平成20年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部	(商学科)	(A日程)
経済学部	(国際経済学科)	
社会福祉学部第一部	(子ども家庭福祉学科)	

平成20年2月10日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 20 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

$$(3-2i)x+(-2+4i)y=-1+6i$$

2. 次の方程式を解け。

(1) $|\,96-2^{x+3}\,|=32$

(2) $\begin{cases} 3x^2-11x-4=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\pi=1 \end{cases}$

3. 以下の問に答えよ。

(1) 命題「三角形の三つの内角の大きさを A，B，C としたとき，$\cos A\cos B\cos C<0$ ならば三角形は鈍角三角形である」の真偽を調べよ。

(2) 命題「$a \geqq 3$ ならば直線 $y=x-4$ は放物線 $y=x^2+ax-3$ と交わる」の逆の真偽を調べよ。

(3) 命題「実数 x，y について $(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 16$ ならば $x^2+y^2 \leqq 1$」の逆の真偽を調べよ。

4. 関数 $f(x)=x^2-5x+4$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ と x 軸の 2 つの交点の座標を求めよ。

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(m,\ m^2-5m+4)$ における接線の式を求めよ。

(3) (1) で求めた 2 つの交点における $y=f(x)$ の接線の式を求めよ。

5. 点 P，Q，R を中心とする 3 つの互いに外接する円の半径はそれぞれ 7cm，4cm，3cm である。$\angle$RPQ を A，$\angle$PQR を B，$\angle$QRP を C とするとき，$\sin A:\sin B:\sin C$ を求めよ。

6. $f(x)=x^2$，$g(x)=3x^2-2x$ とする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは 3 点で交わる。交点を x 座標の小さいものから点 A，B，C とするとき，以下の問に答えよ。

(1) 点 A，B，C の座標を求めよ。

(2) 点 A と点 B を結ぶ線分および $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) $y=x^a$ のグラフが点 C を通るとき，$\log_{a^2} f(x)$ は，$\beta\log_3 x$ という形で表すことができる。β の値を求めよ。ただし，$x>0$ とする。

7. 各面に数字を一つずつ書いた立方体 (正六面体) がある。数字は 1，2，3，6 のいずれかで，どの数字も少なくとも一つの面に書かれている。この立方体をサイコロのように使ったときに，出る目の期待値が 3 である。1，2，3，6 のそれぞれの面の数を求めよ。

8. 3 次関数 $f(x)$ は $x=2$ で極小値 -10 をとる。また $f'(-1)=0$，$f'(0)=-12$ である。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。また $-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

1. 整理すると　$(3x-2y)+(-2x+4y)i=-1+6i$

$3x-2y$，$-2x+4y$ は実数であるから

$$3x-2y=-1,\ \ -2x+4y=6$$

これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$

2. (1) $|\,96-2^{x+3}\,|=32$ から

$$96-2^{x+3}=\pm 32$$

ゆえに　$2^{x+3}=64,\ 128$

$$2^{x+3}=2^6,\ 2^7$$

したがって　$x+3=6,\ 7$

よって　$\boldsymbol{x=3,\ 4}$

(2) $\begin{cases} 3x^2-11x-4=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\pi=1 \end{cases}$

第 1 式から　$(x-4)(3x+1)=0$

$$x=4,\ -\frac{1}{3}$$

このうち，第 2 式を満たすものは　$\boldsymbol{x=4}$

3. (1) $\cos A\cos B\cos C<0$ のとき，A，B，C のひとつだけが鈍角で，残りの 2 つが鋭角である．ゆえに，△ABC は鈍角三角形である．よって，命題は**真**である．

(2) $y=x-4$ と $y=x^2+ax-3$ から y を消去すると

$$x-4=x^2+ax-3 \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a-1)x+1=0$$

直線と放物線が共有点をもつとき

$$(a-1)^2-4\cdot1\cdot1 \geqq 0$$

$$(a+1)(a-3) \geqq 0$$

ゆえに　　$a \leqq -1,\ 3 \leqq a$

本命題の逆

「直線 $y=x-4$ は放物線 $y=x^2+ax-3$ と交わるならば $a \geqq 3$」

は**偽**である.

(3) $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域は円

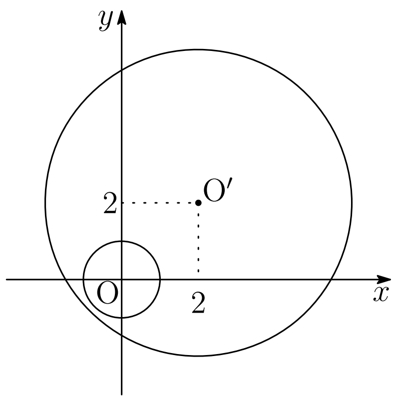
$$x^2+y^2=1 \cdots ①$$

の内部である.

$(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 16$ の表す領域は円

$$(x-2)^2+(y-2)^2=16 \cdots ②$$

の内部である.



これらの円の中心を O，O′ とすると

$$\mathrm{OO'}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$$

①，② の円の半径は 1，4 であるから

$$\sqrt{8}+1<4$$

ゆえに，円 ① は，円 ② の内部にある.

したがって，本命題の逆

「実数 x，y について $x^2+y^2 \leqq 1$ ならば $(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 16$」

は**真**である.

4. (1) x 軸との交点の x 座標は

$$x^2-5x+4=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=1,\ 4$$

ゆえに，x 軸との交点の座標は　**(1，0)，(4，0)**

(2) $f(x)$ を微分すると　$f'(x)=2x-5$

点 $(m,\ m^2-5m+4)$ における接線の傾きは　$2m-5$

ゆえに，この点における接線の方程式は

$$y-(m^2-5m+4)=(2m-5)(x-m)$$

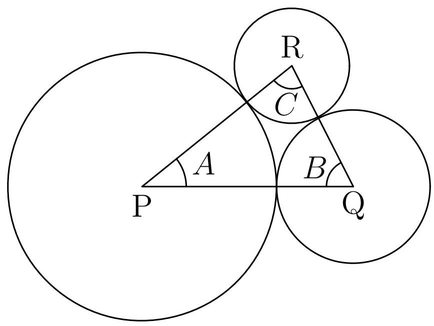
よって　$\boldsymbol{y=(2m-5)x-m^2+4}$

(3) 2 点 $(1,\ 0),\ (4,\ 0)$ における接線の方程式は，

$m=1,\ m=4$ をそれぞれ (2) の結果に代入して

$$\boldsymbol{y=-3x+3,\ y=3x-12}$$

5. 右の図から



$$\mathrm{QR}=4+3=7$$
$$\mathrm{RP}=3+7=10$$
$$\mathrm{PQ}=7+4=11$$

正弦定理により

$$\sin A:\sin B:\sin C=\mathrm{QR}:\mathrm{RP}:\mathrm{PQ}$$
$$=\mathbf{7:10:11}$$

6. (1) $y=x^3\cdots$①，$y=3x^2-2x\cdots$② とおく．

① と ② の共有点の x 座標は

$$x^3=3x^2-2x$$

ゆえに　$x(x-1)(x-2)=0$

よって　$x=0,\ 1,\ 2$

これらの値を ① に代入して　**A(0，0)，B(1，1)，C(2，8)**

(2) 2 点 A(0, 0), B(1, 1) を通る直線の方程式は　　$y = x$

$y = 3x^2 - 2x$ は下に凸の放物線であるから，線分 AB とこの放物線で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{x - (3x^2 - 2x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-3x^2 + 3x)\,dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(3) $y = x^\alpha$ のグラフが点 C(2, 8) を通るから

$$8 = 2^\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 3$$

したがって　$\log_{\alpha^2} f(x) = \log_{3^2} x^3 = \dfrac{\log_3 x^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}\log_3 x$

よって　　$\boldsymbol{\beta = \frac{3}{2}}$

7. 1, 2, 3, 6 の面の数が，それぞれ a, b, c, d であるとすると

面の数から　　$a + b + c + d = 6$　　$\cdots$ ①

期待値が 3 であるから　　$\dfrac{a + 2b + 3c + 6d}{6} = 3$

すなわち　　$a + 2b + 3c + 6d = 18$　　$\cdots$ ②

② − ① より　　$b + 2c + 5d = 12$　　$\cdots$ ③

③ において，b, c, d は自然数であるから　$d = 1$

$d = 1$ を ③ に代入して　　$b + 2c = 7$　　$\cdots$ ④

① から　　$b + c \leqq 4$　　$\cdots$ ⑤

④, ⑤ から　　$b = 1$, $c = 3$

$b = 1$, $c = 3$, $d = 1$ を ① に代入して　$a = 1$

よって，1, 2, 3, 6 の面の数はそれぞれ　**1, 1, 3, 1**

8. $f(x)$ は3次関数であるから，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく

(1) $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$　$\cdots$ ①

$x = -1,\ 2$ で $f'(x) = 0$ であるから，解と係数の関係により

$$-1 + 2 = -\frac{2b}{3a},\ \ -1 \cdot 2 = \frac{c}{3a}$$

$$b = -\frac{3a}{2},\ \ c = -6a$$

これらを ① に代入して　$f'(x) = 3ax^2 - 3ax - 6a$

$f'(0) = -12$ であるから　$-6a = -12$　ゆえに　$a = 2$

よって　　$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$

(2) (1) の結果を積分して

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(2) = -10$ であるから

$$2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + C = -10 \quad \text{ゆえに} \quad C = 10$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10}$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-35	$\nearrow$	極大 17	$\searrow$	極小 -10	$\nearrow$	1

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ **で最大値** $\boldsymbol{17}$**，**$\boldsymbol{x = -3}$ **で最小値** $\boldsymbol{-35}$ をとる．