平成21年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

全　　学　　部 (全　学　科) (A日程)

平成21年2月12日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 21 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の各問に答えよ。

(1) 次の 3 元 1 次方程式を解け。

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases}$$

(2) 不等式 $3(x-2)+2x>-2(x+4)$ を解け。

(3) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき $\alpha^2-\alpha$ の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

2. $90^\circ<\theta<180^\circ$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{4}{9}$ のとき，$\cos\theta$ および $\tan\theta$ を求めよ。

3. サイコロを続けて 4 回振るとき出る目について，以下の問いに答えよ。

(1) 6 の目が 1 回も出ない確率を求めよ。

(2) 6 の目が 1 回だけ出る確率を求めよ。

(3) 6 の目が少なくとも 2 回出る確率を求めよ。

4. $54^{10}\div5^5$ の整数部分は何桁か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として計算せよ。

5. $2x-y=4$，$-2\leqq y\leqq4$ のとき，$4x^2+y^2$ のとりうる最大値と最小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

6. $x\geqq3$，$y\geqq4$，$x+2y\leqq20$ を同時に満たす x，y において，$2x+y$ のとりうる最大値とそのときの x，y の値を求めよ。

7. $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ の小数部分を a としたときに $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}$ の値を求めよ。

8. 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4(3x-5)^2dx$$

解答例

1 (1) $\begin{cases} x+y+z=2 & \cdots ① \\ 2x-y-3z=-3 & \cdots ② \\ 2x+4y+z=0 & \cdots ③ \end{cases}$ とおく.

① $\times 3 +$ ② より　$5x+2y=3 \quad \cdots ④$

③ $-$ ① より　$x+3y=-2 \quad \cdots ⑤$

④，⑤ を解くと　$x=1, \ y=-1$

これを ① に代入して　$z=2$

よって　$\boldsymbol{x=1, \ y=-1, \ z=2}$

(2) $3(x-2)+2x > -2(x+4)$

整理すると　$7x > -2$

よって　$\boldsymbol{x > -\dfrac{2}{7}}$

(3) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ より　$2\alpha - 1 = \sqrt{3}\,i$

この式の両辺を平方すると

$$(2\alpha-1)^2 = (-\sqrt{3}\,i)^2$$

ゆえに　$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = -3$

よって　$\boldsymbol{\alpha^2 - \alpha = -1}$

2 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{65}{81}$$

$90^\circ < \theta < 180$ より $\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{65}{81}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{65}}{9}}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{4}{9} \div \left(-\dfrac{\sqrt{65}}{9}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{4}{\sqrt{65}}}$

3 (1) サイコロを 1 回投げるとき，6 の目が出ない確率は　$\dfrac{5}{6}$

よって，4 回投げて 6 の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{625}{1296}}$$

(2) さいころを1回投げるとき，6の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$

よって，4回投げて6の目がちょうど1回出る確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = \boldsymbol{\frac{125}{324}} $$

(3) 求める確率は，(1) と (2) の余事象の確率であるから

$$ 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{125}{324}\right) = \boldsymbol{\frac{19}{144}} $$

4 $\log_{10} 54 = \log_{10} 2{\cdot}3^3 = \log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 = 0.3010 + 3 \times 0.4771 = 1.7323$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

ゆえに $\begin{aligned} \log_{10}(54^{10} \div 5^5) &= 10\log_{10} 54 - 5\log_{10} 5 \\ &= 10 \times 1.7323 - 5 \times 0.6990 \\ &= 13.828 \end{aligned}$

$13 < \log_{10}(54^{10} \div 5^5) < 14$ であるから

$$ \log_{10} 10^{13} < \log_{10}(54^{10} \div 5^5) < \log_{10} 10^{14} $$

よって $\quad 10^{13} < 54^{10} \div 5^5 < 10^{14}$

したがって，$54^{10} \div 5^5$ の**整数部分は14桁**である．

5 $2x - y = 4$ より $2x = y + 4 \cdots$ ① であるから

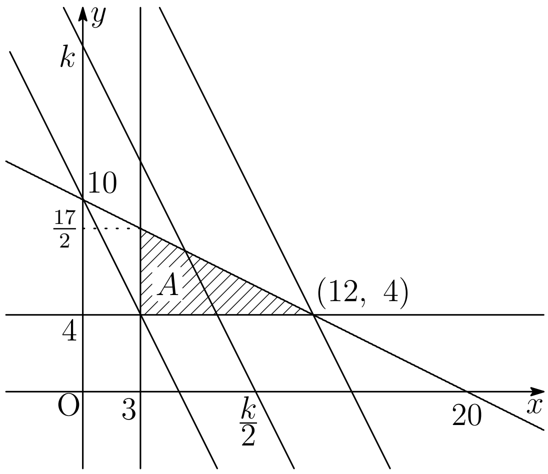
$$ \begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= (2x)^2 + y^2 \\ &= (y+4)^2 + y^2 \\ &= 2y^2 + 8y + 16 \\ &= 2(y+2)^2 + 8 \end{aligned} $$

よって，$4x^2 + y^2$ は $-2 \leqq y \leqq 4$ において，上式および ① から

$y = 4$ すなわち $\boldsymbol{(x,\ y) = (4,\ 4)}$ で**最大値 80** をとり，

$y = -2$ すなわち $\boldsymbol{(x,\ y) = (1, -2)}$ で**最小値 8** をとる．

6 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．領域 A は 3 点 $(3,\ 4)$，$(12,\ 4)$，$(3,\ \frac{17}{2})$ を頂点とする三角形の周および内部である．



$$2x+y=k \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．図から，直線 ① が

$(12,\ 4)$ を通るとき k は最大で　$k=28$

$(3,\ 4)$ を通るとき k は最小で　$k=10$

である．したがって，$2x+y$ は

$\boldsymbol{x=12,\ y=4}$ のとき**最大値 28** をとり，

$\boldsymbol{x=3,\ y=4}$ のとき**最小値 10** をとる．

7
$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$$

$2<2\sqrt{2}=\sqrt{8}<3$ であるから　$5<3+2\sqrt{2}<6$

$3+2\sqrt{2}$ の整数部分は 5，小数部分は a であるから

$$5+a=3+2\sqrt{2} \quad ゆえに \quad a=2\sqrt{2}-2$$

したがって
$$\begin{aligned}\frac{a}{2}+\frac{2}{a}&=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}-2}\\&=(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\&=\sqrt{2}-1+\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

8
$$\begin{aligned}\int_1^4(3x-5)^2dx&=\int_1^4(9x^2-30x+25)dx\\&=\Big[\ 3x^3-15x^2+25x\ \Big]_1^4\\&=(3{\cdot}4^3-15{\cdot}4^2+25{\cdot}4)-(3{\cdot}1^3-15{\cdot}1^2+25{\cdot}1)\\&=\boldsymbol{39}\end{aligned}$$