平成21年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

経　済　学　部 (リーガルエコノミクス学科)		
外　国　語　学　部 (東アジア学科)	}	(A日程)
社会福祉学部第一部 (社会福祉学科)		

平成21年2月7日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 21 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. (1) IC チップ上の半導体数は，18ヶ月ごとに 2 倍になるというムーアの法則が成り立っているという。この法則がこれからもずっと成り立つとすると，IC チップ上の半導体数が現在の 64 倍になるのは，何年後か。

(2) アルファベットの小文字のうち o を除く 25 文字で，16 桁のコンピュータ用ユーザ名を作るとき，できるユーザ名の数は何桁になるか。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算せよ。

2. $a^2 - 4b^2 = 13$ をみたす自然数 a，b の組を求めよ。

3. 放物線 $y = x^2 - 4x + 7$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 点 (1, 4) で放物線と接する直線 ℓ の式を求めよ。

(2) 直線 ℓ と x 軸の交点を通る，放物線のもう一本の接線 m の式を求めよ。

4. 三角形 ABC は，$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$，辺 AB $= 6$，辺 AC $= 4$ である。辺 BC を 2 等分する点 D，辺 AB を 1 : 2 に内分する点 E，辺 AC を 3 : 1 に内分する点 F をとり，AD, DE，EF を線分で結ぶ。このとき次の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\sin B$ を求めよ。

(3) 三角形 BDE の面積 S_1 を求めよ。

(4) 四角形 CDEF の面積 S_2 を求めよ。

5. 以下の命題の真偽を述べよ。

(1) z と $\overline{z}$ が互いに共役な複素数であれば，$z^2 + \overline{z}^2 + z\cdot\overline{z}$ は実数である。

(2) 方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が方程式 $x^2 + ax + 2a - b - 6 = 0$ の 2 つの実数解よりそれぞれ 1 小さい 2 つの解をもつならば，$a = -1$，$b = -2$ である。

(3) 実数 x，y について $|\,x\,| + |\,y\,| \leqq 1$ であるならば，$x^2 + y^2 \leqq 1$ である。

6. 放物線 $p_1 : y = x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -4 平行移動した放物線と x 軸に関して対称な放物線 p_2 について以下の問いに答えよ。

(1) p_2 の方程式を求めよ。

(2) p_1 と p_2 の 2 つの交点を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) p_2 と ℓ で囲まれる領域の面積を求めよ。

7. 1 から 9 までの整数からそれぞれ違う 3 つの整数を取り出した時，その 3 つの整数の和および積がそれぞれ偶数となる確率を求めよ。

解答例

1. (1) $64 = 2^6$ であるから，64 倍になるのは

$$18 \times 6\text{ヶ月} \quad \text{すなわち} \quad \textbf{9 年後}$$

(2) ユーザ名の数は　25^{16}

$$\begin{aligned}\log_{10} 25^{16} &= \log_{10} 5^{32} = 32\log_{10}\frac{10}{2}\\ &= 32(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)\\ &= 32(1 - 0.3010) = 22.368\end{aligned}$$

$22 < \log_{10} 25^{16} < 23$ であるから　$10^{22} < 25^{16} < 10^{23}$

よって，25^{16} は **23 桁**の数

2. 与式より　$(a+2b)(a-2b) = 13$

a，b は自然数であるから，$a+2b$，$a-2b$ は整数である．
また，$a+2b > 0$，$a+2b > a-2b$ であることに注意して

$a+2b = 13$ かつ $a-2b = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{a = 7,\ b = 3}$

3. (1) $y = x^2 - 4x + 7$ を微分して　$y' = 2x - 4$
$x = 1$ のとき　$y' = 2\cdot 1 - 4 = -2$
よって，ℓ は点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き -2 の直線であるから

$$y - 4 = -2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -2x + 6}$$

(2) ℓ と x 軸との交点の x 座標は

$$-2x + 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 3$$

点 $(3,\ 0)$ から放物線に引いた接線は，接点の座標を $(a,\ a^2 - 4a + 7)$ とおくと，接線の傾きは $2a - 4$ である．
ゆえに，接線の方程式は

$$y - (a^2 - 4a + 7) = (2a-4)(x-a)$$

すなわち　$y = (2a-4)x - a^2 + 7 \quad \cdots ①$

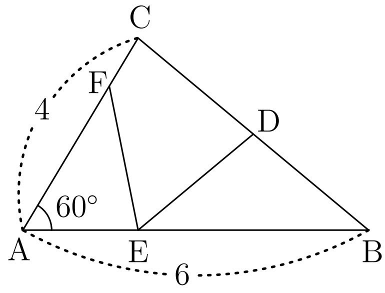
この直線が $(3,\ 0)$ を通るから

$$0 = (2a-4)\cdot 3 - a^2 + 7$$

整理すると　$a^2 - 6a + 5 = 0$
すなわち　$(a-1)(a-5) = 0$

もう一本の接線について，(1) に注意すると　$a \neq 1$　ゆえに　$a = 5$
これを ① に代入して　$\boldsymbol{y = 6x - 18}$

4. (1) △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos60^\circ\\ &= 16+36-24\\ &= 28\end{aligned}$$

BC >0 であるから　$\mathbf{BC=2\sqrt{7}}$

(2) △ABC に正弦定理を適用して　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}$

ゆえに　$\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin60^\circ}=\dfrac{4}{\sin B}$

よって　$\sin B=\dfrac{4\sin60^\circ}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$

(3) D は BC の中点であるから，(1) の結果から　$\mathrm{BD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\sqrt{7}$

E は AB を $1:2$ に内分する点であるから　$\mathrm{BE}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AB}=4$

これらと (2) の結果より

$$S_1=\triangle\mathrm{BDE}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}\sin B=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin60^\circ=6\sqrt{3}$

E は AB を $1:2$ に内分する点であるから　$\mathrm{AE}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}=2$

F は AC を $3:1$ に内分する点であるから　$\mathrm{AF}=\dfrac{3}{4}\mathrm{AC}=3$

$$\triangle\mathrm{AEF}=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\sin A=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

これらと (3) の結果から

$$\begin{aligned}S_2&=\triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{BDE}+\triangle\mathrm{AEF})\\ &=6\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

5. (1) $Z = z^2 + \overline{z}^2 + z \cdot \overline{z} = z \cdot z + \overline{z} \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{z}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overline{Z} &= \overline{z \cdot z + \overline{z} \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{z}} \\ &= \overline{z \cdot z} + \overline{\overline{z} \cdot \overline{z}} + \overline{z \cdot \overline{z}} \\ &= \overline{z} \cdot \overline{z} + \overline{\overline{z}} \cdot \overline{\overline{z}} + \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} \\ &= \overline{z} \cdot \overline{z} + z \cdot z + \overline{z} \cdot z = Z\end{aligned}$$

このとき，$\overline{Z} = Z$ が成り立つので，Z は実数である．

よって，**真**である．

(2) $a = -1$，$b = -2$ を 2 つの方程式 $x^2 - ax + b =$ および $x^2 + ax + 2a - b - 6 = 0$ に代入すると

$$x^2 + x - 2 = 0, \qquad x^2 - x - 6 = 0$$

第 1 式の解は $x = -2,\ 1$，第 2 式の解は $x = -2,\ 3$

第 1 式の実数解は第 2 式の実数解よりそれぞれ 1 小さい 2 つの解をもたないので，**偽**である．

(3) $|\,x\,| + |\,y\,| \leqq 1$ の表す領域を P とすると，P は 4 点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0, -1)$ を頂点とする四角形の内部とその周である．$x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を Q とすると，Q は中心が原点で半径 1 の円の内部と周である．

したがって，$P \subset Q$ であるから，**真**である．

6. (1) p_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に -4 平行移動した放物線は

$$y+4=(x-2)^2-4(x-2)+1 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-8x+9$$

これをさらに x 軸に関して対称移動した放物線 p_2 は

$$-y=x^2-8x+9 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2+8x-9}$$

(2) $p_1 : y=x^2-4x+1$，$p_2 : y=-x^2+8x-9$ の共有点は，この 2 式の連立方程式を解いて　$(1, -2)$，$(5,\ 6)$

この 2 点を通る直線は　$y-(-2)=\dfrac{6-(-2)}{5-1}(x-1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x-4}$

別解

p_1 と p_2 の辺々を加えて x^2 を消去すると

$$2y=4x-8 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-4}$$

(3) p_2 と ℓ で囲まれた区間 $1 \leqq x \leqq 5$ において，p_2 が ℓ の上側にあるので，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \{(-x^2+8x-9)-(2x-4)\}dx \\ &= -\int_1^5 (x-1)(x-5)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(5-1)^3 = \boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

7. 9 個の整数から 3 つ取り出す場合の数は　${}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ (通り)

［1］3 つとも偶数であるとき　${}_4\mathrm{C}_3=4$ (通り)

［2］2 つが奇数で，偶数が 1 つであるとき

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times4=40 \text{ (通り)}$$

3 つの整数の和が偶数となる確率は　$\dfrac{4+40}{84}=\boldsymbol{\dfrac{11}{21}}$

3 つの整数の積が奇数となるのは，3 つとも奇数のときで

$${}_5\mathrm{C}_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10 \text{ (通り)}$$

ゆえに，3 つの整数の積が奇数となる確率は　$\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

3 つの整数の積が偶数となるのは，この事象の余事象であるから

求める確率は　$1-\dfrac{5}{42}=\boldsymbol{\dfrac{37}{42}}$