平成21年度　熊本学園大学一般入学試験問題

# 数学I・数学II・数学A

商　学　部　第　一　部
　(ホスピタリティ・マネジメント学科)
経　　済　　学　　部 (経　済　学　科)
社会福祉学部第一部 (福 祉 環 境 学 科)

(A日程)

平成21年2月8日実施

(70分)

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 21 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

**1.** 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+4} + 6\cdot 2^{2x} - 8^x = 0$

(2) $2\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2(x+4) = -1$

**2.** 次の式を $a + bi$ の形にせよ。ただし，$a$，$b$ は実数で $i$ は虚数単位とする。

(1) $\dfrac{6-5i}{4+2i}$　　(2) $(1+2i)^3$

**3.** 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{C}(m,\ n)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形であるとき，以下の問いに答えよ。ただし，$n \neq 0$ とする。

(1) 頂点 C の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の方程式を $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ とするとき，$x_0$，$y_0$，$r$ の値を求めよ。

(3) 外接円の中心を D とする。CD の延長線と外接円の交点の座標を求めよ。

**4.** 半径 $R$ の円に内接する四角形 ABCD がある。$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 75^\circ$，

$\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{3}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 半径 $R$ を求めよ。

(2) 辺 DA の長さを求めよ。

**5.** 放物線 $y = x^2 + ax + b$ の頂点が放物線 $y = -x^2$ の上を動くとき，以下の問いに答えよ。ただし，$a$ と $b$ は定数とする。

(1) 定数 $b$ の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線の交点の座標と，それらの点を結ぶ線分の中点の座標を求めよ。

(3) (2) で求めた線分の中点の軌跡を求めよ。ただし，交点が 1 つのときは，その交点が中点であるものとする。

**6.** 黒玉 3 個と，それぞれ色が違う色玉 5 個がある。これら 8 個の玉を糸でつないで輪にするとき，色玉が 3 つ以上連ならない輪は何通り考えることができるか。

**7.** 方程式 $7\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin^2 x - \cos x - 3 = 0 \ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right)$ を解け。

**8.** 3 次関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + k$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ とするとき，$y = g(x)$ のグラフと $x$ 軸で囲まれる領域の面積 $S$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値と極小値を，それぞれ $k$ を用いて表せ。

(3) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解がすべて実数であるような $k$ の値の範囲を求めよ。

## 解答例

**1.** (1) $2^{x+4} = 16{\cdot}2^x$，$2^{2x} = (2^x)^2$，$8^x = (2^x)^3$，$2^x = t$ とおくと　$t > 0$

与式から　$16t + 6t^2 - t^3 = 0$

ゆえに　$t(t+2)(t-8) = 0$

$t > 0$ より　$t = 8$

すなわち　$2^x = 2^3$　よって　$\boldsymbol{x = 3}$

(2) 真数は正であるから　$x > 0$，$x + 4 > 0$　すなわち　$x > 0$

方程式を変形すると　$-2\log_2 x + \log_2(x+4) = -1$

したがって　$\log_2 \dfrac{x+4}{x^2} = -1$

ゆえに　$\dfrac{x+4}{x^2} = 2^{-1}$

整理すると　$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = 4}$

**2.** (1) $\dfrac{6-5i}{4+2i} = \dfrac{(6-5i)(2-i)}{2(2+i)(2-i)} = \dfrac{12-16i+5i^2}{2(4-i^2)} = \dfrac{12-16i+5{\cdot}(-1)}{2(4+1)} = \boldsymbol{\dfrac{7-16i}{10}}$

(2) $$\begin{aligned}(1+2i)^3 &= 1^3 + 3{\cdot}1^2{\cdot}2i + 3{\cdot}1(2i)^2 + (2i)^3 \\ &= 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 \\ &= 1 + 6i + 12(-1) + 8(-i) \\ &= \boldsymbol{-11 - 2i}\end{aligned}$$

**3.** (1) $\mathrm{AB}^2 = (3-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 = 4$

△ABC は正三角形であるから，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC}$

$\mathrm{AC}^2 = 4$ より
$$(m-2)^2 + n^2 = 4$$
$$m^2 + n^2 - 4m = 0 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{BC}^2 = 4$ より
$$(m-3)^2 + (n-\sqrt{3})^2 = 4$$
$$m^2 + n^2 - 6m - 2\sqrt{3}n + 8 = 0 \quad \cdots ②$$

① − ② より
$$2m + 2\sqrt{3}n - 8 = 0$$
すなわち
$$m = 4 - \sqrt{3}n \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入して　$(4-\sqrt{3}n)^2 + n^2 - 4(4-\sqrt{3}n) = 0$

整理すると　$4n^2 - 4\sqrt{3}n = 0$

ゆえに　$4n(n-\sqrt{3}) = 0$

$n \neq 0$ より　$n = \sqrt{3}$　これを ③ に代入して　$m = 1$

よって　**C(1, $\boldsymbol{\sqrt{3}}$)**

(2) △ABC は正三角形であるから，その重心と外接円の中心 D は一致するので

$$\left(\frac{2+3+1}{3},\ \frac{0+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{D}\left(2,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{x_0 = 2,\ y_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

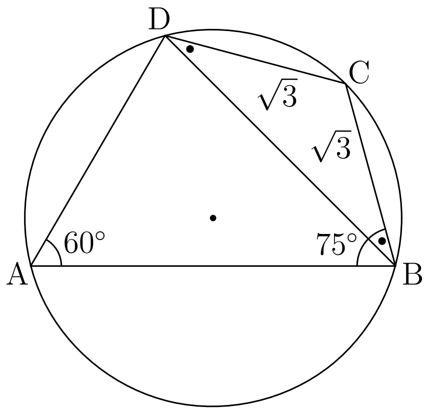
円の半径 $r$ は　$r = \mathrm{DA} = \sqrt{(2-2)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

(3) 求める交点を $\mathrm{E}(x_1,\ y_1)$ とすると，E は D に関して C と対称であるから

$$\frac{x_1+1}{2} = 2,\ \frac{y_1+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad x_1 = 3,\ y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(3,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

**4.** (1) 四角形 ABCD は，円に内接するから




$$\begin{aligned}\angle \mathrm{C} &= 180^\circ - \angle \mathrm{A} \\ &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

△BCD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos 120^\circ \\ &= 9\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathrm{BD} = 3$

△BCD に正弦定理を適用して　$2R = \dfrac{\mathrm{BD}}{\sin C}$

よって　　$R = \dfrac{3}{2\sin 120^\circ} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) △BCD は二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{BCD} = 120^\circ$ より　$\angle\mathrm{DBC} = 30^\circ$

ゆえに　　$\angle\mathrm{ABD} = 75^\circ - \angle\mathrm{DBC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

△ABD に正弦定理を適用して　$\dfrac{\mathrm{DA}}{\sin\angle\mathrm{ABD}} = 2R$

よって　　$\mathrm{DA} = 2\cdot\sqrt{3}\sin 45^\circ = \boldsymbol{\sqrt{6}}$

**5.** (1) $y = x^2 + ax + b$ の右辺を変形すると　$y = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + b$

この放物線の頂点 $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4} + b\right)$ が放物線 $y = -x^2$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = 0}$$

(2) 2 つの放物線 $y = x^2 + ax$ と $y = -x^2$ の共有点の $x$ 座標は，2 次方程式

$$x^2 + ax = -x^2 \quad \text{すなわち} \quad x(2x + a) = 0$$

の解で，これを解いて　$x = 0, -\dfrac{a}{2}$

$y = -x^2$ に代入すると

$x = 0$ のとき $y = 0$,　　$x = -\dfrac{a}{2}$ のとき $y = -\dfrac{a^2}{4}$

よって，2 つの交点 $\boldsymbol{(0,\ 0)}$ と $\boldsymbol{\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}\right)}$ の中点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{a}{4}, -\dfrac{a^2}{8}\right)}$

(3) (2) の結果から

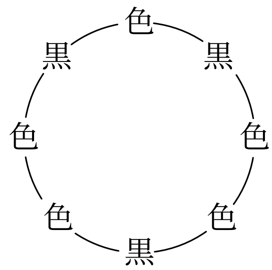
$$x = -\frac{a}{4}, \quad y = -\frac{a^2}{8}$$

とおくと，第 1 式から　$a = -4x$

これを第 2 式に代入して　$y = -\dfrac{(-4x)^2}{8} = -2x^2$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y = -2x^2}$

**6.** 色玉が 3 つ以上連ならないのは，右の図のように黒玉 3 個の間に異なる色玉 5 個が 1 個，2 個，2 個と配置される場合である．




黒玉の間に 1 個だけ配置される色玉の並べ方は　5 通り
残り 4 個の色玉の並べ方は　4! 通り
よって，これらの玉を糸でつないで輪にする総数は

$$\frac{5 \cdot 4!}{2} = \textbf{60} \text{ 通り}$$

**7.** 方程式を変形すると　$7\cos^2 x + (1 - \cos^2 x) - \cos x - 3 = 0$

整理すると　$6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

$$(2\cos x + 1)(3\cos x - 2) = 0$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ より $-1 \leqq \cos x \leqq 0$ であるから

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi}$$

**8.** (1) $g(x)=f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ であるから，
$y=g(x)$ のグラフは，$1 \leqq x \leqq 3$ において　$y \leqq 0$
よって，求める面積 $S$ は

$$S=-3\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\mathbf{4}$$

(2) $f(x)$ の増減表は，次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 極大<br>$k+4$ | $\searrow$ | 極小<br>$k$ | $\nearrow$ |

よって，$x=1$ で**極大値 $\boldsymbol{k+4}$**，$x=3$ で**極小値 $\boldsymbol{k}$**

(3) 3 次方程式 $f(x)=0$ の解がすべて実数であるのは，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸との位置関係により

$$k+4 \geqq 0 \text{ かつ } k \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{-4 \leqq k \leqq 0}$$