平成21年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部(経営学科) 外国語学部(英米学科) 社会福祉学部第一部 (ライフ・ウェルネス学科)	}	(A日程)

平成21年2月10日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 21 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{64}\right)}{\log_2 8}$　　(2) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2^{\frac{1}{3}}}$　　(3) $\left(1000\dfrac{9^{\frac{27}{16}}}{\sqrt{3^{\frac{3}{4}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. $\triangle$ABC の外接円の半径は $\sqrt{2}$，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$，$\sin B = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{6}$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) AC を求めよ。

(2) AB を求めよ。

(3) $\cos A$ を求めよ。

3. 4 個の白玉にそれぞれ 1，3，5，7 の番号をつける。同様に，4 個の赤玉にそれぞれ 2，4，6，8 の番号をつける。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 8 個のすべての玉を 1 つの箱に入れ，同時に 2 個を取り出すとき，数字の合計が 8 以上で，しかもいずれも白玉である確率を求めよ。

(2) 白玉と赤玉を別々の箱に入れ，両方の箱から同時に 1 個ずつ取り出すとき，白玉の数字が赤玉の数字より大きくなる確率を求めよ。

(3) 白玉と赤玉を別々の箱に入れ，両方の箱から同時に 2 個ずつ取り出すとき，白玉の数字の和と赤玉の数字の和が一致する確率を求めよ。

4. $f(x) = x^2 + (a+1)x + \dfrac{a+1}{2}$ とおく。ただし，a は実数の定数である。このとき，すべての実数 x に対して 2 次不等式 $f(x) \geqq 0$ が成立するような a の範囲を求めよ。

5. 直線 $y = x - 5$ と放物線 $y = x^2 - 3x + 1$ の最短距離，およびそれを与える直線上の点と放物線上の点のそれぞれの座標を求めよ。

6. 次の方程式を解け。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\cos 2\theta + \cos\theta\tan\theta = 0$

(2) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

7. 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) = 22$ をみたす。また $y = f(x)$ のグラフの $x = 1$ での接線は $y = -6x + 7$ である。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答例

1. (1) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{64}\right)}{\log_2 8}=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6}{\log_2 2^3}=\dfrac{6}{3}=\mathbf{2}$

(2) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2^{\frac{1}{3}}}=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(3) $\left(1000\dfrac{9^{\frac{27}{16}}}{\sqrt{3^{\frac{3}{4}}}}\right)^{\frac{1}{3}}=10\dfrac{9^{\frac{9}{16}}}{\sqrt{3^{\frac{1}{4}}}}=10\dfrac{3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}=10\cdot 3=\mathbf{30}$

2. (1) 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$

ゆえに $\mathrm{AC}=2R\sin B$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の公式より，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B$ であるから

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ これを解いて $\mathbf{AB=2}$

(3) (1)，(2) の結果から，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2}=\frac{2\sqrt{3}+2}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

3. (1) 8 個から 2 個取る組合せは ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$ (通り)

数字の合計が 8 以上で，しかもいずれも白玉であるのは，以下の 4 通り．

$$\{1,\ 7\},\ \{3,\ 5\},\ \{3,\ 7\},\ \{5,\ 7\}$$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{28}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$

(2) 玉の取り出し方は $4\times 4=16$ (通り)

白玉の数字が赤玉の数字より大きくなるのは，以下の 6 通り．

(白，赤) $=(3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (7,\ 2),\ (7,\ 4),\ (7,\ 6)$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{16}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$

(3) 玉の取り出し方は ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=6\times 6=36$ (通り)

白玉の数字の和と赤玉の数字の和が一致するのは，以下の 6 通り．

$$\{(1,5),(2,4)\},\quad \{(1,7),(2,6)\},\quad \{(3,5),(2,6)\},$$
$$\{(3,7),(2,8)\},\quad \{(3,7),(4,6)\},\quad \{(5,7),(4,8)\}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

4. $f(x)$ の係数について

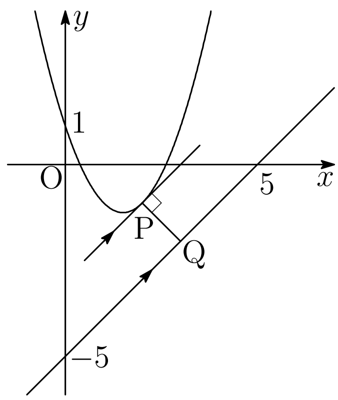
$$D=(a+1)^2-4\cdot1\cdot\frac{a+1}{2}=(a+1)(a-1)$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$D \leqq 0$ が成り立てばよい．

ゆえに　$(a+1)(a-1) \leqq 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 1}$

5. 放物線上の接線で直線 $y=x-5\cdots$① と平行となるとき，放物線 $y=x^2-3x+1$ の接線の傾きが 1 であるから，$y'=2x-3$ より

$$2x-3=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=2$$



接点を P とすると　P$(2,-1)$

P を通り，接線に垂直な直線は，その傾きが -1 であるから

$$y-(-1)=-1(x-2)$$

すなわち　$y=-x+1 \quad \cdots$②

① と ② の交点の座標を Q とすると　Q$(3,-2)$

求める最短距離は PQ であるから

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(3-2)^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{2}$$

よって，最短距離は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，そのときの直線上の点 $\boldsymbol{(3,-2)}$，放物線上の点 $\boldsymbol{(2,-1)}$

6. (1) 方程式 $\cos2\theta+\cos\theta\tan\theta=0$ を変形すると

$$1-2\sin^2\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$$

$$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$$

因数分解をすると　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

よって　$\sin\theta-1=0$　または　$2\sin\theta+1=0$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で　$\sin\theta=1$ を解いて　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解いて　$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

原方程式における $\tan\theta$ から $\theta \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$\boldsymbol{\theta=-\frac{\pi}{6}}$$

(2) 方程式 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}-\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)&=0\\ \frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta&=0\\ (1-\sqrt{3})\sin\theta+(\sqrt{3}-1)\cos\theta&=0\\ \sin\theta-\cos\theta&=0\\ \sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)&=0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$-\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$

この範囲で，方程式 ① を解くと

$$\theta-\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)=22$ であるから

$$\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_{-1}^{1}=22$$

$$\frac{2}{3}a+2c=22$$

整理して　　$a+3c=33 \quad \cdots ①$

$f(x)=ax^2+bx+c$ より　　$f'(x)=2ax+b$

$y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式が $y=-6x+7$ であるから，

接点の座標は $(1,\ 1)$，接線の傾きは -6 である．したがって

$f(1)=1$ より　　$a+b+c=1 \quad \cdots ②$

$f'(1)=-6$ より　　$2a+b=-6 \quad \cdots ③$

①，②，③ を解いて　　$\boldsymbol{a=3,\ b=-12,\ c=10}$