平成21年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部(商学科)
経済学部(国際経済学科)　(A日程)
社会福祉学部第一部(子ども家庭福祉学科)

平成21年2月9日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 21 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. $x = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$，$y = \dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ とするとき，以下の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 + xy$

(2) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

(3) $\dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{xy}$

2. 直線 $\ell : y = -2x + 5$ が $x = 2$ で放物線 $y = ax^2 + bx + 1$ に接している。このとき次の問いに答えよ。

(1) a，b の値を求めよ。

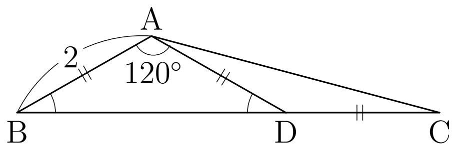
(2) 直線 ℓ と放物線の接点 P を通り，ℓ と直交する直線 m の式を求めよ。

(3) m と放物線の 2 つの交点の座標を求めよ。

3. $x^2 + 2y^2 = 2$ のとき，$2x + y$ の最大値を求めよ。

4. 男子 4 名と女子 4 名を 1 列に並べるとき，女子 4 名が隣り合う並び方は何通りあるか。

5. 右図の $\triangle$ABC において，AB $=$ AD $=$ DC となるように辺 BC 上に点 D をとる。辺 AB の長さが 2，$\angle$BAD の大きさが 120° であるとき，以下の問いに答えよ。



(1) 辺 BD の長さを求めよ。

(2) $\sin C$ と辺 AC の長さを求めよ。

(3) $\triangle$ACD の面積を求めよ。

6. θ が第 2 象限の角であるとき，次の値の正，負を調べよ。

(1) $\sin(\theta + \pi)$

(2) $\sin 2\theta$

(3) $1 - \cos^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$

7. 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+1} - 8^2 = 0$

(2) $2 - \dfrac{1}{2}\log_2(x^2+12) = 0$

8. 次の定積分を求めよ。

$$\int_{-3}^{3}(3x^3 + x^2 + 3x + 2)dx$$

解答例

1. (1)
$$x + y = \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4(3+\sqrt{5}) + 4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 6$$
$$xy = \frac{4}{3-\sqrt{5}} \times \frac{4}{3+\sqrt{5}} = 4$$

ゆえに　$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 6^2 - 4 = \mathbf{32}$

(2) (1) の結果から
$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2 - 2xy} = \frac{6}{6^2 - 2\cdot 4} = \mathbf{\frac{3}{14}}$$

(3) (1) の結果から
$$\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{6^2 - 2\cdot 4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

2. (1) $y = ax^2 + bx + 1$ より　$y' = 2ax + b$

直線 $\ell : y = -2x + 5$ と放物線 $y = ax^2 + bx + 1$ の $x = 2$ における接点 P の座標は $(2,\ 1)$ であり，接線の傾きは -2 であるから

$$4a + 2b + 1 = 1,\ \ 4a + b = -2$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ \ b = 2}$

(2) ℓ に垂直な直線の傾きは　$\dfrac{1}{2}$

直線 m は，点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

(3) $y=\frac{1}{2}x$ と $y=-x^2+2x+1$ から y を消去して，整理すると

$$2x^2-3x-2=0$$

因数分解をして　$(x-2)(2x+1)=0$

したがって　$x=2, -\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x$ に代入すると

$x=2$ のとき　$y=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$x=-\frac{1}{2}$ のとき　$y=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

よって，求める 2 つの交点は　$\mathbf{(2,\ 1)},\ \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)}$

3. $2x+y=k$ とおいて，$y=-2x+k$ を $x^2+2y^2=2$ に代入すると

$$x^2+2(-2x+k)^2=2$$

すなわち　$9x^2-8kx+2k^2-2=0$　$\cdots$①

x の 2 次方程式 ① の係数について

$$D/4=(-4k)^2-9\cdot(2k^2-2)=-2(k^2-9)=-2(k+3)(k-3)$$

また，2 次方程式 ① は実数解をもつので，$D \geqq 0$ より

$$-2(k+3)(k-3) \geqq 0$$

ゆえに　$(k+3)(k-3) \leqq 0$

したがって　$-3 \leqq k \leqq 3$

よって，求める $2x+y$ の最大値は　**3**

4. 女子 4 人をひとまとめにする．
男子 4 人と女子ひとまとめの並び方は，5! 通りある．
また，ひとまとめにした女子 4 人の並び方は，4! 通りある．
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$5!\times 4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{2880}\ (\text{通り})$$

5. (1) $\triangle$ABD に正弦定理を適用して　$\frac{\mathrm{BD}}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$

ゆえに　$\mathrm{BD}=\frac{2\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\angle\mathrm{ACD} = 15^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用して　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2}{\sin 15^\circ}$

ゆえに　$\mathrm{AC} = \dfrac{2\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = 2 \times \dfrac{1}{2} \div \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(3) $\mathrm{AD} = \mathrm{DC} = 2$, $\angle\mathrm{ADC} = 150^\circ$ であるから

$$\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 150^\circ = \mathbf{1}$$

6. (1) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから　$\dfrac{3}{2}\pi < \theta + \pi < 2\pi$　よって　$\boldsymbol{\sin(\theta+\pi) < 0}$

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから　$\pi < 2\theta < 2\pi$　よって　$\boldsymbol{\sin 2\theta < 0}$

(3) $1 - \cos^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2\theta$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから　$-1 < \cos\theta < 0$

よって　$\boldsymbol{1 - \cos^2\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) > 0}$

7. (1) $2^{x+1} - 8^2 = 0$ から　$2^{x+1} = 2^6$

ゆえに　$x + 1 = 6$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 5}$

(2) $2 - \dfrac{1}{2}\log_2(x^2+12) = 0$ から　$\log_2(x^2+12) = 4$

ゆえに　$x^2 + 12 = 2^4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \pm 2}$

8.
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}(3x^3+x^2+3x+2)dx &= \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-3}^{3}\\ &= \left(\frac{3}{4}\cdot 3^4 + \frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right)\\ &\qquad - \left\{\frac{3}{4}(-3)^4 + \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 + 2(-3)\right\}\\ &= \mathbf{30}\end{aligned}$$