平成20年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部
(ホスピタリティ・マネジメント学科)
経済学部(経済学科)
社会福祉学部第一部(福祉環境学科)
(A日程)

平成20年2月11日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 20 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 方程式 $|2x-1|+|x-2| = 1-\dfrac{7}{2}x$ を解け。

2. $\dfrac{7x-16}{(x+2)(x^2-3x+5)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{bx+c}{x^2-3x+5}$ が x についての恒等式になるように a，b，c の値を定めよ。

3. 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が 2 つの異なる解 $x=\alpha$ と $x=\beta$ をもつとき，以下の命題の真偽を述べよ。ただし，a，b は実数である。

(1) α と β が互いに共役な複素数であるならば，$b>0$ である。

(2) α と β が実数であれば，2 次方程式 $x^2-2bx+a^2+b^2-4b=0$ も 2 つの実数解を持つ。

(3) 2 次方程式 $x^2+cx-d=0$ の 2 つの解が $x=\alpha-a$ と $x=\beta-a$ であれば，$c=a$，$d=b$ である。

4. 直線 ℓ_m は点 (2, 14) を通り，点 (6, 12) で直線 ℓ_C と垂直に交わる。円 C は y 軸に接し，点 (1, 7) を通り，その中心は直線 ℓ_C 上にある。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 直線 ℓ_C の方程式を求めよ。

(2) 円 C の中心の x 座標を a として，円 C の半径および中心の座標を a で表せ。

(3) a の値を求めよ。

5. $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ のとき，関数 $y = \dfrac{1}{\cos^2\theta}(1+\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta)$ について，以下の問に答えよ。

(1) $t=\tan\theta$ とおいて y を t の関数として表すとともに，t の値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値とそのときの θ の値，および y の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

6. 多くの玉を入れることができる袋に，最初，白と黒の玉が 1 個ずつ入っている。袋から 1 個玉を取り出すごとに，同じ色の玉をもう 1 個つけて袋に戻すものとする。このとき以下の問に答えよ。

(1) 2 回目に取り出す玉が白である確率を求めよ。

(2) 3 回目に玉を取り出すとき，玉が白である確率と黒である確率が等しくなる場合の確率を求めよ。

(3) 最初から n 回連続で白を取り出す確率を求めよ。

7. $f(x) = \log_a x$，$a > 1$ とする。$f(16) = 2$ であるとき，以下の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(8)$ の値を求めよ。

(3) x が 1 から a^k まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を k を用いて表せ。ただし，$k > 0$ とする。

8. $f(x) = ax + b$ とする。$\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x^3 + x^2$ であるとき，a と b の値を求めよ。

解答例

1. ［1］ $x < \dfrac{1}{2}$ のとき，$|\,2x-1\,| = -2x+1$，$|\,x-2\,| = -x+2$ であるから

方程式は　$(-2x+1) + (-x+2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = -4$

これは，$x < \dfrac{1}{2}$ を満たすから，解である．

［2］ $\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$ のとき，$|\,2x-1\,| = 2x-1$，$|\,x-2\,| = -x+2$ であるから

方程式は　$(2x-1) + (-x+2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = 0$

これは，$\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$ に反するから，解ではない．

［3］ $2 \leqq x$ のとき，$|\,2x-1\,| = 2x-1$，$|\,x-2\,| = x-2$ であるから

方程式は　$(2x-1) + (x-2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = \dfrac{8}{13}$

これは，$2 \leqq x$ に反するから，解ではない．

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x = -4}$

2. 等式の両辺に $(x+2)(x^2-3x+5)$ を掛けると，次の等式が得られる．

$$7x-16=a(x^2-3x+5)+(x+2)(bx+c)$$

右辺を x について整理すると

$$7x-16=(a+b)x^2+(-3a+2b+c)x+(5a+2c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b,\ 7=-3a+2b+c,\ -16=5a+2c$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=-2,\ b=2,\ c=-3}$

3. (1) $x^2-ax+b=0$ が互いに共役な複素数をもつための条件は　$D<0$

ゆえに　　$(-a)^2-4\cdot1\cdot b<0$　すなわち　$b>\dfrac{a^2}{4}\geqq 0$

このとき，$b>0$ であるから，本命題は**真**である．

(2) α と β が実数であるとき，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の係数について

$(-a)^2-4\cdot1\cdot b\geqq 0$　すなわち　$a^2-4b\geqq 0$　$\cdots$①

2 次方程式 $x^2-2bx+a^2+b^2-4b=0$ の判別式 D は

$$D/4=(-b)^2-1\cdot(a^2+b^2-4b)=-(a^2-4b)$$

① より，$D\leqq 0$ となるから，本命題は**偽**である．

(3) 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=b\quad\cdots①$$

2 次方程式 $x^2+cx-d=0$ の解が $\alpha-a$，$\beta-a$ であるから，解と係数の関係により

$$(\alpha-a)+(\beta-a)=-c,\quad (\alpha-a)(\beta-a)=-d$$

ゆえに　　$(\alpha+\beta)-2a=-c,\quad \alpha\beta-a(\alpha+\beta)+a^2=-d$

① により　　$a-2a=-c,\quad b-a\cdot a+a^2=-d$

よって　　$c=a,\quad d=-b$

よって，本命題は**偽**である．

4. (1) 直線 ℓ_m は，2 点 $(2,\ 14)$，$(6,\ 12)$ を通るので，その傾きは

$$\frac{12-14}{6-2}=-\frac{1}{2}$$

ℓ_C は，ℓ_m に垂直なので，その傾きは 2 であり，点 $(6,\ 12)$ を通るので，ℓ_C の方程式は

$$y-12=2(x-6) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x}$$

(2) 円 C の中心は直線 ℓ_C 上にあるから，$(a,\ 2a)$ とおける．
また C は，y 軸に接し点 $(1,\ 7)$ を通るので，中心の x 座標 a は　$a>0$
ゆえに，円の半径は　a
よって，**C は中心 $(a,\ 2a)$，半径 a の円である $(a>0)$．**

(3) (2) から円 C の方程式は　$(x-a)^2+(y-2a)^2=a^2 \quad (a>0)$
これが点 $(1,\ 7)$ を通るから

$$(1-a)^2+(7-2a)^2=a^2$$

整理して　$2a^2-15a+25=0$
ゆえに　$(a-5)(2a-5)=0$
$a>0$ に注意して　$\boldsymbol{a=5,\ \frac{5}{2}}$

5. (1) $t=\tan\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ より　$0 \leqq t \leqq 1$
また

$$y=\frac{1}{\cos^2\theta}(1+\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta-4\tan\theta$$

ここで，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ であるから

$$y=2\tan^2\theta-4\tan\theta+1$$

よって　$\boldsymbol{y=2t^2-4t+1 \quad (0 \leqq t \leqq 1)}$

(2) (1) の結果から　$y=2(t-1)^2-1$
よって　$t=0$　すなわち　**$\theta=0^\circ$　のとき　最大値 1**
$t=1$　すなわち　**$\theta=45^\circ$ のとき　最小値 -1**

6. (1) ［1］1 回目白，2 回目白である確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

［2］1 回目黒，2 回目白である確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

［1］，［2］は互いに排反であるから　$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) 1 回目と 2 回目に白と黒が 1 回ずつ出る確率であるから

［1］1 回目黒，2 回目白である確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

［2］1 回目白，2 回目黒である確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

［1］，［2］は互いに排反であるから　$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

(3) 最初から n 回連続して白を取り出す確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

7. (1) $f(16)=2$ より

$$\log_a 16=2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=16$$

$a>1$ であるから　$\boldsymbol{a=4}$

(2) $f(8)=\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(3) x が 1 から 4^k まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(4^k)-f(1)}{4^k-1}=\frac{\log_4 4^k-\log_4 1}{4^k-1}=\boldsymbol{\frac{k}{4^k-1}}$$

8. $f(t) = at + b$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= \int_0^x (x-t)(at+b)\,dt \\ &= x\int_0^x (at+b)\,dt - \int_0^x (at^2+bt)\,dt \\ &= x\left[\,\frac{at^2}{2}+bt\,\right]_0^x - \left[\,\frac{at^3}{3}+\frac{bt^2}{2}\,\right]_0^x \\ &= x\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right) - \left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right) \\ &= \frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x^3 + x^2$ より，同じ次数の項の係数が等しいので

$$\frac{a}{6} = 1,\ \ \frac{b}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = 6,\ b = 2}$$