} \quad 10^4 < 3^{10} < 10^5$$

したがって、 **3^{10}** は **5** 桁の数である.

$$(\text{答}) \text{ キ. } 7 \quad \text{ク. } 5$$

(5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との共有点の個数は、方程式

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$$

の実数解の個数である. すなわち $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい.

関数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 7	$\searrow$	極小 -20	$\nearrow$

y の増減表は、右のようになる.

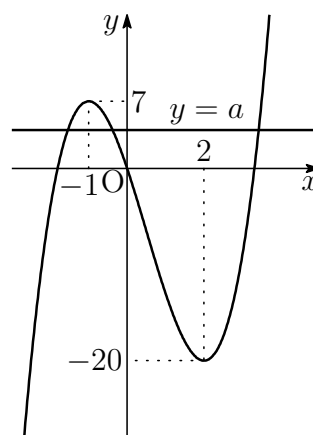
よって、 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフは、
右の図のようになる.

したがって、求める共有点の個数は

$a = 5$ のとき 3 個

$a = 8$ のとき 1 個

(答) ケ. 3 コ. 1



[2] (1) 点 $(1, 5)$ を P とし、円の中心の座標を $C(a, b)$ とすると $b < 5$

直線 ℓ の傾きは 2, 直線 PC の傾きは $\frac{b-5}{a-1}$

$PC \perp \ell$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-5}{a-1} = -1 \quad \text{すなわち} \quad a-1 = -2(b-5) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$PC = \sqrt{5}$ すなわち $PC^2 = 5$ より

$$(a-1)^2 + (b-5)^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① を ② に代入して

$$4(b-5)^2 + (b-5)^2 = 5$$

したがって $(b-5)^2 = 1$

$b-5 < 0$ であるから $b-5 = -1$

よって $b = 4$ これを ① に代入して $a = 3$ ゆえに 中心 $(3, 4)$

(答) サ. 3 シ. 4

(2) 与えられた連立不等式の表す領域を A とする.

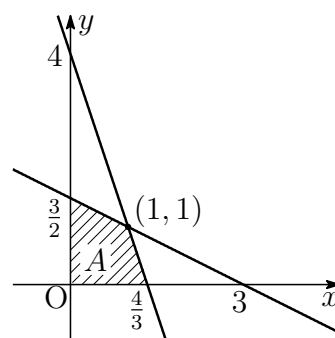
領域 A は 4 点

$$(0, 0), \left(\frac{4}{3}, 0\right), (1, 1), \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である.

$$2x + 3y = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とにおいて、直線 $\textcircled{1}$ が領域 A の点を通るとき k の値を調べる.



$$(0, 0) \text{ を通るとき } k = 0, \quad \left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ を通るとき } k = \frac{8}{3}$$

$$(1, 1) \text{ を通るとき } k = 5, \quad \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ を通るとき } k = \frac{9}{2}$$

これ以外で領域 A の点を通るとき $0 < k < 5$

したがって、 $2x + 3y$ は

$x = 1, y = 1$ のとき最大値 5 をとる.

(答) ス. 1 セ. 1 ソ. 5

(3) $\log_2(2x + 3) = \log_4(2x + 3)^2$ より $\log_4(2x + 3)^2 \leq \log_4(-4x - 3)$

したがって

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ (2x + 3)^2 \leq -4x - 3 \end{cases}$$

が求める x の値の範囲である.

$$\text{第1式から } x > -\frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{第2式から } 4x^2 + 16x + 12 \leq 0$$

$$\text{すなわち } (x + 1)(x + 3) \leq 0$$

$$\text{したがって } -3 \leq x \leq -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

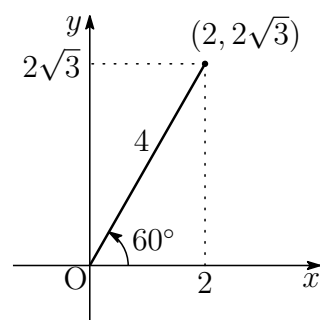
よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-\frac{3}{2} < x \leq -1$

(答) タ. $-\frac{3}{2}$ チ. -1

(4) $2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = 4\sin(\theta + 60^\circ)$ であるから

$\theta = 30^\circ$ のとき最大値 4 をとる.

(答) ツ. 30 テ. 4



[3] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は, $P(1, 0)$, $Q(3, -2)$ を通るから

$$0 = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-2 = 9a + 3b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

点 $(2, 1)$ を R とすると

直線 PR の傾きは $\frac{1-0}{2-1} = 1$, 直線 RQ の傾きは $\frac{-2-1}{3-2} = -3$

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると $y' = 2ax + b$

直線 PR および直線 RQ の傾きは, P および Q の接線の傾きに等しいから

$$2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$6a + b = -3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④ より $a = -1, b = 3$

これらを ① に代入して $c = -2$

$a = -1, b = 3, c = -2$ は ② を満たす.

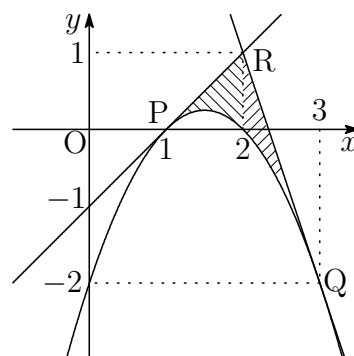
したがって, $a = -1, b = 3, c = -2$

直線 PR の方程式は $y = x - 1$, 直線 RQ の方程式は $y = -3x + 7$ であるから

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x-1) - (-x^2 + 3x - 2)\} dx + \int_2^3 \{(-3x+7) - (-x^2 + 3x - 2)\} dx \\ &= \int_1^2 (x-1)^2 dx + \int_2^3 (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_2^3 = \frac{1}{3}(2-1)^3 - 0 + \left\{ 0 - \frac{1}{3}(2-3)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(答) ト. -1 ナ. 3 ニ. -2 ス. $\frac{2}{3}$



[4] 直線 PQ の傾きは $\frac{0 - (2 - t)}{t - 0} = \frac{t - 2}{t}$

PQ $\perp$ ℓ であるから

$$\frac{t - 2}{t} \tan \theta = -1$$

すなわち $\tan \theta = \frac{t}{2 - t} \quad \dots \textcircled{1}$

$\angle OQR = \theta$ であるから

$$\begin{aligned} QR &= OQ \cos \theta \\ &= (2 - t) \cos \theta \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

PR = OP sin θ であるから PR = $t \sin \theta \quad \dots \textcircled{3}$

線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば, $\frac{PR}{QR} = 3$ となるから

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} \frac{t \sin \theta}{(2 - t) \cos \theta} &= 3 \\ \frac{t}{2 - t} \tan \theta &= 3 \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ より $\tan^2 \theta = 3$

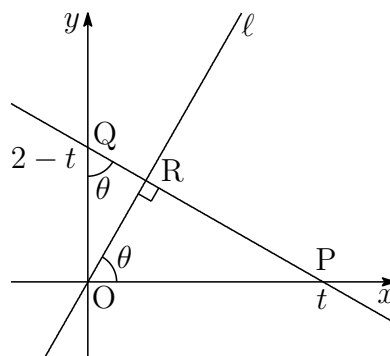
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\tan \theta > 0$ であるから

$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \text{これを満たす } \theta \text{ は } \theta = 60^\circ$$

このとき, $\frac{t}{2 - t} = \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{3}(2 - t) \\ (\sqrt{3} + 1)t &= 2\sqrt{3} \\ t &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(答) ネ. $\frac{t}{2 - t}$ ノ. $(2 - t) \cos \theta$ ハ. $3 - \sqrt{3}$ ヒ. 60



第 2 章 英語

2.1 令和 7 年度一般入学試験 (60 分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

Anticipation¹ is an important source of happiness. It increases our enjoyment of any event, whether large or small. Anticipation is the joy you feel while looking forward to a future event. You should try to enjoy this added happiness for as long as you can, because when you do so, you are, in a way, experiencing the pleasure of an event (ア) it actually happens.

For example, if you were to buy a chocolate bar and then eat it right away, you would, of course, get pleasure from the act of eating it. But if you were to wait a few hours to eat it, you would get pleasure from both eating the chocolate and from your anticipation of eating it, giving you (イ), “free” source of happiness.

When you are planning a trip, you may imagine all of the different things that could happen. (1)() According to certain studies, people who spend more time planning the details of a trip are generally happier than those who don't. It was also found that those who spend time anticipating future positive events are, by and large, happier.

Imagine that you have decided to travel to a small tropical island with some friends. You may plan where to stay, shop, sightsee², and dine out³, or (ウ) beaches to visit, what special events to attend, and what to do if the weather is bad. You could happily end up planning this trip for months ahead of time. Such careful “research” often gives us greater pleasure than just suddenly going somewhere with no planning. Once you arrive at your destination⁴, you can then (2)(). It could happen that, after the pleasure of anticipating and planning your trip in detail, the actual trip may turn out not as good for all kinds of reasons. The island itself may be crowded. There may be too much traffic. Prices may be too high. And there may even be bugs⁵, snakes, and hungry sharks waiting to “eat you alive.”

Thinking about pleasant past events is, of course, also a source of happiness. You can, with feelings of nostalgia, remember the last time you met your friends for coffee somewhere, or the time you went skiing in Aizu-Wakamatsu. We know what

happened in the past. We know what an experience was like at the time it happened. By anticipating similar events that may happen in the future, we can increase our joy and enhance⁶ our experience, giving us even greater happiness. In other words, while we can think back on the past, we are free to imagine the future in great creative detail.

Happiness is (エ) by imagining what might happen and not knowing exactly (3) what the places, conversations, foods, scenery, and so on that we will experience will be like – and how we will feel when we experience them.

(Adapted from: Jonathan Berman. *Life Topics: Changing Views*. 2023. Nan'un-do.)

(注)

- | | | | |
|-----------------|------|----------------|-------|
| 1. anticipation | 期待 | 4. destination | 目的地 |
| 2. sightsee | 観光する | 5. bug | 虫 |
| 3. dine out | 外食する | 6. enhance | 充実させる |

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|--------------------|-----------------|--------------|----------------|
| (ア) 1. after | 2. before | 3. while | 4. when |
| (イ) 1. a necessary | 2. an unplesant | 3. an extra | 4. an expected |
| (ウ) 1. which | 2. who | 3. where | 4. when |
| (エ) 1. happened | 2. come | 3. occurring | 4. created |

B. 空欄 (1) と (2) に入る最も適切な語句を次の 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1)
1. The more you planned, the happier you become.
 2. The more you plan, the happier you became.
 3. The more you planned, the happier you became.
 4. The more you plan, the happier you become.
- (2)
1. expect what you compared to what you actually find there
 2. compare what you expected to what you actually find there
 3. find what you expected to what you actually compare there
 4. change what you expected to what you actually find there

C. 下線部(3)の日本語訳として最も適切なものを1~3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 私たちが経験する場所、会話、食べ物、景色などがどんなものになるか
2. 私たちが経験する場所、会話、食べ物、景色などが好きになるかどうか
3. 私たちが経験する場所、会話、食べ物、景色などをどのように経験するか

D. 以下の文に対して、本文の内容に合うものには **T** を、合わないものには **F** を解答欄に記入しなさい。

1. 未来を思い描くことによって楽しみが増える。
2. チョコレートを買ってすぐに食べるよりも少し待って食べる方が喜びが大きい。
3. 旅行を入念に準備することで実際の旅と異なり、がっかりすることがありうる。
4. 過去のことを振り返ることはさけるべきである。

2. 次の対話 (1)～(3) を読み、ア～コの空欄に入る最も適切な答えを、枠内の 1～16 の中から 1 つずつ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を 2 度使うことはありません。

(1)

Samantha: Hello, John. How are (ア)? I haven't seen you around (イ).

John: Oh, hi, Samantha! I'm great. How have you (ウ)?

Samantha: Pretty good. But I'm so busy (エ) classes and assignments these days.

John: I know what you mean!

(2)

Fred: How are you (オ) home today?

Olivia: I (カ) I'll walk.

Fred: My dad lent me his (キ). If you like, I can give you a ride.

(3)

Emily: What do you (ク) do in your free time, Richard?

Richard: Well, I don't (ケ) much free time. But when I do, I like going for walks.

Emily: Oh, where do you go?

Richard: Well, nowhere special really. Just anywhere (コ) the neighborhood.

- | | | | |
|-------------|----------------|------------|------------|
| 1. usually | 2. doing | 3. getting | 4. at |
| 5. recently | 6. have | 7. camera | 8. guess |
| 9. not | 10. car | 11. you | 12. around |
| 13. been | 14. everywhere | 15. don't | 16. with |

3. 次の(1)～(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)～(オ)に1～8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは1～8の番号で解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

- (1) 私たちが先週観たあの映画、どう思いましたか。

(ア) did you think (イ) that movie (ウ) (エ) (オ) week?

- | | | | |
|--------|----------|---------|---------|
| 1. we | 2. how | 3. what | 4. it |
| 5. saw | 6. watch | 7. of | 8. last |

- (2) 頑張り屋で、親切な人はうまく行くことが多い。

People (ア) work (イ) and (ウ) friendly (エ) to (オ) well.

- | | | | |
|---------|--------|-------|---------|
| 1. what | 2. who | 3. is | 4. hard |
| 5. do | 6. are | 7. be | 8. tend |

- (3) 英語の語彙を多く知れば知るほど、アメリカ旅行をより楽しむことができます。

The (ア) English vocabulary you (イ), (ウ) better you will (エ) your (オ) to the U.S.

- | | | | |
|---------|----------|---------|---------|
| 1. know | 2. teach | 3. much | 4. more |
| 5. very | 6. enjoy | 7. the | 8. trip |

- (4) この辺りでどこか面白いところがありますか。

Are (ア) (イ) interesting (ウ) (エ) see around (オ)?

- | | | | |
|------------|---------|----------|-----------|
| 1. nowhere | 2. here | 3. there | 4. places |
| 5. to | 6. have | 7. any | 8. that |

- (5) 最後に髪を切ったのはいつでしたか。

(ア) (イ) (ウ) last time (エ) got (オ) hair cut?

- | | | | |
|---------|--------|-------------|--------|
| 1. did | 2. you | 3. your | 4. was |
| 5. when | 6. the | 7. recently | 8. who |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	3	1	4

B.

(1)	(2)
4	2

C. 1

D.

ア	イ	ウ	エ
T	T	T	F

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
11	5	13	16	3	8	10	1	6	12

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	7	1	5	8

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	4	6	8	5

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	1	7	6	8

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	7	4	5	2

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	4	6	2	3

2.2 令和6年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

Just because people lose their (ア) does not mean that they cannot read anymore. They just learn to read in a different way.

Blind people read by running their fingers over pages that have groups of tiny raised dots. These dots represent different letters, and they form an alphabet that is just like ours. This writing system is called braille¹.

Braille has a very interesting (イ). Its story begins around 1800, when a French soldier named Charles Barbier created a system of raised dots so that soldiers could read messages in the dark. Napoléon wanted his troops to be able to communicate in the dark without giving away their positions. In the end, this so-called “night writing” system ⁽¹⁾(). It had to be rejected by the military.

Years later, Charles Barbier met Louis Braille at the National Institute for the Blind in Paris. Louis Braille had been blind since the age of four, and he immediately recognized both the potential importance of Barbier’s system and its major flaw². Louis set to work on (ウ) it easier to use, and eventually the braille system was born.

In braille, each letter, or cell, is made of a rectangle³ in which there can be a combination of (エ) six raised dots or an absence of dots. The six dots are arranged in a grid⁴ of two dots horizontally by three dots vertically. The dots are numbered 1, 2, and 3 from top to bottom on the left column and 4, 5, and 6 from top to bottom on the right column. There can be 64 different combinations. Braille has also evolved⁵ to accommodate differences in other languages. For example, Greek braille is different from Chinese braille.

Blind people can also write in braille. Most use a special typewriter, called the Perkins Braille, ⁽²⁾(). Nowadays, computer keyboards with braille symbols are also available.

It is amazing that ⁽³⁾a military technology from the Napoleonic Wars has grown into something that has improved the lives of countless blind people around the world.

(Adapted from *Success with Reading Book 2 -Boost Your Reading Skills-*, Japanese Ed. by Ikeda, M. et al., Seibido.)

- | | | | | |
|-----|--------------|-----|----------------|---------|
| (注) | 1. braille | 点字 | 4. grid | 格子(こうし) |
| | 2. flaw | 欠点 | 5. evolve | 進化する |
| | 3. rectangle | 長方形 | 6. accommodate | ～に対応する |

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | |
|-----|--------------|--------------|---------------|-------------------|
| (ア) | 1. hand | 2. hearing | 3. sight | 4. sense of smell |
| (イ) | 1. technique | 2. history | 3. art | 4. gesture |
| (ウ) | 1. making | 2. finding | 3. looking at | 4. studying |
| (エ) | 1. more than | 2. less than | 3. down to | 4. up to |

B. 空欄 (1) と (2) に入る最も適切な語句を次の 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1)
1. was for soldiers to learn too complicated
 2. was too complicated soldiers to learn for
 3. was to learn too complicated for soldiers
 4. was too complicated for soldiers to learn
- (2)
1. which braille types onto paper
 2. which types braille onto paper
 3. which paper types onto braille
 4. which types paper onto braille

C. 下線部(3)の日本語訳として最も適切なものを1~3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ナポレオン戦争の軍事技術を改良することによって、世界中の無数の目の不自由な人々の生活が大幅に変わった。
2. ナポレオン戦争の軍事技術だったものが、世界中の無数の目の不自由な人々の生活を改善するものになった。
3. ナポレオン戦争の軍事技術のおかげで、世界中の無数の目の不自由な人々は軍の活動に参加できるようになった。

D. 以下の1~4の中から本文の内容に合うものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ナポレオンは自分の軍隊に、暗い境遇においても光をもたらせたかった。
2. Charles Barbier は4歳のころから目が不自由であった。
3. 点字は2列と3行の点から構成されている。
4. Braille は点字のアイデアを知った時に、手放しで喜んだ。

2. 次の対話 (1)～(3) を読み、ア～コの空欄に入る最も適切な答えを、枠内の 1～16 の中から 1 つずつ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を 2 度使うことはありません。

(1)

Jason: Hi there, Fred, how's it (ア) ?

Fred: Pretty (イ). But I've (ウ) really busy these days.

Jason: Oh, really? Why?

Fred: Well, Mom's starting up a new business, and I'm helping her (エ).

(2)

Sam: How did you (オ) the winter vacation, Kelly?

Kelly: I went to my grandparents' (カ) for a few days.

Sam: That (キ) nice.

(3)

Rita: Oliver, how do you (ク) spend your free time?

Oliver: Well, I really like (ケ) karate.

Rita: Don't you worry about (コ) hurt?

Oliver: No, not really. I'm pretty careful.

- | | | | |
|-------------|------------|----------|-----------|
| 1. place | 2. being | 3. play | 4. been |
| 5. clear | 6. usually | 7. going | 8. doing |
| 9. well | 10. sounds | 11. so | 12. spend |
| 13. getting | 14. since | 15. out | 16. usual |

3. 次の(1)～(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)～(オ)に1～8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは1～8の番号で解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

- (1) 私は事務所を出る時は必ず携帯電話を持って行く。

I (ア) leave (イ) office (ウ) (エ) my cell phone (オ) me.

- | | | | |
|----------|-------------|------------|-----------|
| 1. me | 2. carrying | 3. without | 4. the |
| 5. never | 6. with | 7. take | 8. always |

- (2) 私たちが着くころには、試合はすでに始まっていた。

(ア) (イ) time we (ウ), the match (エ) (オ) started.

- | | | | |
|------------|--------|--------|------------|
| 1. had | 2. by | 3. it | 4. yet |
| 5. already | 6. you | 7. the | 8. arrived |

- (3) 私は昨夜の外食で手持ちのお金を完全に使い果たしてしまった。

I've totally (ア) (イ) of (ウ) because (エ) (オ) night's dinner.

- | | | | |
|--------|-------|--------|----------|
| 1. out | 2. my | 3. run | 4. last |
| 5. use | 6. of | 7. due | 8. money |

- (4) 雨が止むまで家の中で待っていてください。

(ア) wait (イ) the house (ウ) (エ) (オ) raining.

- | | | | |
|---------|-----------|----------|------------|
| 1. by | 2. inside | 3. it | 4. until |
| 5. said | 6. please | 7. stops | 8. stopped |

- (5) 私はネットで飛行機とホテルの予約をすることが簡単と分かった。

I (ア) (イ) easy (ウ) make (エ) flight and hotel reservations (オ).

- | | | | |
|----------|---------|-----------|-----------|
| 1. found | 2. book | 3. simple | 4. to |
| 5. my | 6. it | 7. made | 8. online |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
3	2	1	4

B.

(1)	(2)
4	2

C. 2

D. 3

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
7	9	4	15	12	1	10	6	8	13

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	4	3	2	6

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	7	8	1	5

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	1	8	6	4

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	2	4	3	7

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	6	4	5	8

2.3 令和5年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

London, one of the world's great cities, has many (ア). One is its ability to grow and change with the times. Over the centuries, the city has faced many challenges, yet it has met them all head on¹. Along the way, England's capital has developed into one of the world's most diverse² cities. It is home to people from many cultures, adding to the city's rich heritage³.

The Romans first developed the area 2,000 years ago, founding a town which they called Londinium. In the 11th century, the city, (イ) name had been shortened to London, became England's capital. Over the centuries, new leaders added their own touches. Some built great churches. Others built grand palaces. Sites like the Tower of London, Westminster Abbey, and Buckingham Palace became of the city's identity.

However, London's history is not only one of progress. The city has gone through terrible (ウ). In the 14th century, one-third of the population died from a horrible disease — the Black Death. In 1666, 80% of the city burned down during the Great Fire of London. Then, during the early years of World War II, (1)() German bombers⁴. Yet time after time, the city has stood tall and rebuilt itself.

London is now a (エ) cultural center. There are many top museums, including the National Gallery and the British Museum. The performing arts are also alive and well, with concerts and plays to suit every culture lover's taste. For more casual entertainment, people can dance to their heart's content at night clubs. Sports lovers also (2)(), such as Wimbledon, a major tennis event held every year. Plus, don't forget the dining scene. Six thousand restaurant serve food from more than 70 countries.

A great way to get a feeling for this amazing city is by taking a ride on the London Eye. Thirty-minute trips carry people 500 feet into the air, offering excellent views. You can also see the sights on a "double decker" bus⁵. Or, to travel quickly from A to B, you can ride the Tube, London's subway system. Its 535 trains carry around 3.5 million riders a day.

London's 8.3 million residents come together to for the heart and soul of the city. They include people from many cultures and world regions, such as Asia, Africa, and the Caribbean. In festivals like the Notting Hill Carnival, they celebrate their diverse backgrounds. Generation after generation, (3)every Londoner adds the spirit of the ever-changing city.

(Adapted from *Reading Pass 3, 2nd Ed.* by Andrew E. Bennett, Nan'Un-Do.)

- (注) 1. head on (真正面から)
2. diverse (多様な)
3. heritage (文化的遺産, 伝統)
4. German bombers (ドイツの爆撃機)
5. “double decker” bus (2階建てバス)

A. 空所(ア)～(エ)に入る最も適切な語を1～4の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- (ア) 1. weaknesses 2. strengths 3. varieties 4. problems
(イ) 1. which 2. when 3. where 4. whose
(ウ) 1. crises 2. opportunities 3. places 4. sicknesses
(エ) 1. concerning 2. learning 3. leading 4. standing

B. 空欄(1)と(2)に入る最も適切な語句を次の1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. much of the city destroyed
2. much of the city had destroyed
3. much of the city was destroyed by
4. much of the city were destroyed by
(2) 1. choose to have a lot from
2. have a lot to choose from
3. have a lot from to choose
4. choose a lot to have from

C. 下線部(3)の日本語訳として最も適切なものを1~3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ロンドン市民一人一人が、以前は変化していたロンドン特有の気質に貢献している。
2. ロンドン市民一人一人が、絶えず変化するロンドン特有の気質に貢献している。
3. ロンドン市民一人一人が、絶えず変化するロンドン特有の宗教活動に貢献している。

D. 以下の1~4の中から本文の内容に合うものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 「ロンドン」という名称は11世紀から使われ始めた。
2. ローマ人は2,000年前にロンドンをEnglandの首都とした。
3. ロンドンで速く移動するのに2階建てバスが便利である。
4. ロンドンに830万人の人が毎日通勤している。

2. 次の対話(1)~(3)を読み、(ア)~(コ)の空欄に入る最も適切な答えを1~16の中から1つずつ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を2度使うことはありません。

(1)

Sally: Hi, Doug, what's up?

Doug: Oh, hi, Sally. Nothing special, really. How's (ア)?

Sally: Not bad. Do you have any plans for the New Year (イ)?

Doug: I think I'll (ウ) go back home to see my parents.

(2)

Dan: Hey, Meg, what do you think of the new anime movie at the movie theater?

Meg: Oh, I haven't seen it yet. Actually, I'm not a (エ) anime fan. Maybe I'll just watch it on my tablet when it becomes (オ).

Dan: Really? What kinds of movies do you like, then?

Meg: Well, as a matter of fact, I'm not that keen on movies. I (カ) reading.

(3)

Sean: Hi, Lisa, have you ever (キ) abroad?

Lisa: Well, my dad's job (ク) him to several countries when I was little, so I've lived in Sri Lanka, Greece, and Switzerland. How about you?

Sean: I've never been (ク). But I've saved up some money to travel in the vacation, so I was (コ) if you had any advice about where to go?

- | | | | |
|-------------|--------------|----------------|-----------|
| 1. big | 2. prefer | 3. been | 4. break |
| 5. anywhere | 6. wondering | 7. enormous | 8. travel |
| 9. obtain | 10. ask | 11. available | 12. want |
| 13. took | 14. made | 15. everything | 16. just |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは1~8の番号で解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

- (1) この辺で、髪を切ってもらえるところがあるかわかりますか。

Do you know (ア) there is (イ) around (ウ)(エ) I can get (オ) haircut?

- | | | | |
|-------------|---------|---------|----------|
| 1. anywhere | 2. here | 3. a | 4. where |
| 5. because | 6. the | 7. it's | 8. if |

- (2) 先日あなたを遠くから見かけた時、お兄さんと間違ってしまった。

I mistook (ア)(イ) your brother when I saw you (ウ) a (エ) the (オ) day.

- | | | | |
|----------|-------------|---------|-------------|
| 1. other | 2. far | 3. from | 4. previous |
| 5. you | 6. distance | 7. for | 8. wrong |

- (3) 私立図書館へ行く最も早い方法を教えてくださいませんか。

(ア) you (イ) me (ウ)(エ) way to the (オ) library, please?

- | | | | |
|-------------|---------|---------|----------|
| 1. cities | 2. the | 3. most | 4. could |
| 5. quickest | 6. tell | 7. a | 8. city |

- (4) 家に着いた途端、電話が鳴った。

(ア)(イ) had (ウ) got back (エ) the phone (オ).

- | | | | |
|-----------|-----------|-------|---------|
| 1. than | 2. soon | 3. no | 4. I |
| 5. sooner | 6. ringed | 7. as | 8. rang |

- (5) 映画が始まっていたにも関わらず、その男は友達に喋り続けた。

The man (ア)(イ), to his friend (ウ)(エ) the movie had (オ).

- | | | | |
|---------------|------------|----------|-------------|
| 1. beginning | 2. talking | 3. begun | 4. through |
| 5. continuing | 6. even | 7. kept | 8. although |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	4	1	3

B.

(1)	(2)
3	2

C. 2

D. 1

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
15	4	16	1	11	2	3	13	5	6

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	1	2	4	3

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	7	3	6	1

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	6	2	5	8

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	5	4	1	8

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	2	6	4	3

2.4 令和4年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

People use more than just (ア) to communicate. In fact, some researchers claim that less than half of a spoken message's real meaning is in the words used in the message. They say that most of a message's meaning comes from understanding how the speaker uses things like tone of voice and body language.

Body language includes such things as the expression on the speaker's face, gestures the speaker makes with his or her hands, and the position of the speaker's body. Just as there are many different languages spoken around the world, ⁽¹⁾() for people to use body language, too. For example, gestures may imply different meanings in different cultures. Making a "thumbs up" sign in America means "Great!" However, in Arab cultures, this gesture is extremely offensive. And in India, if listeners want to show speakers that they understand, the listeners will move their heads from side to side. In many Western countries, a similar gesture means "(イ)."

(ウ) many gestures can be interpreted differently by different cultures, there are also many gestures that are almost universally interpreted the same way. For example, by and large a smile is understood as a sign of friendship or good will around the world. Also, using an open hand to gesture toward something is viewed as polite or friendly in most cultures.

There are also some forms of body language that can be universally read with the meaning, "I am interested in you" or "I like you." Sometimes this kind of body language is used unconsciously between two people. These signs of interest include standing or sitting with both feet flat on the ground, mirroring or using the same gestures as the other person, and turning one's body to fully face the other person. In addition, a person's pupil¹ will automatically become wider when they are interested in another person.

Body language that can be read with the meaning, ⁽²⁾"()" or "I don't like you," may include the following gestures: looking down or looking in another direction, leaning away from a person, crossing one's arms or legs, or tapping a foot or finger.

Body language experts point out one important thing. ⁽³⁾The person's culture is only one factor that can influence his or her use of body language. The time and place (エ) the body language is being used can have a lot to do with a person's body language. If the person has had a bad day or if a meeting takes place in a crowded place, the body language a person uses may be very different than under other circumstances.

Adapted from *Reading Advantage 3, 2nd Ed.* by Casey Malarcher, Thomson & Heinle.

(注) 1. pupil (瞳・ひとみ)

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | |
|-----|-----------------|---------------|-------------|-------------|
| (ア) | 1. gestures | 2. friendship | 3. words | 4. cultures |
| (イ) | 1. yes | 2. no | 3. not sure | 4. good |
| (ウ) | 1. Nevertheless | 2. Unless | 3. Because | 4. Although |
| (エ) | 1. where | 2. which | 3. whose | 4. whether |

B. 空欄 (1) と (2) に入る最も適切な語句あるいは文章を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1)
1. there is few different ways
 2. there is a few similar ways
 3. there are many different ways
 4. there are many similar ways
- (2)
1. I am shy around you
 2. I am not interested in you
 3. I am worried about you
 4. I am sad about you

C. 下線部 (3) の日本語訳として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 文化はボディランゲージ (身振り言語) の使用に影響する一番の要因である。
2. 文化はボディランゲージ (身振り言語) の使用に影響する唯一の要因である。
3. 文化はボディランゲージ (身振り言語) の使用に影響する一つの要因に過ぎない。

D. 以下の1~4の中から本文の内容に合うものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 親指を立てる仕草(しぐさ)はインドでは大変失礼に当たる。
2. 足や手を組むことは、その人に興味があることを示す。
3. ボディーランゲージには声の抑揚(よくよう)も含まれる。
4. 首を横に振ることで、理解していることを示す国がある。

2. 次の対話(1)~(3)を読み、ア~コの空欄に入る最も適切な答えを1~16の中から1つずつ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を2度使うことはありません。

(1)

Kathy: Hello, is that Peter? I haven't seen you for (ア).

Peter: Kathy? Wow, it has been a long time. How have you (イ)

Kathy: Great. How about you?

Peter: I'm good, too. I changed (ウ) last year. I work at a bank in New York now.

(2)

Jack: Hey, Annette, have you seen the new action movie?

Annette: No, (エ) yes. I've been so busy. Have you?

Jack: Yes, I (オ) on the first day. It's amazing. You really should see it.

Annette: It's been showing for three weeks (カ). So I guess I should hurry.

(3)

John: Hi, Helen, how are your exams going?

Helen: Not (キ), thanks, John. How about you?

John: They're going terribly, to be honest. I guess I'm not really very well (ク)

Helen: Well, we have two days (ケ) the next one. Shall we study together?

John: Oh, that (コ) be nice. Thank you.

- | | | | |
|-----------|-----------|--------------|-------------|
| 1. not | 2. going | 3. before | 4. ages |
| 5. bad | 6. never | 7. went | 8. gone |
| 9. longer | 10. jobs | 11. prepared | 12. better |
| 13. been | 14. would | 15. working | 16. already |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは1~8の番号で解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

(1) 彼はいつの自分の功績について自身話をしていて、一緒に話すのに疲れた。
I'm (ア) of (イ) to him because (ウ)(エ) about his (オ) achievements.

- | | | | |
|-------------|------------|----------|----------|
| 1. boring | 2. talking | 3. tired | 4. speak |
| 5. boasting | 6. always | 7. own | 8. keeps |

(2) 英語を上手に話すには、たくさんの語彙を知る必要があることは言うまでもない。

It goes (ア)(イ) that to speak English well we need (ウ) know (エ) lot (オ) vocabulary.

- | | | | |
|-------|------------|------------|-----------|
| 1. to | 2. without | 3. many | 4. saying |
| 5. of | 6. into | 7. mention | 8. a |

(3) 私は毎日少なくとも5km ジョギングをするようにしている。

I (ア) a (イ)(ウ) jogging (エ) least five kilometers (オ) day.

- | | | | |
|----------|----------|----------|---------|
| 1. point | 2. daily | 3. every | 4. that |
| 5. at | 6. of | 7. for | 8. make |

(4) あなたは、正午までにここに着いて、図書館が閉まるまで残らないといけない。

You (ア) to (イ) here (ウ) noon and stay (エ) the library (オ).

- | | | | |
|---------|----------|----------|-----------|
| 1. need | 2. until | 3. must | 4. closes |
| 5. go | 6. get | 7. while | 8. by |

(5) 田舎に引っ越した当初は嫌いだったが、しばらくしたら好きになった。

When I (ア) moved to the countryside I hated (イ), but after (ウ) time I (エ)(オ) like it.

- | | | | |
|----------|---------|----------|-----------|
| 1. it | 2. to | 3. some | 4. while |
| 5. found | 6. came | 7. first | 8. become |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
3	2	4	1

B.

(1)	(2)
3	2

C. 3

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	13	10	1	7	16	5	11	3	14

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	2	8	5	7

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	4	1	8	5

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	1	6	5	3

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	6	8	2	4

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	1	3	6	2

2.5 令和3年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

About 2,800 years ago in Olympia, Ancient Greece, there was a race in a field near the river Alpheus. The athletes ran about 200 metres¹, and a man called Coroebus, from the Greek city of Elis, won. A crowd of 40,000 people shouted his name and gave him flowers. Coroebus was one of the first Olympic champions.

There are many stories about how the Olympic Games started, and we do not know ⁽¹⁾(). But we know that the Ancient Greeks loved sport and went to many sports competitions. In or before 776 BCE², the Olympic Games began at Olympia, and happened every four years after that.

They were the biggest and most important of (ア) the Greek competitions, and the kings of Ancient Greece went to Olympia to watch them. The athletes came from many cities in modern Greece, Italy, Turkey, and Africa, and later from cities in Armenia, Egypt, and Spain. At that time, there were many wars in Greece, but because athletes needed to travel to Olympia for the Games, everyone stopped (イ) for a month before they started.

The earliest Olympic Games were only one day long, and were built around ceremonies for Zeus — the most important Greek god. There was only one sports event — a race of about 200 metres called the *stade*.

(ウ), the Olympic Games were three, and then five, days long. There were new races, like the *diaulos* (about 400 metres) and the *dolichos* (1,400 metres or more). By 648 BCE, you could watch fighting, horse- and chariot-racing, jumping, and the throwing events at the Games. There was even a shouting event — the winner was the person with loudest voice!

Perhaps the most difficult ancient Olympic sport was the *pankration*. *Pankration* athletes had to be very strong. ⁽²⁾They could not use their teeth or put their fingers in someone's eyes, but they could fight with their hands and feet, and in any other way. Because of this, the *pankration* was very dangerous, and athletes sometimes died in these fights.

At these early Olympics, ⁽³⁾(), and champions wore these on their heads at the winners' ceremony. Ancient Olympic champions did not win medals, like today's winners, but they often became famous in their home cities, and people gave them presents like money or houses. One of the (エ) ancient champions was Leonidas of Rhodes. He won all the foot races at four Olympic Games!

Adapted from *The Olympic Games* by Alex Raynham, Oxford University Press

(注) 1. metres (=meters, メートル) 2. BCE (紀元前)

A. 空所(ア)～(エ)に入る最も適切な語を1～4の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | |
|-----|-------------|-------------|--------------|------------|
| (ア) | 1. every | 2. whole | 3. most | 4. all |
| (イ) | 1. racing | 2. fighting | 3. traveling | 4. playing |
| (ウ) | 1. Earlier | 2. However | 3. Later | 4. Now |
| (エ) | 1. greatest | 2. earliest | 3. youngest | 4. fast |

B. 空欄(1)と(3)に入る最も適切な語句あるいは文章を1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. which true are ones
2. which ones are true
3. which are ones true
4. the true ones are
- (2) 1. olive branches were given athletes winning
2. winning olive branches were given athletes
3. winning athletes were given olive branches
4. athletes were winning olive branches given

C. 下線部(2)の日本語訳として最も適切なものを1～3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 歯を使うことや指を相手の目に入れることはできなかったが、手や足を使うなど他のどんな方法でも戦うことができた。
2. 歯を使うこと、指を相手の目に入れることのどちらかはできなかったが、手や足を使うなど他のどんな方法でも戦うことができた。
3. 歯を使うことや指を相手の目に入れることはできなかったし、手や足を使うこと以外、他のどんな方法でも戦うことはできなかった。

D. 以下の1~4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. Pankration は長い距離を走り、命を落とす者も出る危険な競技であった。
2. 最初のオリンピックは5日間開催された。
3. 古代のオリンピックでは大声を上げる競技があった。
4. 古代のオリンピックの優勝者はお金や馬を贈られることがあった。

2. 次の対話(1)~(3)を読み、ア~コの空欄に入る最も適切な答えを1~16の中から1つずつ選び、その番号を選びなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を2度使うことはありません。

(1)

Irene: Hey, Caroline, are you OK? You (ア) rather pale.

Caroline: Yes, thanks, I'm feeling better now.

Irene: What do you mean? What was (イ) with you?

Caroline: Oh, I thought you (ウ). I had a fever for a few days.

(2)

David: Simon, have you (エ) about the accident?

Simon: What do you mean? What's (オ) on?

David: Two cars have crashed. An ambulance is on (カ) way.

Simon: Oh, no! I hope everyone will be all right.

(3)

Graham: Hi, Vincent, how have you been recently? I haven't seen you for a (キ).

Vincent: Pretty good, thanks, Graham. I've just been really busy (ク).

Graham: Oh, I see. That's good, I guess. I know you're busy, but do you want to go for a picnic on Saturday? A (ケ) from your studies might be good for you.

Vincent: Why not? Sure, that (コ) fun.

- | | | | |
|-----------|------------|-----------|---------------|
| 1. sounds | 2. wrong | 3. heard | 4. knew |
| 5. going | 6. hurt | 7. its | 8. studying |
| 9. study | 10. months | 11. break | 12. happening |
| 13. it's | 14. while | 15. look | 16. know |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは1~8の番号で解答欄に記入しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

- (1) 期限までに課題を終わらせたければ、今すぐ始めた方がよい。

You (ア) (イ) get started right (ウ) if you want (エ) (オ) the assignment before the deadline.

- | | | | |
|--------------|-----------|--------------|----------|
| 1. immediate | 2. to | 3. finishing | 4. had |
| 5. away | 6. finish | 7. better | 8. hurry |

- (2) この時計は祖父から貰ったものです。

This watch (ア) (イ) (ウ) me (エ) (オ) grandfather.

- | | | | |
|---------|--------|---------|-------------|
| 1. gave | 2. by | 3. gift | 4. given |
| 5. to | 6. was | 7. my | 8. received |

- (3) 英語は、世界中で最も広く話されている言語であると言われている。

English (ア) (イ) (ウ) be the language (エ) is (オ) most widely in the world.

- | | | | |
|---------|-----------|-------------|---------|
| 1. to | 2. say | 3. is | 4. that |
| 5. said | 6. spoken | 7. everyone | 8. they |

- (4) 先週あなたに貸したお金はいつ返してくれるの。

When (ア) you going to (イ) (ウ) the money (エ) (オ) you last week?

- | | | | |
|--------|-----------|---------|---------|
| 1. I | 2. borrow | 3. will | 4. pay |
| 5. are | 6. back | 7. lent | 8. from |

- (5) 彼はとても頑張ったが、残念ながら最初は成功しなかった。

(ア) he tried very (イ), unfortunately he (ウ) (エ) at (オ) first try.

- | | | | |
|-----------|------------|---------|-----------------|
| 1. was | 2. however | 3. not | 4. unsuccessful |
| 5. hardly | 6. his | 7. hard | 8. although |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
4	2	3	1

B.

(1)	(2)
2	3

C. 1

D. 3

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
15	2	4	3	5	7	14	8	11	1

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	7	5	2	6

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	4	5	2	7

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	5	1	4	6

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	4	6	1	7

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	7	1	4	6

2.6 令和2年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

It looks like a scooter, but it travels 15 miles per hour (24 kilometers per hour). It uses two batteries¹ and only ten cents of electricity a day. It can go backwards and forwards, and it never falls over. It does not have brakes, but it knows when to stop (ア) is it? It is a “Segway,” and Dean Kamen invented it. It costs \$8,000.

Right now, only a few people use the Segway scooter. This electric scooter is very easy to use, and it can go in (イ) direction. You can control it with your body. For example, when you move to the left, the scooter moves to the left. When you tilt² forward, it goes straight ahead. In some states in the United States, such as New Hampshire and Florida, post office workers use Segways to deliver the mail. The scooters help the workers do their work more easily. In some cities, such as Boston and Atlanta, police officers use them to travel on crowded streets.

Dean Kamen believes that many other people will soon ride Segways. The scooters weigh about 65 pounds (about 29½ kilograms). They are cheaper than cars, and they are faster than walking. Cars are useful for long distances. But for short distances, electric scooters can be very useful. They are good for the environment, too. They only use (ウ) electricity and do not cause air pollution like cars do. Dean Kamen believes that our lives will be a little easier with his invention.

(エ) he invented the Segway, Dean Kamen worked on medical projects. When his brother was in medical school, he needed an easier way to give medicine to some patients. Dean’s brother discussed this problem with him. Dean invented a special machine so that (1)(). Doctors can give them medicine through their skin. Now, many doctors and hospitals use this machine.

In addition to the Segway, Dean Kamen has invented another device to make life easier. It is a new kind of wheelchair³ to help people who cannot walk. This wheelchair can climb curbs. It can “walk” up stairs, too. It can travel over rocks and sand. This new wheelchair can even raise itself up so that the person in this wheelchair can reach (2)(). It can go up to the height of a standing person.

(3) Dean Kamen wants to help as many people as possible with his inventions, and wants to encourage other people to invent useful devices, too.

M. Yamashina, M. Yokoyama, Y. Okino. (2014). Skills for Academic Success: Reading Access. Cengage Learning. p.106

(注) 1. battery (電池) 2. tilt (体を傾ける) 3. wheelchair (車いす)

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | |
|-----|-----------|------------|-------------|------------|
| (ア) | 1. When | 2. What | 3. Where | 4. Who |
| (イ) | 1. some | 2. almost | 3. all | 4. any |
| (ウ) | 1. a few | 2. less | 3. a little | 4. few |
| (エ) | 1. Before | 2. Because | 3. Despite | 4. However |

B. 空欄 (1) と (2) に入る最も適切な語句あるいは文章を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1)
1. patients do not have to see a doctor
 2. patients do not have to buy medicine
 3. patients do not have to take medicine by mouth
 4. patients do not have to go to a hospital
- (2)
1. the roof of the house
 2. something on a high shelf
 3. something on a floor
 4. something on a chair

C. 下線部 (3) の日本語訳として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ディーン・ケーメンは発明を通してできるだけ多くの人を助け、また、他の人たちも便利な道具を活用することを励ましたいと思っている。
2. ディーン・ケーメンはできるだけ多くの人々の発明を助け、また、他の人たちも同様に便利な道具を発明することを励ましたいと思っている。
3. ディーン・ケーメンは発明を通してできるだけ多くの人を助け、また、他の人たちにも便利な道具を発明することを励ましたいと思っている。

D. 以下の1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. セグウェイは階段を上ることができる。
2. フロリダではセグウェイを警官が使用している。
3. ディーン・ケーメンは薬の新しい投与方法を発明した。
4. ディーン・ケーメンの兄弟は病院に入院していた。

2. 次の対話(1)～(3)を読み、ア～コの空欄に入る最も適切な答えを1～16の中から1つずつ選び、その番号を選びなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。同じ語を2度使うことはありません。

(1)

Sam: Hi, Elena. I haven't seen you (ア) ages. Where have you (イ)?

Elena: Oh, didn't you know? I was in the U.S. for a month.

Sam: Oh, really? That (ウ) great. What did you do there?

Elena: I (エ) part in a special study camp.

(2)

Dave: How did you (オ) yesterday evening?

Liz: Well, I was doing my homework (カ) my brother was playing video games. He was so noisy.

Dave: Oh, I didn't (キ) you had a brother!

(3)

Lily: Steve, do you live with your family?

Steve: No. I have lived (ク) myself (ケ) entering college.

Lily: Isn't that difficult?

Steve: No, it's (コ) bad. But the apartment is rather small.

- | | | | |
|----------|------------|-----------|-------------|
| 1. from | 2. during | 3. with | 4. take |
| 5. for | 6. noticed | 7. too | 8. spend |
| 9. not | 10. by | 11. been | 12. sounds |
| 13. took | 14. since | 15. while | 16. realize |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。なお、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。

(1) 課題を完成するのに5時間かった。

(ア) (イ) (ウ) five hours (エ) finish (オ) assignment.

- | | | | |
|---------|-------|----------|--------|
| 1. me | 2. I | 3. the | 4. it |
| 5. took | 6. to | 7. spent | 8. for |

(2) 君は京都での週末を楽しんだようだ。

(ア) (イ) to (ウ) enjoyed (エ) weekend (オ) Kyoto.

- | | | | |
|----------|---------|-------|---------|
| 1. seems | 2. your | 3. it | 4. seem |
| 5. have | 6. you | 7. be | 8. in |

(3) 先月は、高校の友達と一緒に東京に行ってきた。

I went (ア) Tokyo with some (イ) (ウ) (エ) (オ) high school last month.

- | | | | |
|----------|---------|-------|------------|
| 1. visit | 2. too | 3. to | 4. friends |
| 5. of | 6. from | 7. at | 8. mine |

(4) 先生が生徒たちを書くのを直ぐ止めるように言った。

The teacher (ア) (イ) students (ウ) (エ) writing (オ) away.

- | | | | |
|---------|----------|--------------|---------|
| 1. the | 2. right | 3. will | 4. to |
| 5. said | 6. stop | 7. immediate | 8. told |

(5) 熊本城は、熊本の最も人気のある観光スポットの一つである。

Kumamoto Castle is (ア) (イ) (ウ) most popular sightseeing (エ) (オ) kumamoto.

- | | | | |
|--------|---------|-------|----------|
| 1. a | 2. spot | 3. so | 4. the |
| 5. one | 6. of | 7. in | 8. spots |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	4	3	1

B.

(1)	(2)
3	2

C. 3

D. 3

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	11	12	13	8	15	16	10	14	9

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	5	1	6	3

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	4	5	2	8

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	4	5	8	6

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	1	4	6	2

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	6	4	8	7

2.7 平成31年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

People from different cultures have different ways of doing things. For example, in some parts of the world, people read the date 2/1/2005 as the second of January in 2005. They put the day before the month. In other parts of the world, people read this date as February 1, 2005. They put (1) ().

A simple (ア) can also have a different meaning from one culture to another. The thumbs-up sign means “yes” in Europe and the United States. However, in Greece and Turkey, it means “no.” To point a finger at someone is okay in Canada, but it’s rude¹ in Japan.

For businesspeople, differences like this can cause serious misunderstandings. These misunderstandings can destroy business relationships. To (イ) this, many businesspeople attend classes to learn about other cultures. They study the customs of other countries. Here are a few things they learn.

Greeting clients² correctly is important in the business world. However, customs for greeting people vary from one culture to another. North American men and women often shake hands when they meet. In Japan, people often bow. (2) People from Thailand put their hands together as if praying and then bow the head. In some Arab countries, men don’t shake hands with women from outside the family.

Entertaining is important in the business world. It’s often necessary to invite a client to lunch or dinner. However, customs about eating also vary from culture to culture. Some people don’t eat meat; others don’t drink alcohol. In the West, people eat with knives and forks; in the East, they eat with chopsticks. In some cultures, it’s okay to discuss business while eating. In (ウ) cultures, talking about business during a meal is rude. Businesspeople need to know about these differences.

Sometimes businesspeople visit the homes of their clients. In most countries, it’s the custom to take a small gift. But (3) ()? Again, the customs vary. For example, in England, giving a knife is bad luck. In some countries, it’s rude to give white flowers or a watch or clock. Another difficulty is how much money to spend on a gift. If you spend only a little money, you might appear stingy³. If you spend too much, the gift might look like a bribe⁴. In Malaysia and many other countries, there are laws against bribery.

Doing business with people from different cultures is (エ) fascinating and challenging. Many businesspeople try to learn about other cultures. They do their best to avoid cultural misunderstandings.

(Patricia Ackert & Linda Lee. 2005. *Reading & Vocabulary Development 2: Thoughts & Notions*. 2nd ed. Thomson Heinle.)

(注) 1. rude (無礼な) 2. client (顧客) 3. stingy (けちな) 4. bribe (わいろ)

A. 空所 (ア)~(エ) に入る最も適切な語を 1~4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

(ア) 1. greeting 2. gesture 3. business 4. custom

(イ) 1. discuss 2. study 3. avoid 4. take

(ウ) 1. other 2. another 3. their 4. few

(エ) 1. however 2. again 3. while 4. both

B. 下線部 (2) の日本語訳として最も適切なものを 1~3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. タイの人々はお互いの手を取り合い祈り、お辞儀する。

2. タイの人々は祈るように自分の手を合わせて、お辞儀する。

3. タイの人々は手を合わせて祈り、お辞儀する。

C. 空欄 (1) と (3) に入る最も適切な語句あるいは文章を 1~4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. the day before the month
2. the month before the day
3. the year before the month
4. the year before the day

- (3) 1. when do you give
2. where do you buy
3. what do you take
4. who do you go with

D. 以下の1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ビジネスにおいて顧客の自宅を訪問することはしない。
2. 人に向かって指を指すことはカナダでは無礼にあたる。
3. 顧客を昼食や夕食に招くことは賄賂(わいろ)と受け取られることがある。
4. 親指を立てるしぐさはギリシャでは「いいえ」を意味する。

2. 次の対話(1)～(3)を読み、ア～コの空欄に入る最も適切な答えを1～16の中から1つずつ選び、その番号を選びなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。同じ語を2度使うことはありません。

(1)

John: What's going (ア)?

Emily: Oh, I'm just checking the weather forecast. I heard a storm was on its (イ).

John: Oh, really? Are we going to have to close the company tomorrow?

Emily: No, I don't think so. It's turning (ウ) from us.

(2)

George: What are you (エ) to do in the spring vacation?

Helen: Well, nothing (オ), really. How about you?

George: I'm not sure yet but I'm thinking of going (カ) with my family.

(3)

Meg: Could you (キ) me a thousand yen?

Ben: What do you need it (ク)?

Meg: I forgot to bring my (ケ) and I need to do some shopping for dinner.

Ben: Ok, but don't forget to pay me (コ) tomorrow.

- | | | | |
|-------------|--------------|------------|------------|
| 1. road | 2. back | 3. on | 4. when |
| 5. planning | 6. much | 7. borrow | 8. camping |
| 9. for | 10. lend | 11. rent | 12. away |
| 13. way | 14. supposed | 15. wallet | 16. having |

3. 次の (1)~(5) の日本文に当てはまるように、空欄 (ア)~(オ) に 1~8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。

- (1) 彼は一体何をしようとしているのか、私にはさっぱり分からない。

I have (ア) (イ) what (ウ) earth (エ) is (オ) to do.

- | | | | |
|------------|---------|-----------|---------|
| 1. attempt | 2. on | 3. why | 4. well |
| 5. he | 6. idea | 7. trying | 8. no |

- (2) 熊本はその素晴らしい景色で最も知られている。

Kumamoto is (ア) (イ) (ウ) (エ) wonderful (オ).

- | | | | |
|-----------|---------|------------|----------|
| 1. know | 2. best | 3. by | 4. for |
| 5. famous | 6. its | 7. scenery | 8. known |

- (3) あまり勉強しなかったので、私は試験がちょっと心配だ。

I (ア) a (イ) (ウ) (エ) the exam because I did not study (オ).

- | | | | |
|----------|------------|-------------|------------|
| 1. about | 2. bit | 3. worrying | 4. worried |
| 5. am | 6. anxiety | 7. on | 8. much |

- (4) 私たちは性格が随分違うけど、仲よくしている。

(ア) get (イ) well (ウ) (エ) our personalities (オ) very different.

- | | | | |
|-------------|------------|----------|-----------|
| 1. even | 2. despite | 3. along | 4. we |
| 5. although | 6. are | 7. is | 8. though |

- (5) 以前はバイトがあったが、あまりにも忙しくて辞めた。

I (ア) (イ) have a part-time job, but I (ウ) (エ) I was (オ) busy.

- | | | | |
|------------|-----------|---------|---------|
| 1. revised | 2. had | 3. so | 4. quit |
| 5. because | 6. before | 7. used | 8. to |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	3	1	4

B. 2

C.

(1)	(3)
2	3

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	13	12	5	6	8	10	9	15	2

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	6	2	5	7

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	8	4	6	7

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	2	4	1	8

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	3	1	8	6

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	8	4	5	3

2.8 平成30年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

Seattle is a city (ア) the sea. There are lots of boats in Seattle. Some of the boats are fishing boats. Some boats go to faraway places. Some boats go to the San Juan Islands nearby.

Anthony Brewer lived in Seattle. He was 16 years old, and he wanted to go away. It was the end of the school year, and it was hot. Anthony's friends were on the San Juan Islands. He wanted to go there, too.

One morning, Anthony had an idea. He didn't tell his parents about his idea. They were at work. He went down to the boats. He couldn't buy a ticket to the San Juan Islands. He didn't have very much money. He walked by the boats. Which one went to the San Juan Islands? (1) He didn't want to ask because he didn't want people to see him.

Then he saw a sign on a boat. It said, "San Juan." Anthony looked around. He didn't see any people, so he got on the boat. There were some large boxes on the boat. He got into a box and closed it. After a few minutes, he heard some men on the boat. Soon the boat started to move. Through some holes in the boxes, Anthony could look out. He saw the buildings of Seattle, and then he saw only the sea.

Anthony was happy to be on the boat. It moved up and down a little. He was comfortable in the box, and it was a warm day. Soon he was (イ).

When he woke up, he looked at his watch. It was two hours later. He looked around and saw only the sea. Why were they still at sea? The San Juan Islands were only an hour from Seattle. He listened to the people on the boat, but he could not understand them. They weren't speaking English. Maybe this wasn't the boat for the San Juan Islands! What boat was it? Where was it going?

Anthony didn't know (ウ) to do. He sat in the box all day. Night came, and it was very cold in the box. He had no warm clothing, no food, and nothing to drink. Now he wanted to go home!

The next morning, some men opened the box. They saw Anthony, and they pulled him (エ). Anthony was afraid. But the men smiled.

"Where is this boat going?" he asked.

"To Mexico," they answered.

"Mexico!" he cried. "Can't you stop somewhere? I have to go home!"

"No," they said. "We can't stop. But we can call your parents."

And (2) so they did. They also gave him food and a place to sleep. Ten days later, Anthony was in Mexico. He went to the Mexican police for help. (3) They put him on a plane to Seattle. His parents came to get him at the airport. They had to pay

for the airplane ticket. But they weren't angry with him. They were happy to see him again.

(Linda Jeffries & Beatrice S. Mikulecky. 2009. *Basic Reading Power 1* 3rd ed. Pearson Education.)

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | | |
|-----|-----------|----------|-----------|----------|
| (ア) | 1. by | 2. from | 3. in | 4. to |
| (イ) | 1. afraid | 2. alive | 3. asleep | 4. awake |
| (ウ) | 1. how | 2. what | 3. when | 4. where |
| (エ) | 1. away | 2. back | 3. in | 4. out |

B. 下線部 (1) の理由として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. San Juan 島行きの船に密輸品を持ち込もうとしていたから。
2. San Juan 島行きの船の切符を盗んだことがばれないようにするため。
3. San Juan 島行きの船に無銭で乗ろうとしたから。

C. 下線部 (2) と (3) が指すものとして最も適切な語句を 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | |
|-----|--|
| (2) | 1. To call Anthony's parents |
| | 2. To give Anthony food and a place to sleep |
| | 3. To stop the boat |
| (3) | 1. Anthony's parents |
| | 2. Some people on the boat |
| | 3. The Mexican police |

D. 以下の 1～4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. Anthony は友人たちと San Juan 島に行った。
2. Anthony が乗った船は San Juan 島を経由してメキシコに着いた。
3. Anthony は乗船中ずっと食べるものも飲むものもなかった。
4. Anthony は飛行機でメキシコから戻ってきた。

2. 次の対話 (1)~(3) を読み、ア~コの空欄に入る最も適切な答えを 1~16 の中から 1 つずつ選び、その番号を選びなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(同じ語を 2 度使うことはありません)

(1)

Mike: Have you heard any news (ア) the snowfall in this area?

Helen: According to the weather forecast, we will receive the heaviest snowfall (イ) 10 years tonight.

Mike: Oh, really? Then our school will be closed tomorrow.

Helen: Most (ウ).

(2)

Mike: My cellphone battery is dead. Can I (エ) your phone?

Helen: Sorry. I (オ) it in my car. Can't you wait (カ) we finish lunch?

Mike: It's urgent. I've just remembered I am (キ) to receive a call from an important client at lunch time.

(3)

Mike: Can I ask you a (ク)?

Helen: What is it?

Mike: I've just finished making my presentation slides for the next meeting. Would you (ケ) checking it for me?

Helen: (コ), I'd be happy to.

- | | | | |
|--------------|-----------|------------|-------------|
| 1. about | 2. ask | 3. borrow | 4. by |
| 5. favor | 6. forgot | 7. from | 8. in |
| 9. left | 10. lend | 11. likely | 12. mind |
| 13. supposed | 14. sure | 15. until | 16. whether |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。)

- (1) 彼らが野球場に着いたとき、試合はすでに始まっていた。

The (ア) (イ) already (ウ) (エ) they (オ) to the stadium.

- | | | | |
|------------|----------|---------|--------|
| 1. arrived | 2. begun | 3. game | 4. got |
| 5. had | 6. have | 7. when | 8. yet |

- (2) この辞書は私の父が買ってくれたものです。

This (ア) (イ) bought (ウ) (エ) (オ) my father.

- | | | | |
|-------|---------------|--------|----------|
| 1. by | 2. dictionary | 3. for | 4. given |
| 5. me | 6. to | 7. was | 8. with |

- (3) 私はその少年たちにここでバスケットボールをしないように頼んだ。

I (ア) the boys (イ) (ウ) (エ) basketball (オ).

- | | | | |
|----------|---------|--------|------------|
| 1. asked | 2. here | 3. not | 4. over |
| 5. play | 6. said | 7. to | 8. without |

- (4) 健康がお金よりもずっと大切であることは事実だ。

(ア) is a (イ) that health is (ウ) (エ) important (オ) money.

- | | | | |
|---------|---------|---------|----------|
| 1. as | 2. fact | 3. it | 4. more |
| 5. much | 6. than | 7. true | 8. which |

- (5) 2020年は東京でオリンピックが開催される年である。

2020 (ア) the (イ) (ウ) the Olympic games will (エ) (オ) in Tokyo.

- | | | | |
|------------|---------|---------|---------|
| 1. be | 2. has | 3. held | 4. is |
| 5. opening | 6. what | 7. when | 8. year |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
1	3	2	4

B. 3

C.

(2)	(3)
1	3

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	8	11	3	9	15	13	5	12	14

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	5	2	7	4

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	7	3	5	1

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	3	7	5	2

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	2	5	4	6

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	8	7	1	3

2.9 平成29年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(* 印の語は注を参照しなさい。)

“Happy Birthday to You” is a short song with a long and interesting history. Today it is one of the most popular songs in the English language and has been translated (ア) more than 150 languages all over the world. But did you know that this song began with a different name and was originally intended for a different purpose?

Nobody knows who wrote the words for “Happy Birthday.” The music was written (イ) two sisters, Mildred and Patty Hill, from the United States. In 1893, Mildred, a school teacher, wrote the famous music that we now know as “Happy Birthday.” Patty added some simple words, and they called their new songs “Good Morning to All.” Teachers used it to begin class each day: “Good morning to you / Good morning dear children / Good morning to all.”

The Hill sisters printed “Good Morning” in a song book in 1893. Thirty-one years later, a man named Robert Coleman included “Good Morning” in another song book, with the words “Happy Birthday to You” added as a second verse*¹. ⁽¹⁾Even today, almost a century later, the writer of that second verse remains a mystery. Very quickly, however, the words “Happy Birthday” replaced “Good Morning,” and the new song became popular at birthday parties for people of all ages. Then people in business started using the song as well. ⁽²⁾It was sung in a popular play in 1931 and used in an advertisement in 1933.

In 1935, a third Hill sister, Jessica, asked a music company to help protect the words to “Happy Birthday.” The company used the laws in the US to make a contract so that no one can sing “Happy Birthday” to make money (ウ) asking the music company first. Also, if someone does make money by singing the song, ⁽³⁾they have to give some of that money to the company. This law still applies today. It is OK to sing “Happy Birthday” to family and friends. But it is not OK to sing the song in a public place, such as in a restaurant or at a sports event, or to use it in something that makes money, such as a movie or advertisement*²

Today, a large music company owns “Happy Birthday.” Each year, the song earns the company about \$2 million. Half of that money goes to living relatives of the Hill sisters, (エ) simple children’s song became a worldwide hit.

(Nation, P., & Malarcher, C. 2007. *Reading for Speed and Fluency 3*. Compass Publishing)

(注) *1 verse (歌詞), *2 advertisement (広告)

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|-------------|-----------|--------|------------|
| (ア) 1. into | 2. off | 3. on | 4. through |
| (イ) 1. by | 2. for | 3. in | 4. with |
| (ウ) 1. but | 2. except | 3. of | 4. without |
| (エ) 1. what | 2. which | 3. who | 4. whose |

B. 下線部 (1) の日本語訳として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 今から 1 世紀前に、不思議な歌詞を書いた 2 番目の作者の記録が発見された。
2. 1 世紀近く経った今でもなお、2 番目の歌詞の作者は分からないままである。
3. 今からほぼ 1 世紀後に、不明となっている 2 番目の歌詞の作者が分かるだろう。

C. 下線部 (2) と (3) が指すものとして最も適切な語句を 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (2)
1. A worldwide hit
 2. Good Morning
 3. Happy Birthday
- (3)
1. people who sing the song for their family and friends
 2. people who sing the song to make money
 3. people who work for the music company

D. “Happy Birthday to You” という曲に関して、1～4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. Mildred Hill が高校生の時に作った。
2. もともと広告のために作られた。
3. 著作権は大きな音楽会社が保有している。
4. 商用利用できないことになっている。

2. 次の対話(1)~(3)を読み、ア~コの空欄に入る最も適切な答えを1~16の中から1つずつ選び、その番号を選びなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(同じ語を2度使うことはありません)

(1) [*On the telephone*]

Steve: Hello. This is XYZ company. (ア) can I help you?

Helen: Hello. This is Helen Haladyna speaking. (イ) I speak to Richard Gibson?

Steve: Richard Gibson? There is no one (ウ) that name here. I'm afraid you have the (エ) number.

(2) [*In a library*]

Mike: It's too hot here. Do you mind turning (オ) the air conditioner?

Rita: I would like to, but it is out (カ) order. Instead, let me open the window.

Mike: That's very (キ) of you.

(3) [*In a sports gym*]

Instructor: How (ク) do you come here?

Man: Sometimes once a week and sometimes five times a week. It (ケ) on the amount of work I am doing.

Instructor: I hope you will be able to do exercise (コ) regularly.

- | | | | |
|----------|------------|----------|-----------|
| 1. by | 2. depends | 3. how | 4. in |
| 5. kind | 6. may | 7. more | 8. much |
| 9. of | 10. often | 11. on | 12. puts |
| 13. soon | 14. thank | 15. what | 16. wrong |

3. 次の (1)~(5) の日本文に当てはまるように、空欄 (ア)~(オ) に 1~8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) カナダで主に話されている言語は、英語とフランス語です。

The (ア) (イ) (ウ) Canada (エ) mainly English (オ) French.

- | | | | |
|--------|--------------|-------------|-----------|
| 1. and | 2. are | 3. be | 4. both |
| 5. in | 6. languages | 7. speaking | 8. spoken |

- (2) 英語を話すときは、間違えることを恐れてはいけない。

(ア) (イ) afraid (ウ) (エ) mistakes (オ) speaking English.

- | | | | |
|-------|----------|---------|-----------|
| 1. be | 2. don't | 3. have | 4. making |
| 5. of | 6. to | 7. when | 8. you |

- (3) これはまさに僕がずっと探していた CD だ。

This (ア) the (イ) CD (ウ) I have (エ) looking (オ).

- | | | | |
|-----------|----------|---------|---------|
| 1. at | 2. been | 3. for | 4. is |
| 5. search | 6. since | 7. that | 8. very |

- (4) 練習すればするほど、上手になりますよ。

(ア) (イ) (ウ) practice, the (エ) you (オ) play.

- | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|
| 1. better | 2. if | 3. more | 4. much |
| 5. the | 6. well | 7. will | 8. you |

- (5) 一日でこの宿題を全部終わらせるのは難しいと思う。

I (ア) (イ) difficult (ウ) finish (エ) this homework (オ) one day.

- | | | | |
|---------|----------|-------|---------|
| 1. all | 2. doing | 3. in | 4. it |
| 5. that | 6. think | 7. to | 8. with |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
1	1	4	4

B. 2

C.

(2)	(3)
3	2

D. 3

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	6	1	16	11	9	5	10	2	7

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	8	5	2	1

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	1	5	4	7

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	8	7	2	3

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	3	8	1	7

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	4	7	1	3

2.10 平成 28 年度一般入学試験 (60 分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(* 印の語は注を参照しなさい。)

Do you think it is a good idea for different countries to use the same kind of money? For many European countries, that idea made a lot of sense. By 2002, the Euro (ア) become the standard currency of many European countries, including France, Germany, Italy, Portugal and Spain. These countries no longer have individual currencies, but rather they all share a single currency, the Euro. However, one member of the European Union that refused to give up its old currency in favour of the Euro was Britain. For many Britons*, the idea of giving up pounds and pence* was not very desirable. ⁽¹⁾It was seen as the same as giving up part of their national identity.

However, there are some good arguments for Britain to adopt* the Euro. One of the best reasons is that it would be easy for British consumers* to know how much they are paying for services and goods compared to people in other European countries. At the moment, having to exchange pounds for Euros makes it difficult to understand (イ) prices are cheaper or more expensive in the UK than in other countries around Europe. (ウ) very good reason is that British holidaymakers* would not have to worry about changing money when they travel around Europe.

For all the advantages adopting the Euro would bring, there is also a downside*. Countries can help themselves recover financially when they are in trouble by devalu-ing* their money. ⁽²⁾This makes it cheaper for other countries to buy their goods and helps their economies recover. If you are using the same currency as other countries, however, you cannot devalue your currency independently. This means if one Euro member has financial difficulties, it will affect* the whole European economy.

Could Japan ever be a member of a single currency group? At the moment there are no plans for a single Asian currency, but the idea has been discussed as a possibility for the future. It has been proposed* that Japan, China and South Korea may at first link their exchange rates* which could one day lead to one currency. However, at present, ⁽³⁾there is too great an imbalance between these three countries and other smaller Asian countries to make the idea of a Euro-style single currency a reality.

Should Japan be like the United Kingdom and refuse (エ) an economic arrangement? Or would it be better for the United Kingdom to join the Euro after all?

(Richard H. Bent et al., *Cross-Cultural Views on Britain*, Nan'un-do)

(注) Briton 英国人 pound/pence イギリスの通貨 adopt 採用する consumer 消費者 holidaymaker 行楽客 downside マイナス面 devalue 通貨を切り下げる affect～に影響を与える propose 提案する exchange rate 為替レート

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|----------------|----------|--------------|-----------|
| (ア) 1. has | 2. had | 3. have | 4. was |
| (イ) 1. that | 2. as | 3. about | 4. if |
| (ウ) 1. another | 2. other | 3. different | 4. others |
| (エ) 1. in | 2. to | 3. so | 4. such |

B. 下線部 (1) と (2) の指示するものとして最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- (1) 1. giving up pounds and pence
2. refusing to give up British old currency
3. being a member of the European Union
- (2) 1. adopting the Euro
2. devaluing their money
3. using the same currency

C. 下線部 (3) の日本語訳として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選びなさい。

- これらの 3 カ国とより小さな他のアジア諸国の間ではあまりにも不均衡が大きいため、ユーロのような現実には即した統一通貨を新しく作ることはできない。
- これらの 3 カ国とより小さな他のアジア諸国の間にはあまりにも大きな不均衡が見られるので、ユーロのような統一硬貨を改めて作ることはできない。
- ユーロのような統一硬貨という考えを現実のものにするには、これらの 3 カ国とより小さな他のアジア諸国の間にあまりにも大きな不均衡がある。

D. 1～4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選びなさい。

- イギリスなど多くのヨーロッパの国々にはもうそれぞれの国の通貨はなく、統一通貨を共同で使用している。
- イギリスがユーロを通貨として採用した場合の利点の一つは、イギリスの消費者がヨーロッパの他国のサービスや商品と自分の国のサービスや商品の価格を容易に比較できることである。

3. ユーロ参加国の一つが財政的に困難になった時、他国と同じ通貨を使用して
いるので、ユーロ参加国全体で支援できる。
4. アジアでは、日本、中国、韓国間で統一通過にする案が最近否決された。
2. 次の対話 (1)～(3) を読み、ア～コの空欄に入る最も適切な答えを 1～16 の中から 1
つずつ選び、その番号を選びなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(同
じ語を 2 度使うことはありません)

(1)

Masako: Hey, John, are you doing anything this Sunday?

John: No, nothing (ア). Why?

Masako: Well, (イ) you like to go and see a movie with me?

John: Sure, that (ウ) fun.

(2)

Ken: Hey, Keiko, you look as if you had (エ) a ghost!

Keiko: Yes, but it's OK. It was just a white sheet (オ) in the wind.

(3)

Steve: What is (カ) on?

Miles: I'm afraid there has (キ) an accident.

Steve: Oh, no, has (ク) been hurt?

Miles: Yes. I think (ケ) was run over by a truck as they the road.

Steve: (コ) anyone called an ambulance?

- | | | | |
|------------|-----------------|---------------|-------------|
| 1. yes | 2. could | 3. sounds | 4. has |
| 5. seen | 6. special | 7. looked | 8. anyone |
| 9. going | 10. been | 11. saw | 12. someone |
| 13. moving | 14. some people | 15. look like | 16. would |

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。)

(1) 今週末のバーベキューに私たち全員が招待されている。

(ア) of (イ) (ウ) invited (エ) the barbecue (オ) week-end.

- | | | | |
|---------|---------|---------|-------|
| 1. are | 2. us | 3. this | 4. to |
| 5. will | 6. last | 7. all | 8. we |

(2) トロントはカナダで一番人口の多い街だが、その首都ではない。

Toronto is (ア) (イ) populous city (ウ) Canada but (エ) (オ) capital.

- | | | | |
|-------|---------|----------|----------|
| 1. in | 2. its | 3. there | 4. the |
| 5. a | 6. most | 7. not | 8. whose |

(3) あなたは今日とてもハンサムですね。髪切ったの？

You (ア) (イ) very handsome today. Did you (ウ) (エ) hair (オ)?

- | | | | |
|------------|------------|---------|---------|
| 1. looking | 2. cutting | 3. cut | 4. are |
| 5. make | 6. look | 7. have | 8. your |

(4) こころ辺にどこか食べるものを買えるところありますか。

(ア) (イ) (ウ) around here (エ) we can get something (オ) eat?

- | | | | |
|-------------|-------|----------|----------|
| 1. for | 2. to | 3. there | 4. which |
| 5. anywhere | 6. is | 7. place | 8. where |

(5) 自動車産業の弱体の後、デトロイトはもはやアメリカ経済においてそんなに大きな役割を果たしていない。

After the weakening (ア) the car industry, Detroit no longer plays (イ) (ウ) important (エ) in (オ) U.S. economy.

- | | | | |
|-------|---------|-------|---------|
| 1. so | 2. such | 3. of | 4. the |
| 5. an | 6. for | 7. a | 8. part |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	4	1	4

B.

(1)	(2)
1	2

C. 3

D. 2

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
6	16	3	5	13	9	10	8	12	4

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	2	1	4	3

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	6	1	7	2

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	1	7	8	3

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	3	5	8	2

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	2	5	8	4

2.11 平成27年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(* 印の語は注を参照しなさい。)

In the summer of 2005, Japanese Prime Minister Junichiro Koizumi began a “Cool Biz” campaign* that made guidelines for casual dress. Koizumi was pictured in a newspaper advertisement (ア) a short-sleeved shirt — and no tie! He encouraged all members of the upper levels of government* to wear casual clothes while at work, with the exception of during formal events. At the time, Koizumi said, “From now on, the government will begin a ‘no jacket, no tie’ campaign in order to help prevent global warming*.” This program is still going on today.

In 2005, Japan was the world’s second (イ) importer of oil after the United States. At the time a goal was set to decrease greenhouse gases* by six percent from 1990 levels by 2012. This goal was based on the Kyoto Treaty*, which called for energy savings by reducing the air conditioning used in the office. This meant that throughout the summer, most workplaces* would set their air conditioners temperature to 28 degrees instead of 25 degrees. This would result in about 81 million gallons* of oil saved.

Japan is well known throughout the world for its traditional business dress and less than a decade ago, this casual dress would not have been acceptable. Many want this new “cool biz” fashion to succeed. If ⁽¹⁾it does, it could even help the economy. Many areas in fashion have already seen their sales increase thanks (ウ) new materials that keep cooler in less air-conditioned offices. Few American businessmen wear ties or formal suits to work, which (エ) many Japanese. Since the 1990s, America has been dressing increasingly casual. Not too long ago, people who worked in large American businesses always dressed formally. ⁽²⁾But now, as many as a third of U.S. companies allow casual clothing every day. In 2008 about 50 percent of all American males said that they rarely or never wore a suit to work, and only six percent of men wore a tie to work every day.

One possible reason for this is that those in their 20s are entering the workforce, and they want to express themselves. They often feel that a traditional suit and tie is part of a “uniform” that is very out of date. People today want to express themselves in a more modern style. ⁽³⁾This could mean wearing nice watches, sunglasses or scarves, or carrying umbrellas. American politicians, including President Barack Obama, “dress down” from time to time. This encourages the casual trend even more.

(注) “Cool Biz” campaign 「クール・ビズ」キャンペーン

upper levels of government 政府の閣僚たち global warming 地球温暖化

greenhouse gas 温室効果ガス the Kyoto Treaty 京都議定書
workplace 職場 gallon ガロン (液量単位)

A. 空所 (ア)～(エ) に入る最も適切な語を 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|------------------|---------------|----------------|--------------------|
| (ア) 1. worn | 2. wearing | 3. wear | 4. to wear |
| (イ) 1. large | 2. larger | 3. largest | 4. in large |
| (ウ) 1. in | 2. at | 3. for | 4. to |
| (エ) 1. surprises | 2. surprising | 3. to surprise | 4. being surprised |

B. 下線部 (1) と (3) の指示するものとして最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- (1) 1. Japan
2. this new “cool biz” fashion
3. its traditional business dress
- (3) 1. A traditional suit and tie is part of a “uniform” that is very out of date.
2. American politicians, including President Barack Obama, “dress down” from time to time.
3. People today want to express themselves in a more modern style.

C. 下線部 (2) の日本語訳として最も適切なものを 1～3 の中から 1 つ選びなさい。

1. しかし現在は、アメリカの企業の 1/3 もの企業で、毎日普段着で出勤することが許されている。
2. しかし現在は、アメリカで 3 番目に社員が多い企業では、毎日普段着で出勤することが許されている。
3. しかし現在は、毎日普段着で出勤することを許可するアメリカの企業数は、世界第三位である。

D. 1～4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選びなさい。

1. 2005 年に「クール・ビズ」キャンペーンをはじめた小泉元首相は、公式行事でもカジュアルな服装をするようにと閣僚たちに奨励した。
2. 夏季の職場のエアコンの温度設定を 3℃ 上げれば、約 8,100 万ガロンの石油が節約できる。
3. 1990 年以降アメリカにおいて普段着で出勤する人が急激に増加した理由として、制服を社員に与える会社が減少したことが考えられる。

4. パラク・オパマ大統領は、環境保護のためにビジネスの場においても普段着を着用しようという運動をはじめた政治家の一人だ。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な答えをそれぞれ1～4の中から1つ選びなさい。

ア. He refused () any money from me.

1. to accepting 2. accepts 3. to accept 4. acceptance

イ. This dress would only () someone who is quite thin.

1. suit 2. suits 3. suiting 4. suitable

ウ. She has a strong () of heights.

1. sad 2. fearless 3. fearful 4. fear

エ. The old man was almost run () by a truck.

1. through 2. over 3. at 4. to

オ. He is devoted () contributing to the community.

1. from 2. himself 3. to 4. him

カ. He was not at () satisfied with the result.

1. much 2. many 3. all 4. never

キ. She prefers staying home () out.

1. going 2. to leave 3. leaving 4. to going

ク. We find () difficult to express ourselves in English.

1. it 2. very 3. a 4. so

ケ. Every society has a lot of old sayings () to foods.

1. relates 2. related 3. relate 4. been related

コ. The new airplane is () with a more powerful engine.

1. equipping 2. to equip 3. equipped 4. to have equipped

3. 次の(1)～(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)～(オ)に1～8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。)

(1) 足の痛みのために私は休憩せざるを得なかった。

The (ア) in my (イ) (ウ) (エ) to (オ) a rest.

1. pain 2. me 3. I 4. must
5. take 6. foot 7. forced 8. took

(2) 彼は私のコートを自分のと間違えて、それを着て家に帰った。

He (ア) (イ) coat for (ウ) and (エ) it (オ).

- | | | | |
|------------|---------|----------|---------|
| 1. went | 2. my | 3. wrong | 4. him |
| 5. mistook | 6. wore | 7. his | 8. home |

(3) この薬を一日 3 回飲めば、風邪が治るはずだ。

(ア) you (イ) this medicine three (ウ) (エ) day, it should
(オ) your cold.

- | | | | |
|----------|---------|------------|---------|
| 1. cure | 2. take | 3. a | 4. if |
| 5. times | 6. it | 7. nothing | 8. good |

(4) 彼はいつも私のやり方に文句を言っている。

He (ア) always (イ) (ウ) the (エ) (オ) do things.

- | | | | |
|-------|-------------|--------|----------------|
| 1. I | 2. how | 3. way | 4. complaining |
| 5. is | 6. complain | 7. my | 8. about |

(5) この問題には完璧な解決策はなさそうである。

(ア) seems (イ) be (ウ) (エ) solution to the (オ).

- | | | | |
|------------|---------|----------|------------|
| 1. perfect | 2. such | 3. there | 4. problem |
| 5. to | 6. no | 7. it | 8. that |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
4	3	4	1

B.

(1)	(3)
2	3

C. 1

D. 2

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	1	4	2	3	3	4	1	2	3

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	6	7	2	5

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	2	7	6	8

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	2	5	3	1

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	6	8	3	1

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	5	6	1	4

2.12 平成 26 年度一般入学試験 (60 分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(* 印の語は注を参照しなさい。)

It's the legal version of blood doping*. Instead of injecting ⁽¹⁾themselves with blood before competition or taking drugs to stimulate the production of oxygen-carrying red blood cells, many endurance* athletes spend time in the thin air of high altitudes*. The idea is to get their muscles (ア) oxygen more efficiently so that when they return to lower altitudes, they have an advantage over their competition. But a new study on patients with a genetic disorder* that makes their bodies act as if they're always living at high altitudes suggests that too much "altitude doping" is not beneficial—and it could even hurt performance.

The body responds to the thin air at high altitudes by producing proteins in the hypoxia-inducible factor(HIF) family*. HIF stimulates the production of red blood cells and builds capillaries* to deliver more oxygen to the muscles. Yet some people have a rare genetic disorder in which HIF never gets broken down, so the levels are always high, as if they spent their days in the mountains. "In the U.K., as (イ) as we know, there are no more than 20 of these patients," says physiologist Federico Formenti of the University of Oxford in the United Kingdom.

To see what happens (ウ) people who have too much. HIF, Formenti and colleagues recruited five of the patients and five healthy people to the university for two days of tests. The volunteers rode vigorously on a stationary bike, bent their ankle while lying in a machine that measured an index* of tiredness in the muscle, and had muscle biopsies* taken. The researchers found that the patients weren't able to exercise as hard as the healthy people because their muscles weren't using energy as efficiently. Even very light exercise tired ⁽²⁾them out* quickly. The patients have few symptoms; they're usually diagnosed after a routine blood test finds high levels of hemoglobin. One of the subjects was even a professional cricketer "We had a laugh, saying cricket is not actually a sport—you don't have to run for a long time," says Formenti. He thinks that these patients may be at an athletic disadvantage because ⁽³⁾having too much HIF in the bloodstream has other effects that are greater than the benefits of more red blood cells and more capillaries.

In theory, athletes who train for long periods of time at high altitudes would be no different (エ) these patients, says Formenti. And that means that long-term training at high altitudes could actually be bad for athletes who have to run, cycle, or swim for long periods

(注) blood doping (自分の血液を輸血して持久力を高める) 血液ドーピング
endurance 持久力 (の必要な) high altitude 高地

genetic disorder 遺伝性疾患

hypoxia-inducible factor (HIF) family 低酸素誘導因子族

capillary 毛細血管 index 指数 biopsy 生体検査

tire~out ~を疲れ果てさせる

- A. 空所(ア)~(エ)に入る最も適切な語を1~4の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

(ア) 1. used 2. to use 3. have used 4. had used

(イ) 1. many 2. much 3. always 4. far

(ウ) 1. to 2. from 3. on 4. at

(エ) 1. in 2. into 3. at 4. from

- B. 下線部(1)と(2)の指示するものとして最も適切なものを1~3の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

(1) 1. drugs 2. many endurance athletes 3. their muscles

(2) 1. the researchers 2. the patients 3. the healthy people

- C. 下線部(3)の日本語訳として最も適切なものを1~3の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

1. 血流中の過剰なHIFは赤血球や毛細血管が増えるという予想外の効果も持つ。
2. 血流中に過剰なHIFがあると、赤血球や毛細血管が増えるという利点を上回る他の影響がある。
3. 血流中にたくさんのHIFがあると、赤血球や毛細血管が増えすぎるのを防ぐという他の効果もある。

D. 1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選びなさい。

1. 持久力の必要な運動選手が空気のうすい高地で激しいトレーニングするのは違法である。
2. HIF は、赤血球を刺激し、より多くの酸素を脳に送るのに役立つ。
3. オックスフォード大学の Formenti とその同僚は 10 人の被験者に 2 時間のテストを行った。
4. 高地での長期のトレーニングは、長時間走ったり、自転車に乗ったり、泳いだりする運動選手に悪影響を与えることがある。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な答えをそれぞれ 1～4の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

ア. It would be a good idea () abroad to improve your English.

1. to studying 2. study 3. studied 4. to study

イ. Please don't hesitate to () me if you need any help.

1. contacting 2. contacted 3. contact 4. contact with

ウ. Students should avoid walking () the woods on their way to school.

1. through 2. though 3. against 4. at

エ. Although he () baseball for only a few months, he is very skillful.

1. has been played 2. has playing 3. has played 4. is playing

オ. He often () at the back of the class.

1. will sitting 2. sits 3. be sitting 4. was seat

カ. The knife is very (), so please be careful when you use it.

1. dim 2. brilliant 3. sharp 4. danger

キ. I'm looking for () paper for the printer.

1. its 2. some 3. anything 4. this one

ク. If you work (), you will be paid extra money.

1. hardly 2. on Sunday 3. last week 4. legally

ケ. John changed jobs () get a higher salary.

1. unless he 2. in order 3. in order to 4. less he

コ. The next meeting () next Wednesday.

1. will be held 2. will hold 3. is to hold 4. holding

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。)

(1) 今年の夏休みはどこに行くの。

(ア) are (イ) going (ウ) (エ) summer vacation (オ) year?

- | | | | |
|---------|---------|----------|----------|
| 1. your | 2. he | 3. which | 4. where |
| 5. this | 6. last | 7. for | 8. you |

(2) お客様は、お出かけの際、フロントに鍵を預けてください。

(ア) should (イ) their keys (ウ) the front desk (エ) they (オ) out.

- | | | | |
|-----------|-------|---------|---------|
| 1. leave | 2. go | 3. come | 4. then |
| 5. guests | 6. at | 7. into | 8. when |

(3) 時間ほど大切なものはないとよく言われる。

(ア) is (イ) said that (ウ) (エ) more precious (オ) time.

- | | | | |
|---------|---------|------------|---------------|
| 1. than | 2. tell | 3. is | 4. everything |
| 5. no | 6. it | 7. nothing | 8. often |

(4) よく笑って、皆と話したりする人は仕事がうまくいくことが多い。

People (ア) smile (イ) lot and talk to everyone tend (ウ) do (エ) (オ) work.

- | | | | |
|---------|----------|--------|---------|
| 1. well | 2. whose | 3. who | 4. at |
| 5. to | 6. a | 7. the | 8. much |

(5) 彼女はいつも最初に来て、最後まで残っていた。

She (ア) always (イ) first (ウ) arrive (エ) the last to (オ).

- | | | | |
|--------|--------|----------|---------|
| 1. am | 2. the | 3. leave | 4. to |
| 5. and | 6. was | 7. him | 8. when |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	4	1	4

B.

(1)	(2)
2	2

C. 2

D. 4 (最後の段落の最後の文に記述がある。)

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	3	1	3	2	3	2	2	3	1

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	8	7	1	5

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	1	6	8	2

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	8	7	3	1

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	6	5	1	4

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	2	4	5	3

2.13 平成25年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(*印の語は注を参照しなさい。)

In 1989, the University of Phoenix in the U.S. began offering an online college degree* program. The program did not require that a student (ア) to a campus to take classes. ⁽¹⁾It allowed students to take as many courses as they wanted and on a day that was convenient. This obviously appealed to people with full-time jobs. They could do their class work and homework in the evenings and on the weekends. Within a decade, more than four million college students were taking at least one online class as part of their studies.

Many educators*, however, wondered whether online learning could be effective as a form of education. After all, college education has been based on classroom learning and face-to-face communication. Educators thought ⁽²⁾it might be able to teach functional* courses in business. But they wondered whether it could be used to teach complex subjects like literature and philosophy. Would academic standards go down (イ) the usual give and take between students and professors?

Recently, elite universities—including Stanford, MIT and Harvard—have become involved (ウ) online education in a big way. To date, hundreds of thousands of students have taken online classes from top-class professors in physics, robotics and accounting. Students who take these courses online come from around the world.

Some of these classes are completely free: (エ) the student needs is a computer and an Internet connection. Although the student does not receive credits* toward a university degree, he or she can listen to stimulating lectures by world-class professors. Harvard University, for example, offers an extremely popular series of online lectures about justice, democracy and citizenship. Students who view these online can exchange comments on an online community bulletin board*.

Japanese universities have also begun offering online courses. One type is designed to teach introductory* knowledge about a subject to students who are currently enrolled* on campus. Another type is designed for distance learning. ⁽³⁾This enables the “student” to select the time and place to view attractive lectures for personal benefit. The university gains the chance to advertise and an improved reputation.

(注) degree 学位 educator 教育者 functional 実用的な credit 単位
bulletin board 掲示板 introductory 入門的な enroll 入学させる

A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|-----------|--------------|----------|-------------|
| (ア) | 1. attend | 2. have come | 3. go | 4. had gone |
| (イ) | 1. in | 2. without | 3. with | 4. by |
| (ウ) | 1. of | 2. in | 3. from | 4. at |
| (エ) | 1. all | 2. that | 3. which | 4. for |

B. 下線部 (2) と (3) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (2) 1. college education
2. classroom learning
3. online learning
- (3) 1. introductory knowledge
2. distance learning
3. designing university courses

C. 下線部 (1) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. それによって生徒は、都合のよい日に好きなだけ授業を受講することが可能になった。
2. それは生徒に役に立つ授業を好きなだけ受講できることを可能にした。
3. それは生徒に役に立つ授業を一日でできるだけ多く受講できることを可能にした。

D. 1 ~ 4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 10 年で 40 万人以上の大学生が少なくとも 1 科目はオンラインの授業を受けていた。
2. 多くの教育者がオンラインでの学習は教育効果があるものとして賞賛した。
3. オンライン授業の中には無料のもので、単位も取得できるものがある。
4. オンラインの授業をすることで大学の宣伝の機会になるし、世評も高まる。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. Many customers tend () come to the store on Saturdays.

1. for 2. to 3. in 4. of

イ. John, together with his friends, () to the movie theater on Saturday.

1. is going 2. will going 3. are going 4. will went

ウ. I work () about 6 o'clock most days.

1. into 2. throughout 3. until 4. by

エ. Oh, hello! I'm surprised to see you. I thought you () home.

1. had not yet 2. already 3. had yet gone 4. had already gone

オ. The woman () standing at the back is my wife.

1. who 2. who is 3. who will 4. which were

カ. I'm planning to () in the summer vacation this year.

1. go abroad 2. abroad 3. overseas 4. go another country

キ. Your time at college gives you a () opportunity to learn many things for your future.

1. well 2. good 3. important 4. finely

ク. If you have a car, you can get there ().

1. easy 2. difficulty 3. easily 4. by yesterday

ケ. Unfortunately, the train had already ().

1. leaving 2. leaved 3. leaven 4. left

コ. The hotel is located () the coast.

1. in 2. through 3. on 4. to

3. 次の (1)~(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)~(オ) に 1~8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは解答欄に 1~8 の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) 今週末は映画を観に行きませんか。

(ア) you want (イ) (ウ) (エ) see (オ) movie this weekend.

- | | | | |
|-------|---------|---------|--------|
| 1. to | 2. have | 3. will | 4. go |
| 5. a | 6. in | 7. do | 8. and |

- (2) 3 億人が英語を母語として話していると推測されます。

(ア) (イ) estimated (ウ) 300 million people (エ) English (オ) a native language.

- | | | | |
|----------|--------|----------|---------|
| 1. is | 2. has | 3. speak | 4. to |
| 5. guess | 6. as | 7. it | 8. that |

- (3) 研究によると、栄養不良は高齢者において最も普及している。

Studies (ア) (イ) poor nutrition (ウ) (エ) common (オ) elderly people.

- | | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| 1. among | 2. that | 3. on | 4. show |
| 5. is | 6. will | 7. have | 8. most |

- (4) 日常生活において節約すれば、ゆくゆくはお金がいっぱい貯まるでしょう。

(ア) will eventually save (イ) lot (ウ) money (エ) you are economical in your (オ) life.

- | | | | |
|----------|------------|----------|-------|
| 1. a | 2. because | 3. you | 4. if |
| 5. daily | 6. much | 7. dairy | 8. of |

- (5) ニール・アームストロングは月面に降りた最初の人間だった。

Neil Armstrong (ア) the (イ) human being (ウ) land (エ) (オ) moon.

- | | | | |
|----------|---------|-------|--------|
| 1. the | 2. was | 3. to | 4. its |
| 5. first | 6. have | 7. on | 8. in |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
3	2	2	1

B.

(2)	(3)
3	2

C. 1

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	1	3	4	2	1	2	3	4	3

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	1	4	8	5

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	1	8	3	6

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	2	5	8	1

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
3	1	8	4	5

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	5	3	7	1

(1) Do you want to go and see a movie this weekend?

(2) It is estimated that 300 million people speak English as a native language.

(3) Studies show that poor nutrition is most common among elderly people.

(4) You will eventually save a lot of money if you are economical in your dairy life.

(5) Neil Armstrong was the first human being to land on the moon.

2.14 平成 24 年度一般入学試験 (60 分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(* 印の語は注を参照しなさい。)

A biotope* is, literally, a place of life. (ア) other words, a biotope is a geographical area with specific environmental conditions and particular plants and animals living in it.

Today, the word biotope has taken on a special meaning. It has become a key concept in the environmental preservation* movement. Instead (イ) referring to the ecological space itself, as it originally did, the term now has to do with everyday human life. More specifically, it refers to the “biotope movement.”

The biotope movement develops administrative and civic activities for preservation and creation of specific biotopes. These activities aim to preserve the natural environment and promote biological diversity. Some are as simple as making roof gardens, promoting ecology-friendly home gardening, and creating gardens and ponds on school grounds and college campuses. (ウ) are more complicated, like starting river reclamation* projects and building nature parks along roads and highways.

There are four basic principles that define this new idea of what a biotope is. First, a biotope should be small in scale. This means a space like a neighborhood park or a backyard garden. It could even be a collection of plants on veranda. Second, a biotope must be an open and not a closed system. Biotopes should be connected together so that animals and plants can move freely in and out of them. One way to do (1) this is to establish a corridor of biotopes that make up an organic network. For example, a forest or natural park might serve as the hub of the network. Small city parks or gardens on apartment grounds would then be linked to this hub to form an interconnected system.

The third principle states that a biotope must have multiple functions. It must be a good place for both people and other organisms to live. (エ) this reason, decorative flower beds*, which are just for show, are not true biotopes. Biosphere* reserves that are not for human use are not true biotopes, either. As a final principle, (2) a biotope should take advantage of every means possible to promote life within it. Both artificial and natural materials should be used to foster the growth of plants and to attract birds, for example.

All in all, the biotope movement aims to improve human and other life. It does (3) this through conscious, purposeful, cooperative* living. It shows how committed* individuals can make a difference.

(注) biotope ビオトープ(生息空間) preservation 保存・保護
reclamation 再生 flower bed 花壇 biosphere 生物圏
cooperative 協力(協調)的な committed 積極的に関わる

A. 空所(ア)～(エ)に入る最も適切な語を1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|---------|----------|---------|-----------|
| (ア) | 1. for | 2. at | 3. the | 4. in |
| (イ) | 1. from | 2. of | 3. to | 4. in |
| (ウ) | 1. they | 2. these | 3. this | 4. others |
| (エ) | 1. on | 2. for | 3. at | 4. to |

B. 下線部(1)と(3)の表す内容として最も適切なものを1～3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. establishing a corridor of biotopes
2. connecting biotopes together
3. making a closed system
- (3) 1. improving human life
2. showing how committed individuals can make a difference
3. improving human and othe life.

C. 下線部(2)の日本語訳として最も適切なものを1～3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ビオトープはその中の生命を促進するあらゆる可能な手段を利用すべきだ。
2. ビオトープはその中の生命を促進するあらゆる可能な手段の中で有効である。
3. ビオトープはその中の生命力を維持するためにいろいろな意味でメリットがある。

D. 1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 植物の成長を促進するためには、人工的な素材は使ってはならない。
2. 飾り立てた展示用の花壇も真のビオトープの1つである。
3. ビオトープという用語の現在の意味は、人間の日常生活とは関係がない。
4. ビオトープに関わる行政や市民の活動の目的は、自然環境を保護し、生物の多様性を促進することである。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. The store was crowded () customers throughout the day.

1. for 2. with 3. in 4. of

イ. Please return the book () 3 o'clock.

1. until 2. by 3. within 4. under

ウ. I'm thinking () to England this summer.

1. going 2. go 3. to going 4. of going

エ. He works () at his studies and his part-time job.

1. hard 2. hardly 3. diligent 4. serious

オ. I wish I () help you, but I'm too busy.

1. had 2. will 3. could 4. were

カ. There is no real cure () malaria.

1. to 2. of 3. for 4. at

キ. To succeed you need to ().

1. keep to be working 2. keep working 3. keep to work 4. keep work

ク. By next March he () English for six years.

1. has studied 2. will study 3. studied 4. will have studied

ケ. He is not used () homework every day.

1. do 2. to do 3. to doing 4. have done

コ. Are you interested () history?

1. in 2. at 3. on 4. for

3. 次の(1)~(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)~(オ)に1~8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは解答欄に1~8の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を2度使うことはありません。)

- (1) 地球温暖化は二酸化炭素の増加に起因しているようだ。

It (ア) that global warming (イ)(ウ)(エ) an increase (オ) carbon dioxide.

- | | | | |
|----------|-----------|-----------|------------|
| 1. cause | 2. caused | 3. by | 4. at |
| 5. is | 6. in | 7. reason | 8. appears |

- (2) 衛生の改善のおかげで、小児の死亡率が劇的に下がった。

(ア)(イ) improvements in hygiene, the rate (ウ) infant death (エ)(オ) dramatically.

- | | | | |
|--------------|---------|-----------|-------------|
| 1. of | 2. have | 3. has | 4. decrease |
| 5. decreased | 6. to | 7. thanks | 8. were |

- (3) バイトをしながら課題を全部終わらせるのがきっと大変だろう。

It (ア)(イ) really difficult (ウ) finish all your assignments (エ)(オ) a part-time job.

- | | | | |
|-------|----------|----------|-------------|
| 1. to | 2. be | 3. have | 4. must |
| 5. a | 6. doing | 7. while | 8. probably |

- (4) 嵐のせいで、私は空港で三日間ずっと待っている。

(ア)(イ) the storm, I (ウ)(エ) waiting at the airport (オ) three days.

- | | | | |
|----------|----------|------------|---------------|
| 1. owing | 2. being | 3. been | 4. throughout |
| 5. of | 6. for | 7. because | 8. have |

- (5) アズテック族は、カカオの実をお金として使っていたといわれている。

(ア)(イ)(ウ) that the Aztecs (エ) cocoa beans (オ) money.

- | | | | |
|---------|--------|---------|---------|
| 1. used | 2. as | 3. said | 4. it |
| 5. say | 6. was | 7. is | 8. they |

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
4	2	4	2

B.

(1)	(3)
2	3

C. 1

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	2	4	1	3	3	2	4	3	1

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	5	2	3	6

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	6	1	3	5

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	2	1	7	6

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	5	8	3	6

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
4	7	3	1	2

- (1) It appears that global warming is caused by an increase in carbon dioxides.
- (2) Thanks to improvements in hygiene, the rate of infant death has decreased dramatically.
- (3) It must be really difficult to finish all your assignments while doing a part-time job.
- (4) Because of the storm, I have been waiting at the airport for three days.
- (5) It is said that the Aztecs used cocoa beans as money.

2.15 平成23年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(*印の語は注を参照しなさい。)

On December 10, 1964 (ア) the age of 35, Martin Luther King, Jr. accepted the Nobel Peace Prize in Stockholm, Sweden. He was the youngest winner in history. But he did not accept it for himself. He accepted it for all of the peaceful protesters* against segregation and inequality* around the world.

The next day, he spoke at a college in Stockholm. Black people and poor people cannot stay poor for ever, he said. Ten million American families are poor. They know they live in the richest nation on earth. It is time to fight for poor people. Rich nations must help poor nations. And he spoke about war. War is not the way to solve problems, he said. It is necessary (イ) end war and violence between nations. We can solve problems through peaceful activities. After King received the Nobel Prize, he was Atlanta's most famous person. A big, expensive dinner was organized for him with 1,500 people. The dinner was a success. White city leaders sat down and ate with black city leaders. ⁽¹⁾This was part of King's dream.

(ウ) 1965, Selma, Alabama had an adult population of almost 30,000. Half were black but only 333 of them could vote. The worst segregationist* states of Alabama, Louisiana, and Mississippi did not have voting rights for blacks. King decided to organize protest marches in Selma. They began on January 18, 1965, when he led 400 blacks to the courthouse*. King politely asked to put the marchers' names on the voting list. They were told to leave. They marched to a big hotel. Black people walked through its entrance (エ) the first time. There, they signed their names to the voting list. This was a very small step toward success. As the marchers went toward the courthouse on January 25, 1965, the city's law officers violently attacked a female marcher. Photographers were waiting for ⁽²⁾this and took photos for the nation's newspapers. On February 1, police arrested King and 250 marchers. Inside jail, King continued to give orders to the marchers through his assistant, Andrew Young. Marches continued the next day, February 2. Police arrested 3,000 people and put them in jail. King's arrest was in all of the newspapers across the country. King was excited because everyone was interested in his campaign. ⁽³⁾ President Johnson spoke about it on television and promised voting rights for all Americans.

- (注) protester 抗議する人, 抗議者
 inequality 不平等, 不公平
 segregationist 人種差別主義者 (の)
 courthouse 裁判所

A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|---------|---------|--------|--------|
| (ア) | 1. for | 2. from | 3. in | 4. at |
| (イ) | 1. that | 2. in | 3. to | 4. out |
| (ウ) | 1. in | 2. to | 3. for | 4. of |
| (エ) | 1. from | 2. for | 3. at | 4. in |

B. 下線部 (1) と (2) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. King became Atlanta's most famous person.
2. A big, expensive dinner was organized for many people.
3. Black city leaders, as well as white city leaders, sat down and ate together.
- (2) 1. Photographers took photos for the nation's newspapers.
2. A female marcher was violently attacked by the city's law officers.
3. The marchers could sign their names to the voting list.

C. 下線部 (3) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. ジョンソン大統領は、テレビで、キング氏の運動に言及し、また全米国市民に対して選挙権を与えることを約束した。
2. ジョンソン大統領は、テレビで、全米国市民のために選挙権を約束し、またそれについて述べた。
3. ジョンソン大統領は、テレビで、キング氏が獄中から外部へ指示を与えていたことに言及し、また全米国市民に対して選挙権を与えることを約束した。

D. 1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 1965年、複数回にわたる抗議活動・行進にもかかわらず、キング氏は投票リストに黒人の氏名を書き入れることができなかった。
2. 1965年、アラバマ州、ルイジアナ州、ミシシッピ州では、黒人の選挙権が認められていなかった。
3. 1965年2月1日に逮捕・投獄されたキング氏は、行進参加者に指示を出すことができなかった。
4. 1964年12月10日、キング氏は結局ノーベル賞を受け取らなかった。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. Teamwork is very important to succeed () business.

1. for
2. in
3. of
4. on

イ. All matter is composed () atoms.

1. from
2. in
3. by
4. of

ウ. I can () imagine him doing such a bad thing.

1. almost
2. hardly
3. stop
4. very

エ. I'm having my house () now.

1. repair
2. repairing
3. repaired
4. being repaired

オ. I'm () to my clothes.

1. interested
2. good
3. different
4. indifferent

カ. The () of rain varies from year to year.

1. number
2. amount
3. lot
4. many

キ. It is no use () with such a foolish man.

1. argue
2. argued
3. argues
4. arguing

ク. Oranges () a lot of Vitamin C.

1. contain
2. containing
3. contains
4. contained

ケ. She is passionately devoted to () English.

1. study
2. have studied
3. studying
4. studied

コ. Do you mind () I smoke here?

1. if
2. as
3. because
4. of

3. 次の (1)~(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)~(オ) に 1~8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは解答欄に 1~8 の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) 私の娘は毎月必ず手紙をくれます。

My (ア) never (イ) (ウ) write a (エ) to me every (オ).

- | | | | |
|-------------|-----------|-----------|---------|
| 1. daughter | 2. to | 3. month | 4. week |
| 5. fails | 6. letter | 7. always | 8. aunt |

- (2) トラブルを避けても必ずしも安全が確保されるわけではない。

(ア) trouble (イ) not (ウ) (エ) (オ).

- | | | | |
|--------------|-------------|-----------|-----------|
| 1. will | 2. always | 3. assure | 4. avoid |
| 5. necessary | 6. avoiding | 7. safety | 8. though |

- (3) テレビは子供にマイナスの影響を及ぼしかねない。

TV (ア) have (イ) (ウ) influence (エ) (オ).

- | | | | |
|-------|-------------|-------------|---------|
| 1. on | 2. negative | 3. children | 4. must |
| 5. a | 6. small | 7. can | 8. to |

- (4) 日本庭園は多くの点で西洋式庭園と異なる。

Japanese gardens (ア) (イ) Western (ウ) (エ) many (オ).

- | | | | |
|------------|---------|--------------|---------|
| 1. gardens | 2. from | 3. respects | 4. are |
| 5. differ | 6. in | 7. different | 8. with |

- (5) 私はなんとか明日の授業の予習を終えた。

I (ア) to (イ) (ウ) (エ) tomorrow's (オ).

- | | | | |
|--------------|-----------|-------------|----------------|
| 1. preparing | 2. finish | 3. lesson | 4. necessarily |
| 5. managed | 6. for | 7. finished | 8. to |

長文問題と訳

1964年12月10日、35歳のマーティンルーサーキングジュニアは、スウェーデンのストックホルムでノーベル平和賞を受賞した。歴史上最年少の受賞者であった。しかし彼は自分自身のためには受け取らなかった。世界中の人種差別や不平等に対して平和的に抗議するすべての人のために受賞したのだ。

次の日、彼はストックホルムのある大学で話している。黒人と貧困な人々は、永遠に貧困のままにいることはあり得ない、と彼は言った。アメリカの一千万の家庭が貧困である。彼らは地球上で最も裕福な国に住んでいることを知っている。貧困な人々のために戦うときだ。裕福な国は貧しい国を助けるべきだ。そして彼は戦争について話した。戦争は問題を解決する方法ではない、と彼は言った。国と国の間の戦争や暴力を終わらせることが必要だ。私たちは平和的な行動を通して問題を解決することができる。キングはノーベル賞を受賞したあと、アトランタで最も有名な人物になった。1500人が出席する巨大で豪華な祝宴が彼のために計画された。祝宴は成功した。白人の市の有力者が黒人の市の有力者と同席し食事をした。これはキングの夢の一部だった。

1965年、アラバマ州セルマの成人人口は約3万人。半数が黒人だったがそのうち投票できるのはわずか333人であった。最悪な人種差別主義者の州であるアラバマ、ルイジアナ、ミシシッピ州では黒人に投票権はなかったのである。キングはセルマで抗議の行進を計画しようと決心した。行進が始まったのは1965年1月18日、その時彼は400人の黒人を裁判所に先導した。キングは行進した人々の名前を投票者リストに入れるよう丁寧をお願いした。彼らは立ち去るように言われた。彼らは大きなホテルへと行進した。初めて黒人がホテルの玄関を歩いて通った。そこで、彼らは投票者リストに署名をした。これは成功へのとても小さな一段だった。1965年1月25日行進者たちが裁判所へ向かう途中、市の警察官が行進中の一人の女性に暴力をふるった。カメラマンはこれを待ち構え全国の新聞のために写真を撮った。2月1日、警察はキングと250人の行進参加者を逮捕した。獄中で、キングは彼の助手であるアンドリューヤングを通じて行進者に指示を出し続けた。行進は翌日2月2日も続いた。警察は3,000人を逮捕し投獄した。キングの逮捕は全国の新開すべてで報道された。キングはみんなが彼の運動に関心を持ったことに興奮していた。ジョンソン大統領はテレビを通じてこのことについて話し、すべてのアメリカ人に投票権を約束した。

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
4	3	1	2

B.

(1)	(2)
3	2

C. 1

D. 2

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	4	2	3	4	2	4	1	3	1

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	5	2	6	3

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	1	2	3	7

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	5	2	1	3

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	2	1	6	3

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	2	1	6	3

2.16 平成22年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。

(*印の語は注を参照しなさい。)

Although jazz began in New Orleans, it soon moved to all the big cities like St. Louis, Chicago, New York, and Los Angeles. New forms of jazz developed, and styles changed.

In the 1920s, America fell (ア) love with dancing and popular jazz music. Big hotels hired dance bands. Dance halls were opened around the country. New dances with strange names like the Charleston* were popular. Women cut their hair short and wore short skirt (イ) the first time. These women were called “flappers.” Older Americans were shocked by jazz music, the new dances, and the flappers. One (ウ) the most famous musicians of this time was Louis Armstrong. He became famous for his trumpet playing and his low rough voice. Musicians like Armstrong brought a new kind of music to America and the world.

The 1930s in America was the time of the big bands and a new kind of jazz called swing. This new music had a special rhythm. Harlem, a part of New York, became the center of swing music. Big band leaders like Benny Goodman, Duke Ellington, and Glenn Miller played in Harlem at the Cotton Club and the Savoy Ballroom. People came and danced the foxtrot* and the jitterbug*. Swing music was the popular music of World War Two. When swing became very popular, serious jazz musicians changed to new, more complex styles. At first jazz was dance music. As it became more complex, it was mostly for listening. For ⁽¹⁾this reason, most jazz is now played in small bars and live jazz clubs, not in big dance halls. Jazz styles are always changing. In recent years, jazz musicians have put together jazz music and rock instruments like the electric guitar. This new jazz style is (エ) electric jazz or fusion*.

In the early 1950s, slow romantic songs were popular. But, teenagers wanted dance music with a good beat. ⁽²⁾That is the main reason why they began to listen to R&B (rhythm and blues) on the black radio stations. A white disc jockey (DJ), Alan Freed, began to play R&B on the radio for white teenagers. ⁽³⁾He was the first person to call this new music rock and roll. Rock and roll music had a strong dance beat. The musicians played electric guitars, and the music was loud and fast. American teenagers loved it.

(注)

Charleston チャールストン；南部の街の名所が由来とされる社交ダンスの一種

foxtrot フォックストロット；社交ダンスの一種

jitterbug ジルバ；社交ダンスの一種

fusion フュージョン；ジャズとロックなど異なるジャンルを融合した音楽

- A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|------------|-----------|---------|------------|
| (ア) | 1. for | 2. in | 3. with | 4. out |
| (イ) | 1. for | 2. in | 3. with | 4. out |
| (ウ) | 1. from | 2. to | 3. in | 4. of |
| (エ) | 1. calling | 2. called | 3. call | 4. to call |

- B. 下線部 (1) (2) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. At first jazz dance music.
2. Swing became very popular among musicians.
3. Jazz became more complex and was played mostly for listening.
- (2) 1. Teenagers wanted dance music with a good beat.
2. slow romantic songs were popular in the early 1950s.
3. Teenagers began to listen to R&B on the black radio station.

- C. 下線部 (3) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 彼が、ロックンロールを新しい音楽と呼び始めた最初の人物だった。
2. 彼が、その新しい音楽をロックンロールと呼び始めた最初の人物だった。
3. 彼が、ロックンロールというその新しい音楽を始めた最初の人物だった。

D. 1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 時代を経てもジャズの演奏スタイルにはあまり変化がなく、変化したものといえはダンスのスタイルであった。
2. ジャズはニューオーリンズで始められ、シカゴやニューヨークなどの大都市では演奏されることはなかった。
3. ジャズはもともとダンス・ミュージックではなかったが、第二次世界大戦時に流行したことでダンス・ミュージックとなった。
4. 近年、ジャズの演奏家はジャズ音楽とロックを演奏するための楽器を組み合わせ、新しい演奏スタイルを確立した。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. The way he smiles reminds me () his father.

1. about 2. of 3. from 4. in

イ. This is the place () John visited when he was a child.

1. where 2. in which 3. which 4. who

ウ. Other things () equal, he will win in the race.

1. being 2. is 3. are 4. having

エ. I () to the baseball club.

1. am 2. belong 3. belonging 4. belongs

オ. There were no () than 100 people present.

1. good 2. longer 3. better 4. less

カ. Let's finish this work () it gets dark.

1. but 2. till 3. until 4. by the time

キ. They were walking () the direction of the station.

1. in 2. to 3. for 4. on

ク. You should think () yourself before asking my opinion.

1. but 2. onto 3. in 4. for

ケ. The room was () of cigarette smoke.

1. many 2. full 3. big 4. large

コ. If I () the answer, I would tell you.

1. know 2. knew 3. have 4. find

3. 次の (1)~(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)~(オ) に 1~8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは解答欄に 1~8 の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) 急病のために、彼女はやむをえず約束を取り消した。

A (ア) illness (イ) her (ウ) (エ) her (オ).

- | | | | |
|----------------|-----------|-------------|-------|
| 1. suddenly | 2. forced | 3. canceled | 4. to |
| 5. appointment | 6. sudden | 7. cancel | 8. of |

- (2) 彼女のコートがここになかったら、きっと出かけたに違いない。

Her (ア) (イ) here, so she (ウ) (エ) (オ).

- | | | | |
|----------|----------|------------|---------|
| 1. coat | 2. isn't | 3. must | 4. may |
| 5. leave | 6. gone | 7. already | 8. have |

- (3) 病院に行く決心はつきましたか。

(ア) you (イ) (ウ) your (エ) to (オ) to hospital?

- | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|
| 1. can | 2. mind | 3. up | 4. made |
| 5. decide | 6. have | 7. went | 8. go |

- (4) 外見ではなく、行動で友人を判断しなさい。

(ア) your (イ) (ウ) (エ) he does not by his (オ).

- | | | | |
|-----------|------------|------------|----------------|
| 1. judge | 2. by | 3. judging | 4. saying |
| 5. friend | 6. because | 7. what | 8. appearance. |

- (5) 大昔には地球は平らであると信じられていた。

In (ア) times (イ) was (ウ) that the earth (エ) (オ).

- | | | | |
|-----------|-------------|--------------|------------|
| 1. it | 2. was | 3. flat | 4. round |
| 5. recent | 6. believed | 7. believing | 8. ancient |

長文問題と訳

ジャズはニュー・オーリンズで始まったが、すぐにセント・ルイス、シカゴ、ニューヨーク、ロスアンジェルスのようなすべての大都市に移っていった。新しいジャズの形式が発展し、スタイルも変わった。

1920年代、アメリカはダンスのできる人気の高いジャズ音楽に恋をした。大きなホテルはダンスバンドを雇った。ダンホールは全国でオープンした。チャールストンのような奇妙な名前の新しいダンスが人気となった。初めて女性は髪を短く切りミニスカートをはいた。そんな女性は「フラッパー」と呼ばれた。年配のアメリカ人はジャズ音楽、新しいダンス、フラッパーに衝撃を受けた。この頃のもっとも有名なミュージシャンの一人がルイ・アームストロングだ。彼はトランペットの演奏と低い渋い声で有名になった。アームストロングのようなミュージシャンがアメリカや世界に新しい種類の音楽をもたらした。1930年代のアメリカはビッグバンドとスイングと呼ばれる新種のジャズの時代だ。この新しい音楽は特別なリズムを持っていた。ニューヨークの一部であるハーレムがスイングミュージックの中心になった。ベニーグッドマン、デュークエリントン、グレンミラーのようなビッグバンドのリーダーたちはハーレムのコットンクラブやサボイボールルームで演奏した。人々はやってきてフォックストロットやジルバを踊った。スイングミュージックは第2次世界大戦時のポピュラー音楽だった。スイングが大人気になったとき、真面目なジャズミュージシャンは新しいもっと複雑なジャズに変わっていった。最初ジャズはダンスミュージックだった。ジャズが複雑になったとき、もっぱら聴くための音楽になった。この理由で、現在ほとんどのジャズは小さなバーやライブ向けのジャズクラブで演奏され、大きなダンスホールで演奏されることはない。ジャズのスタイルはつねに変化している。近頃ではジャズミュージシャンはジャズ音楽とエレキギターのようなロックの楽器を組み合わせている。この新しいジャズはエレクトリックジャズまたはフュージョンと呼ばれている。

1950年代の初め、ゆっくりとしたロマンティックな曲が人気だった。しかし、ティーンエイジャーはノリの良いダンスミュージックにあこがれた。これが彼らが黒人用ラジオ局から流れるR & B（リズムアンドブルース）を聴き始めた主な理由である。アランフリードという白人のディスクジョッキー（DJ）が白人のティーンエイジャーのためにラジオでR & Bを流し始めた。彼がこの新しい音楽をロックンロールと最初に呼び始めた人であった。ロックンロールは強いダンスビートを持っていた。ミュージシャンはエレキギターを演奏し、楽音は大きく速かった。アメリカのティーンエイジャーはそれが大好きだったのだ。

解答例

1. A.

ア	イ	ウ	エ
2	1	4	2

B.

(1)	(2)
3	1

C. 2

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	3	1	2	4	4	1	4	2	2

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	2	4	7	5

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	2	3	8	6

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	4	3	2	8

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	5	2	7	8

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	1	6	2	3

2.17 平成21年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(*印の語は注を参照しなさい。)

For the producers of certain forms of entertainment, the Internet offers the opportunity to reach a huge audience as (ア) as maximize* profits. It is not surprising, therefore, that more and more people are taking advantage of the Internet to get their voice (イ) in public.

In 1996 Dan Schultz and Scott Wirkus, frustrated at the lack of opportunity to work in AM and FM radio, started broadcasting their own Internet radio show from the basement of an old retirement home. These days the *Dan and Scott Show* airs to a US audience of 100,000 on a talk-radio website. This site is different from the hundreds of AM and FM radio stations that simultaneously* broadcast their programs on the Web. It is totally independent (ウ) any influence from corporate bosses or the US government.

Thousands of unpublished writers in the US are also turning to the Internet, CD-ROMs and new devices (e.g. the e-book), as potential outlets* for their work. Melisse Shapiro put her novel, *Lip Service*, on the Web in 1998, after it was rejected by several publishers. ⁽¹⁾She wanted to get a few thousand readers so she could show publishers that she had a fan. After promoting the book on woman-friendly websites and selling 150 downloadable copies at US\$9.95 each, she printed 3,000 paperback copies. ⁽²⁾These were sold by Amazon.com and *Lip Service* was so popular that she soon got a contract with Pocket Books, which made her the first online author to get a book contract. She now has a contract with Pocket Books for her next novel.

Successful writers can also make a lot of money on the Web. Stephen King demonstrated ⁽³⁾this when he released his most recent short story, *Riding the Bullet*, only on the Internet. More than 500,000 people downloaded it on the first day. He expects to make US\$450,000 from Internet sales of his e-book instead of the US\$10,000 he would have made by selling it to a traditional publishing outlet.

So, what does this mean for other forms of entertainment? Will they all make the same move to the Internet in the future? Will simple pleasures (エ) as browsing* in a bookstore, going to the movies or even watching a baseball game soon become activities of the past?

- (注) maximize 最大にする simultaneously 同時に outlet 販売路
browsing 商品を眺める

A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|----------|---------|------------|------------|
| (ア) | 1. much | 2. many | 3. well | 4. good |
| (イ) | 1. heard | 2. hear | 3. hearing | 4. to hear |
| (ウ) | 1. of | 2. from | 3. in | 4. to |
| (エ) | 1. so | 2. like | 3. of | 4. such |

B. 下線部 (2) (3) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (2) 1. downloadable copies
 2. paperback copies
 3. woman-friendly websites
- (3) 1. Stephen King's most recent short story
 2. publishing a book
 3. making a lot of money on the Web

C. 下線部 (1) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 彼女は自分に執筆という楽しみがあるということを出版社に示せるように、数千もの読者を得たかった。
2. 彼女が数千の読者を得たかったのは、自分 (の本) にはファンがいるということを出版社に示すためだった。
3. 彼女は数千の読者を得ることができ、その結果、自分 (の本) にはファンがいるということを出版社に示すことができた。

D. 1 ~ 4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. Dan Schultz and Scott Wirkus のラジオ番組は、AM、FM ラジオ局からしか放送しない他の多くのラジオ番組とは異なっていた。
2. インターネット上でしか自分の本を公開できない作家は、本を CD-ROM にして売り出した。
3. Melisse Shapiro は、著書の *Lip Service* が非常に人気が出たため、ネット上で作品を出す作家としては初めて出版社と契約を結べた作家である。
4. 本屋で本を眺めたり、映画に行ったり、野球観戦したりといった行為は、これからどんどんなくなっていくであろう。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. When () English, I usually use a Japanese-English dictionary.

1. talked 2. told 3. speaking 4. telling

イ. Our lost dog is now () taken care of.

1. be 2. being 3. been 4. are

ウ. I believe his illness has nothing to do () what we did two days ago.

1. with 2. to 3. for 4. from

エ. The fact () Tom and I met her brother is true.

1. who 2. whom 3. what 4. that

オ. Could you tell me () I can sit?

1. where 2. who 3. that 4. what

カ. When they got up in the morning, Nancy and I () already left their room.

1. have 2. has 3. are 4. had

キ. This is an important point () which you all need to pay attention.

1. from 2. for 3. to 4. in

ク. Steven and I watched an () movie last night.

1. excite 2. exciting 3. excites 4. excited

ケ. Baseball is () popular than football in our school.

1. better 2. best 3. more 4. most

コ. We could trust him () he had never lied to us.

1. but 2. because 3. although 4. however

3. 次の (1)～(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)～(オ) に 1～8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成しなさい。答えは解答欄に 1～8 の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) この湖で泳ぐのは危険だと思う。

I (ア) that (イ) is dangerous (ウ) (エ) in this (オ).

- | | | | |
|---------|-------------|----------|--------|
| 1. lake | 2. it | 3. that | 4. to |
| 5. swim | 6. swimming | 7. think | 8. for |

- (2) 先日、私の友人が環境問題について話をしてくれた。

Yesterday, my (ア) told (イ) (ウ) (エ) (オ).

- | | | | |
|------------------|-----------|-------------|---------|
| 1. environmental | 2. about | 3. to | 4. from |
| 5. pollution | 6. friend | 7. problems | 8. me |

- (3) そこにいる限り、君はやりたりことを続けられるよ。

As (ア) (イ) (ウ) are there, you can (エ) to do (オ) you want to do.

- | | | | |
|---------|----------|---------|-------------|
| 1. long | 2. where | 3. keep | 4. continue |
| 5. what | 6. as | 7. you | 8. how |

- (4) 外国の料理のなかにも、日本の料理と同じくらい健康的なものがたくさんある。

Many (ア) of (イ) (ウ) are as (エ) (オ) Japanese dishes.

- | | | | |
|--------------|-----------|-------------|------------|
| 1. countries | 2. dishes | 3. as | 4. foreign |
| 5. same | 6. health | 7. domestic | 8. healthy |

- (5) 田中先生によると、この道路は 3 日間雪で覆われているそうだ。

(ア) to Mr. Tanaka, this road (イ) (ウ) (エ) with snow (オ) three days.

- | | | | |
|-------------|---------|--------------|------------|
| 1. covering | 2. have | 3. being | 4. been |
| 5. for | 6. has | 7. according | 8. covered |

長文問題と訳

いくつかの娯楽を制作する人たちにとって、インターネットは利益を最大にするだけでなく巨万の視聴者にたどり着く機会を提供している。したがって次第に多くの人が自分の声を公に聞いてもらうためにインターネットを利用していることは驚くことではない。

1996年、AMやFMラジオで働く機会がないことに不満を募らせていたダン・シュルツとスコット・ウィルクスは、高齢者保護施設の地下室から自分たち自身のインターネットラジオショーの放送を始めた。最近では「ダンとスコットのショー」はトークラジオウェブサイトを通して10万人のアメリカ人視聴者に流れている。このサイトはウェブで自分たちの番組を同時に放送する数百のAMやFMラジオ局とは違っている。これは会社の首脳陣やアメリカ政府の影響から完全に独立している。

アメリカの何千人といえるいまだ出版されていない作家はまた、彼らの作品の販路の可能性を求めて、インターネットやCD-ROMやほかの方法（例えば、電子ブック）へ向かっている。メリッセ・シャピロは自分の小説である「リップサービス」がいくつかの出版社に断られたあと、1998年ウェブ上に発表した。彼女は出版社に対して自分にファンが居ることを示すため数千人の読者を得たいと思ったのだった。女性に理解のあるウェブサイトはその本を宣伝販売し、一冊9.95米ドルでダウンロードできる本を150部販売したあと、3千冊のペーパーバックを出版した。Amazon.comによって販売され「リップサービス」はとても人気が出たので彼女はすぐにポケット・ブックスと契約を結び、初めてのオンライン作家となった。今彼女は次の小説についてポケット・ブックスと契約を結んでいる。

またやり手の作家はウェブ上で巨額の金を稼ぐことができる。ステファン・キングは最新の短編小説「ライディング・ザ・ビュレット」をインターネットのみで発表したときに、このことを証明した。初日で50万人を超える人々がこの本をダウンロードした。今までの出版販路での販売だったら1万米ドルであったところを電子ブックのインターネット販売では45万米ドルの収入が予想される。

だから、ほかの娯楽にとってこのことはなにを意味するのか？将来すべてがインターネットへと同じ動きをするのか？本屋での立ち読み、映画館へ行くこと、野球の試合を見ること、このようなちょっとした楽しみも過去の産物になってしまうのだろうか？

解答例

1. A. (ア) 3 (イ) 1 (ウ) 1 (エ) 4

B. (2) 2 (3) 3

C. 2

D. 1

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	2	1	4	1	4	3	2	3	2

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	2	4	5	1

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	8	2	1	7

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	6	7	4	5

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	4	1	8	3

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	6	4	8	5

2.18 平成20年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(*の語は注を参照しなさい。)

Recently, the physicist Stephen Hawking issued an announcement that made news around the world. He says he now accepts that black holes cannot destroy the information about the objects they swallow.

Black holes are generally the remains of exploded stars—big stars. Black holes are extremely dense. ⁽¹⁾The gravity they produce is great enough to pull in other objects from space. Scientists tell us this force is (ア) great that not even light can escape.

In 1975, Stephen Hawking declared that black holes destroyed all evidence of (イ) they swallowed. He said any information about matter eaten by a black hole would cease to exist. Now he says he was mistaken. He says he did his work again from 1975, but in a new way. The new results show that information about what is inside a black hole is carried back out to the universe by radiation. In fact, scientists call this Hawking Radiation*.

The findings could aid scientific efforts to find what is called a Theory of Everything*. Physicists hope to be able to find the link between the laws that govern the smallest parts of matter with ⁽²⁾those that guide larger objects in the universe. These laws often appear to conflict. The changes that Professor Hawking describes in the surface of black holes are quantum changes. Quantum theory* describes how energy and matter act the level of atoms and particles* of atoms. ⁽³⁾It now guides most research in physics.

In 1900, the German physicist Max Planck wrote a paper that dealt (ウ) two forms of energy: heat and light. His finding was the beginning of quantum mechanics*. This describes how matter and radiation operate at the atomic level. Quantum mechanics describes the structure of the atom and the movement of its particles. It also explores how atoms take (エ) energy and release as light. Another major part of quantum mechanics is called Schrodinger's Equation*: the act of measurement changes the nature of that which is being measured. A third major part is called the Uncertainty Principle: the exact position of a particle and its speed and direction can never be known together.

Quantum theory has also led to a greater understanding of the universe. The same is true of Albert Einstein's general theory of relativity*. But Einstein's theory deals with larger structures in the universe; quantum theory deals with the very opposite.

(注)

Hawking Radiation ホーキング放射 Theory of Everything 万物の理論

Quantum theory 量子論 particle 粒子 quantum mechanics 量子力学

Schrodinger's Equation シュレディンガー方程式

Uncertainty Principle 不確定性原理 general theory of relativity 一般相対性理論

A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|--------------|----------|-------------|---------|
| (ア) | 1. very | 2. so | 3. much | 4. too |
| (イ) | 1. whichever | 2. which | 3. whatever | 4. that |
| (ウ) | 1. to | 2. for | 3. with | 4. at |
| (エ) | 1. in | 2. out | 3. as | 4. from |

B. 下線部 (2) (3) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選んで、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (2) 1. parts
2. findings
3. laws
- (3) 1. Quantum theory
2. energy
3. black hole

C. 下線部 (1) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 巨大な星が生み出す重力は宇宙から他の物体を引き入れてしまうほど大きい。
2. ブラックホールが生み出す重力はかなり大きく、宇宙から他の物体を引き入れてしまうほどである。
3. 巨大な星が生み出す重力は宇宙の物を他の物体に引き入れてしまうほど大きい。

D. 1 ~ 4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. Stephen Hawking は以前から今日までずっと、ブラックホールに呑み込まれた物質の情報は全て消滅すると主張している。
2. 不確定性原理とは、粒子の位置、速度、方向はどれも正確には特定できないことを言う。
3. Einstein の一般相対性理論と同様、量子論も宇宙の巨大な構造を扱う理論である。

4. Stephen Hawking の最近の研究で、ブラックホールが呑み込んだ物体の情報は消滅しないことが分かった。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ 1～4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. Our English teacher made us () hard.

1. studied 2. studying 3. study 4. worked

イ. We did not watch TV this morning, so we () know about the news.

1. hardly 2. hard 3. harder 4. seldom

ウ. We were () by the wonderful spices and flavors.

1. attracting 2. attract 3. attraction 4. attracted

エ. Can you teach me () to write my name in Japanese?

1. why 2. what 3. how 4. that

オ. My father bought a car () in the USA.

1. made 2. make 3. making 4. buy

カ. Many students found this book very ().

1. interest 2. interested 3. interesting 4. bored

キ. It is very sad () a lot of children born in this country do not get enough food.

1. which 2. who 3. what 4. that

ク. Tom is () you call a “walking dictionary.”

1. that 2. what 3. why 4. where

ケ. Don't tell my mother about it, no () what happens!

1. body 2. one 3. more 4. matter

コ. This is the comic book () which we were talking two days ago.

1. for 2. around 3. about 4. while

3. 次の (1)～(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)～(オ) に 1～8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成させなさい。答えは解答欄に 1～8 の番号を記入しなさい。尚、文頭の語も小文字になっています。(各問の空欄には同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) 妻と私は鹿児島に引っ越す前に 10 年間熊本に住んでいた。

My wife and I (ア) (イ) in Kumamoto (ウ) ten years (エ)
I (オ) to Kagoshima.

- | | | | |
|-----------|-----------|---------|----------|
| 1. after | 2. living | 3. have | 4. for |
| 5. before | 6. lived | 7. had | 8. moved |

- (2) 日本の企業にも興味はありますが、私の夢はアメリカ合衆国で働くことです。

(ア) I am interested (イ) Japanese companies, my dream (ウ)
(エ) work in the (オ) States.

- | | | | |
|------------|-------------|-------|-----------|
| 1. Uniting | 2. because | 3. is | 4. about |
| 5. to | 6. although | 7. in | 8. United |

- (3) 君は今日ここに来た理由を完全に忘れたようだな。

It (ア) that you (イ) forgot (ウ) you (エ) here (オ).

- | | | | |
|----------|-------------|---------------|----------|
| 1. why | 2. complete | 3. completely | 4. went |
| 5. seems | 6. came | 7. how | 8. today |

- (4) 仕事が終わったので、彼は帰宅して家族と夕食をとることにした。

(ア) his (イ), he decided to (ウ) (エ) and have (オ)
with his family.

- | | | | |
|---------|--------------|-----------|---------|
| 1. come | 2. finished | 3. dinner | 4. home |
| 5. go | 6. finishing | 7. leave | 8. work |

- (5) もし鈴木先生に会ったら、私の息子はカナダに行って以来ずっと英語を勉強し続けていると伝えてくれ。

(ア) you see Mr. Suzuki, tell him that my son (イ) been (ウ)
English (エ) he went (オ) Canada.

- | | | | |
|--------|-------------|------------|----------|
| 1. to | 2. if | 3. study | 4. since |
| 5. has | 6. studying | 7. studied | 8. have |

長文問題と訳

最近、物理学者であるステファン・ホーキングは世界中のニュースになる発表を行った。ブラックホールは自らが飲み込んだ物体に関する情報を破壊することはできないと現在認めていると彼は言う。

ブラックホールは一般的に爆発した恒星—それも大きな恒星—の残骸である。ブラックホールは極端に高密度である。ブラックホールが生み出す重力は宇宙から他の物体の中へ引っ張り入れることができるほど大きい。科学者たちはこの力はとても大きいので光さえ逃れることができないと言う。

1975年、ステファン・ホーキングはブラックホールは飲み込んだもののすべての証拠を破壊すると公表した。ブラックホールに食べられたものに関するいかなる情報も存在し続けることはないと言ったのだ。今それは間違いだったと言っている。1975年からもう一度研究をした、ただし新しい方法で、と彼は言う。新しい結果は、ブラックホール内部にあるものに関する情報は放射によって宇宙に戻されると示している。実際科学者たちはこれをホーキング放射と呼んでいる。

これらの発見はいわゆる万物の理論を発見しようとする科学的努力の支えとなりえるだろう。物理学者たちは物の最も小さい部分を支配する法則と宇宙のより大きな物体を動かす法則に関連があることを発見できるだろうと期待している。これらの法則はしばしば矛盾するように思えることがある。ホーキング教授がブラックホールの表面で説明している変化は量子的変化である。量子論はエネルギーと物質は原子と原子の粒子のレベルでどのように作用するかを説明する。それは現在、物理学における大抵の研究を先導している。

1900年ドイツの物理学者マックス・プランクはエネルギーの二つの型、即ち熱と光を扱う研究論文を書いた。彼の発見が量子力学の始まりであった。この論文で彼は物質と放射線が原子レベルでどのように作用しているか説明している。量子力学は原子と原子の粒子の動きの構造を説明する。それはまた、原子がどのようにして光のようにエネルギーを取り込み放出しているか調査している。量子力学が果たしているもう一つの主要な役目はシュレディンガー方程式と呼ばれる：計測という行為は計測される計測の性質を変化させる。第3の主要な役目は不確定性原理と呼ばれる：粒子の正確な位置と粒子のスピードと方向はけして同時に分かることはない。

量子論はまた宇宙のより大きな理解に繋がっている。同じことがアルバート・アインシュタインの一般相対性理論にも言える。しかしアインシュタインの理論は、宇宙のより大きな構造を扱っている；量子論はまったく逆のことを扱っているのだ。

解答例

1. A. (ア) 2 (イ) 3 (ウ) 3 (エ) 1

B. (2) 3 (3) 1

C. 2

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	1	4	3	1	3	4	2	4	3

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
7	6	4	5	8

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	7	3	5	8

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
5	3	1	6	8

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
6	8	5	4	3

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
2	5	6	4	1

2.19 平成19年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(* の語は注を参照しなさい。)

The U.S Department of Health and Human Services* reports two-(ア) of American citizens are overweight or obese*. The Dietary Guidelines Advisory Committee* says that while more research is needed, a number of studies suggest a link between sugar-sweetened* drinks and weight gain.

One of those studies appeared in the Journal of the American Medical Association recently. The study dealt (イ) the effects of sugar-sweetened colas and other soft drinks by researchers from the Harvard School of Public Health*, Boston Children's Hospital and Brigham and Women's Hospital. They studied information provided by more than 90,000 women, which was collected between 1991 and 1999. The women answered questions two times each year about their food intake.

The researchers say those who drank high levels of sugar-sweetened drinks were more likely to gain weight and develop diabetes*. Some of the women had increased their level of sugar-sweetened drinks to one or more per day during the eight-year period. The researchers say these women gained an average of almost eight kilograms. Other women had decreased their level to one or no sugary drinks per day. (ウ) average, these women gained less than three kilograms.

The doctors note that weight gain is a major cause of two diabetes*. This form of the disease usually appears in adults. The study compared women who drank more than one sugar-sweetened soft drink a day (エ) those who drank less than one a month. (1) The women who drank more were reported to have over an 80 percent higher risk of diabetes than the other women.

There were also findings about women who drank sugar-sweetened fruit drinks. The study says women who drank these every day were two times as likely to develop diabetes as (2) those who drank less than one a month. The researchers say diet drinks and unsweetened fruit juice did not appear to cause an increased risk of diabetes.

Dr. Stampfer, a researcher, says it is easier to gain weight from calories in drinks than (3) those in foods. He says drinks sweetened with sugar or high-fructose corn syrup* are high in calories, but do not satisfy hunger. When people do not feel full, they often take in more calories than their bodies need. The researchers say soft drinks are the leading way that Americans get added sugar.

(注)

The U.S. Department of Health and Human Services 保険社会福祉省 obese 肥満の
The Dietary Guidelines Advisory Committee 食生活ガイドライン諮問委員会
sweetened 甘みを付けた public health 公衆衛生 diabetes 糖尿病
type two diabetes 2 型糖尿病 high-fructose corn syrup 高果糖コーンシロップ

A. 空所 (ア) ~ (エ) に入る最も適切な語を 1 ~ 4 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-------|------------|------------|----------|----------|
| (ア) | 1. thirds | 2. four | 3. third | 4. three |
| (イ) | 1. at | 2. with | 3. for | 4. to |
| (ウ) | 1. to | 2. on | 3. in | 4. form |
| (エ) | 1. against | 2. between | 3. for | 4. with |

B. 下線部 (2) (3) の表す内容として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選んで、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (2) 1. sugar-sweetened fruit drinks
2. women
3. diabetes
- (3) 1. calories
2. diabetes
3. drinks sweetened with sugar

C. 下線部 (1) の日本語訳として最も適切なものを 1 ~ 3 の中から 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- より多く飲んだ女性はそれ以外の女性よりも糖尿病による死亡率が 80% をこえると報告された。
- より多く飲んだ女性はそれ以外の女性に比べ、糖尿病になる確率が 80% もあると以前からずっと言われてきた。
- より多く飲んだ女性はそれ以外の女性よりもさらに 80% をこえる高さの糖尿病になる危険性を持っていると報告された。

D. 1 ~ 4 の中から本文の内容に合致するものを 1 つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- 調査によると、1991 年から 1999 年までの間に 9 万人をこえる女性が治療を受けた。
- ダイエットドリンクとフルーツドリンクには糖尿病を引き起こす危険物質がない。

3. 人は満腹でも必要以上にカロリーを摂取しがちである。
4. 8年間、砂糖で甘みを付けた飲料の摂取量を一日一杯以上に増やした女性は平均約8キロ体重が増えた。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. After I () at the train station I bought a ticket to Kyoto.

1. arrive 2. arrived 3. get 4. got

イ. I was invited to Shinji's birthday party, but I don't know () he lives.

1. which 2. what 3. why 4. where

ウ. The typhoon hit the city, () great damage.

1. made 2. causing 3. caused 4. which

エ. We () for a part-timer last week but only received one application.

1. ask 2. advertised 3. had 4. look

オ. My father wants me to visit him in Tokyo but I think I should wait () I finish my university studies.

1. after 2. until 3. before 4. since

カ. Junko runs 2 km a day and swims 3 km on the weekend, () she must be very healthy.

1. why 2. because 3. so 4. if

キ. Most Japanese universities were established () than 60 years ago.

1. after 2. before 3. less 4. better

ク. Harvard university has been a center of learning () more than 370 years.

1. for 2. since 3. by 4. while

ケ. I would like to have this car () as soon as possible.

1. repaired 2. mend 3. repairing 4. repair

コ. He informed me () the fact.

1. is 2. in 3. of 4. with

3. 次の (1)～(5) の日本語に当てはまるように、空欄 (ア)～(オ) に 1～8 の中から最も適切な語を 1 つずつ入れて英文を完成させなさい。答えは解答欄に 1～8 の番号を記入しなさい。(空欄に同じ語を 2 度使うことはありません。)

- (1) 我々は 3 時間程その町を歩いてまわったが、何も見ておもしろいものはなかった。

We (ア) around (イ) city for (ウ) hours, but (エ) wasn't anything interesting to (オ).

- | | | | |
|-----------|----------|--------|----------|
| 1. walked | 2. an | 3. the | 4. see |
| 5. three | 6. there | 7. saw | 8. after |

- (2) 彼女の英語はかなり良かったが、理解しづらかった。というのも、彼女の話し方は早すぎたので。

(ア) her English was (イ) good, she was very (ウ) to understand, because (エ) spoke (オ) fast.

- | | | | |
|-------------|------------|---------|---------|
| 1. although | 2. because | 3. hard | 4. to |
| 5. quite | 6. too | 7. she | 8. they |

- (3) 彼はとてもひどいけがをしたので、彼らは彼を病院に連れて行くために救急車を呼ばなくてはならなかった。

He was (ア) (イ) injured that they (ウ) to call (エ) ambulance to (オ) him to hospital.

- | | | | |
|--------|---------|-----------|---------|
| 1. an | 2. take | 3. a | 4. took |
| 5. bad | 6. had | 7. hardly | 8. so |

- (4) 音を立て過ぎない限り、あなたが遅く帰宅するのを私は気にしません。

I (ア) mind you (イ) home (ウ), as (エ) as you don't make (オ) much noise.

- | | | | |
|---------|---------|-----------|----------|
| 1. do | 2. come | 3. coming | 4. too |
| 5. long | 6. late | 7. to | 8. don't |

- (5) 16 歳の時スクーターの免許が取れるのに、18 歳までは車の運転ができないのはおかしいように思われる。

It (ア) strange that you (イ) get a scooter license (ウ) you are 16 but you're not (エ) to drive a car (オ) you are 18.

- | | | | |
|----------|--------|---------|------------|
| 1. until | 2. why | 3. when | 4. allowed |
| 5. since | 6. can | 7. have | 8. seems |

長文問題と訳

アメリカの保険社会福祉省はアメリカ市民の3分の2が太りすぎ、つまり肥満だと報告している。食生活ガイドライン諮問委員会によれば、もっと調査が必要ではあるが、加糖飲料と体重増加には関連があると多くの研究が示唆している。

最近研究のひとつがアメリカ医学協会ジャーナルに掲載された。その研究は、砂糖で甘みをつけたコーラやほかのソフトドリンクの効果を扱ったものでハーバード大学公衆衛生大学院、ボストン小児病院、それにブリガムアンドウィメンズ病院の研究者の手によるものだった。彼らは9万人を超える女性からの情報を研究したが、その情報は1991年から1999年の間に収集されたものであった。女性たちは食物摂取について毎年2回の質問に答えた。

研究者たちによれば高いレベルの加糖飲料を飲んだひとは、より体重が増えやすく糖尿病になりやすい。8年の間に加糖飲料の量を一日1杯以上増やした女性もいた。この女性たちは平均約8キロ体重を増やしていると研究者は言う。一日の甘い飲料摂取量を一杯または飲まないことにした女性もいた。平均するとそうした女性は3キロ未満しか体重を増やしていない。

体重増加は2型糖尿病の主な原因のひとつだと医師たちは注目している。この型の病気は通常成人に現れる。一日に一杯加糖ソフトドリンクを飲む女性と一月に一杯未満を飲む女性を比較した研究がある。(1)よりたくさん飲む女性はほかの女性より糖尿病にかかる確率が80%を超えると報告された。

また加糖フルーツジュースを飲んだ女性についてもいくつか分かったことがある。毎日飲んだ女性は1ヶ月に1杯未満しか飲まない女性より糖尿病になる確率が2倍になったと研究は伝えている。調査によればダイエットドリンクと甘み付けされていないフルーツジュースは糖尿病のリスクを増やす原因にはならないようである。

調査官であるスタンプファー医師は、食べ物のカロリーからより飲み物のカロリーからの方が体重増加に繋がりやすい、と言っている。砂糖または高果糖コーンシロップで甘みをつけられた飲み物は、カロリーは高いが空腹は満たさないと彼は言う。人は満腹感を感じないと、身体が求める量以上にカロリーを摂ってしまうことがよくある。ソフトドリンクのためにアメリカ人は余計な糖分を摂っていると調査は伝えている。

解答例

1. A. (ア) 1 (イ) 2 (ウ) 2 (エ) 4

B. (2) 2 (3) 1

C. 3

D. 4

2.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	4	2	2	2	3	3	1	1	3

3. (1)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	3	5	6	4

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ
1	5	3	7	6

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	7	6	1	2

(4)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	3	6	5	4

(5)

ア	イ	ウ	エ	オ
8	6	3	4	1

2.20 平成18年度一般入学試験(60分)

1. 次の英文を読んで、設問 A, B, C, D に答えなさい。
(* の語は注を参照しなさい。)

Most of the people on this planet will never see Antarctica* with their (ア) eyes, but it is a land of great fascination*. It is owned by no country, but instead is occupied by hardy* researchers who endure* the long sunless winter there in order to learn about the animals that live there and how the land was formed.

Antarctica is the world's fifth largest continent. It is (イ) away from any other country. It is extremely cold, windy and dry. Although it is dry, it holds two percent of the earth's fresh* water. This water is frozen in the continent's icecap. ⁽¹⁾ This contains 90% of the world's ice and is between 6,000 and 14,000 feet thick.

There are no native people in Antarctica, and no one lives there permanently. It is the only continent that was actually "discovered," because no one was living there when it was found. Ten percent of the earth's surface is here, mostly covered (ウ) ice. In the center is the South Pole. Since it was first discovered in 1820, Antarctica has been claimed by many countries. ⁽²⁾ Only once have nations actually fought over the land. In 1952, British scientists tried to build a scientific base there, and Argentine soldiers shot at them to prevent the construction.

About a dozen nations have established research stations on the continent. Scientists assume that there are great supplies of minerals and petroleum* under the ice and in the seas around the continent. These supplies may be valuable, but they are hard to take out. The cold, deep ice and fragile* environment are serious obstacles (エ) reaching these resources and bringing them to the surface.

Antarctica is unique because it can only be used for peaceful purposes. Since 1961, 44 nations have signed the Antarctic Treaty and agreed on several essential points. First, no armies and no nuclear weapons are allowed there. Second, these nations have agreed to promote international scientific cooperation on the continent. ⁽³⁾ This includes conserving* the animal and plant life on land and the sealife in the seas around the continent. Thirdly, they have to discuss any attempt to remove resources. The way Antarctica is treated provides hints for how the whole world can live together peacefully.

- (注) Antarctica 南極大陸 fascination 魅力 hardy 辛抱強い endure 耐える
fresh 無塩の petroleum 石油 fragile 壊れやすい conserve 保護する

A. 空所(ア)～(エ)に入る最も適切な語を1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

- | | | | | |
|-----|----------|-------------|---------|----------|
| (ア) | 1. other | 2. self | 3. own | 4. else |
| (イ) | 1. very | 2. distance | 3. much | 4. far |
| (ウ) | 1. over | 2. with | 3. up | 4. below |
| (エ) | 1. to | 2. for | 3. by | 4. with |

B. 下線部(1)、(3)の表す内容として最も適切なものを1～3の中から1つ選んで、その番号を解答欄に記入しなさい。

- (1) 1. Antarctica
2. Antarctica's icecap
3. the earth's fresh water
- (3) 1. the continent
2. the fragile environment
3. international scientific cooperation

C. 下線部(2)の日本語訳として最も適切なものを1～3の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 南極大陸をめぐって、国々が現実争ったのは一度きりしかない。
2. 南極大陸をめぐって、国々はただの一度も現実争ったことがない。
3. 南極大陸をめぐって、国々が現実争ったのは一度だけではない。

D. 1～4の中から本文の内容に合致するものを1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

1. 南極大陸を覆う氷には2パーセントの塩分が含まれている。
2. 44ヶ国の国々が南極大陸に観測基地をもっている。
3. 南極大陸は地球の表面の10パーセントを占める広さがある。
4. 南極条約調印した国々は軍隊も核兵器も保有しない中立国である。

2. 次のア～コの空欄に入る最も適切な語(句)をそれぞれ1～4の中から1つ選び、その番号を解答欄に記入しなさい。

ア. Have you () the paper yet?

1. completely 2. completed 3. complete 4. completion

イ. There was a () of people at the conference.

1. various 2. variety 3. vary 4. varied

ウ. There was a lot of () shown in the new design.

1. interest 2. interested 3. interesting 4. interestingly

エ. The train from Fukuoka arrives () noon.

1. on 2. right 3. between 4. at

オ. The boss asked that everyone () overtime until the project is finished.

1. worked 2. have worked 3. work 4. will work

カ. We don't have much time to () a decision.

1. make 2. do 3. come 4. go

キ. I always () a little gardening at the weekend.

1. make 2. do 3. take 4. play

ク. If these words are hard to understand you could () a dictionary.

1. look 2. watch 3. draw 4. refer to

ケ. It wasn't her cat. I don't know who it ().

1. owned 2. possessed 3. belonged to 4. was had

コ. He still acts like a baby. I wish he'd ().

1. grew up 2. would grow up 3. grown up 4. grow up

3. 次の(1)～(5)の日本語に当てはまるように、空欄(ア)～(オ)に1～8の中から最も適切な語を1つずつ入れて英文を完成させなさい。答えは解答欄に1～8の番号を記入しなさい。(空欄に同じ語を2度使うことはありません。)

- (1) 空港に着くとすぐに私は円をすこしドルに交換した。

As (ア) (イ) I (ウ) at the airport I (エ) some yen (オ) dollars.

1. into 2. reached 3. soon 4. exchanged
5. changed 6. between 7. arrived 8. as

- (2) 先々週、いくつか作文を書いたけれど、急いで書いたので成績は低かった。

I wrote a (ア) of essays the week (イ) (ウ), but I got low (エ) because I (オ) them very quickly.

1. ago 2. grades 3. before 4. several
5. did 6. last 7. number 8. success

- (3) スーザンはオーシャン通りにある銀行のとなりのビルの2階に部屋を借りている。

Susan lives (ア) an apartment (イ) the second floor (ウ) a building in Ocean Street, (エ) (オ) the bank.

1. next 2. from 3. in 4. up
5. door 6. to 7. on 8. of

- (4) ピーター・ジャクソンの製作した新しい映画はきっと人気を博して、彼はオスカー賞を受けるだろう。

The new movie (ア) Peter Jackson is going to (イ) a big (ウ), and I (エ) he will (オ) an Oscar.

1. be 2. expect 3. popular 4. win
5. by 6. made 7. hit 8. look forward

- (5) 最近までイギリスでは人々は紅茶を飲んでいたが、この頃は健康に良いので緑茶がよく飲まれている。

(ア) recently most people in Britain drank (イ) tea, but (ウ) green tea has become popular (エ) to its health (オ).

1. lately 2. due 3. later 4. goods
5. black 6. until 7. because 8. benefits

長文問題と訳

この惑星の人のほとんどは、自分自身の目で南極大陸を見ることは、決して無いだろう。しかし、そこは大変魅惑的な場所だ。そこは、どの国の物でもないが、その代わり、そこに住む動物のことを知り、どうやってその土地が形作られたのかを知る為に、そこで長い、太陽の出ない冬を耐える、辛抱強い研究者らが住んでいる。南極大陸は世界で5番目に大きな大陸だ。ここは他のどの国からも遠いところにある。極端に寒く、風が強く、乾燥している。乾燥しているが、地球の真水の2パーセントを保持している。この水は大陸の氷河となって凍る。これは世界の氷の90パーセントを占め、6,000から25,000フィートの厚さである。

南極大陸には土着の民族はいない。そしてそこにずっと住むものは誰も居ない。そこが見つかった時、そこには誰も住んでいなかったのも、実際に「発見された」のは大陸だけだ。地表の10パーセントがここにあり、そのほとんどが氷に覆われている。中央には南極がある。1820年に初めて発見されて以来南極大陸は多くの国々に求められてきた。この土地をめぐる実際に国々の争いがあつたのはたった1度だけだった。1952年にイギリスの科学者がそこに科学基地を建てようとしたが、アルゼンチンの兵士がその建設を阻止する為、相手を撃った。

約12の国家がその大陸に調査基地を建て、科学者は氷と大陸の周りの海の下に大きなミネラルと原油の供給があると仮定していた。これらの供給は貴重かもしれないが、取り出すのが大変だった。冷たく、深い氷と壊れやすい環境はこれらの資源に辿り着き、地表にそれらを持ち込む事に対する深刻な障害物となった。

南極大陸は平和に満ちた目的のためにのみ使うことができる点がユニークだ。1961年以来、44の国家が南極条約に調印し、いくつかの本質的な点に同意した。第一に、そこでは一切の武器や核兵器が許されていない。第二にこれらの国々は大陸に於ける、国際的な科学協力を促進する事に同意した。この条約は、大陸の周りに住む海の生き物や陸上に住む動物、植物、生命を保護することを含んでいた。第3に、資源を持ち出す、あらゆる試みをも議論せねばならない。南極大陸の扱われ方は、いかに全世界が、平和的に共に生きていけるかに対して、ヒントを与えている。

解答例

1. A (ア) 3 (イ) 4 (ウ) 2 (エ) 2

B (1) 2 (3) 3 C 1 D 3

2. ア2 イ2 ウ1 エ4 オ3 カ1 キ2 ク4 ケ3 コ4

3. (1) ア3 イ8 ウ7 エ4 オ1

(2) ア4 イ3 ウ6 エ2 オ5

(3) ア3 イ7 ウ8 エ1 オ6

(4) ア5 イ1 ウ7 エ2 オ4

(5) ア6 イ5 ウ1 エ2 オ8