平成19年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

経　済　学　部		(A日程)
(リーガルエコノミクス学科)		
外　国　語　学　部	(東アジア学科)	
社会福祉学部第一部	(社会福祉学科)	

平成19年2月12日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 19 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 以下の問に答えよ。

(1) x^2+4x+5 を複素数の範囲で因数分解せよ。

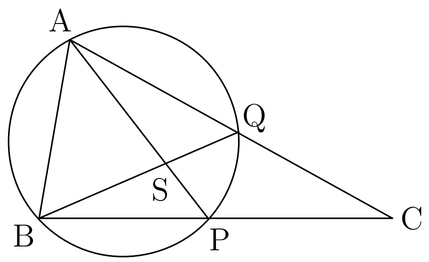
(2) $\log_3 \dfrac{5}{18} - \log_2 9 - \log_3 \dfrac{15}{2} + 2\log_2 6$ を簡単にせよ。

2. 以下の方程式を解け。

(1) $|\,1+5\cos x\,| = 1-\cos x$　(ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$)

(2) $|\,x^2-3x-4\,| = \dfrac{1}{2}x-2$

3. 右図のように，△ABC の 2 つの頂点 A と B を通る円が辺 BC と交わる点を P，辺 AC と交わる点を Q とし，また A と P，B と Q を結ぶ 2 本の線分の交点を S とする。BS = 4，QS = 3，AS = 6，∠QAS = 20°，∠ASB = 70° であるとき，∠PCQ の大きさと線分 PS の長さを求めよ。



4. A(3, 1)，B(9, 4) を結ぶ線分について，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P と，2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 P を通り線分 AB と垂直に交わる直線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(3) 直線 ℓ_2 は傾きが $-\dfrac{1}{3}$ であり，点 Q を通っている。このとき，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を中心として点 A を通る円の方程式を求めよ。

5. 2 次方程式 $x^2-2(k-1)x-k^2+5k-4=0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つとき，k の値の範囲を求めよ。

6. 自然数 m，n，L_1，L_2 について $L_1=m+n+2$，$L_2=mn+m+n+1$ という関係が成立するとき，「L_1 が奇数であるならば，L_2 は偶数である」という命題の逆と対偶は，いずれも「$\boxed{①}$が$\boxed{②}$であるならば，$\boxed{③}$は$\boxed{④}$である」という形式で述べることができる。逆と対偶のそれぞれについて，①〜④ に入れるのに最も適当なものを以下の (a)〜(h) から選んで記号で答えよ。また，逆と対偶のそれぞれについて，それが真であるか偽であるかを答えよ。

(a) m	(b) n	(c) L_1	(d) L_2
(e) 自然数	(f) 整　数	(g) 奇　数	(h) 偶　数

7. 放物線 $y=-x^2+2x+8$ と直線 $y=a$ $(a>0)$ が異なる 2 点で交わっている。この 2 点のうち，x 座標がより小さい方を P，より大きい方を Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の取り得る値の範囲を求めよ。また，P，Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 放物線と x 軸の 2 つの共有点の中点を M とし，P と Q と M を結んで三角形を作るとき，その三角形の面積 S_t を a の関数として表したうえで，S_t の最大値を与える a の値を求めよ。

(3) a が S_t の最大値を与える値をとるとき，放物線と $y=a$ で囲まれる領域の面積 S_u の値を求めよ。

解答例

1. (1) 2 次方程式 $x^2+4x+5=0$ の解が $x=-2\pm i$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+4x+5 &= \{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\} \\ &= \boldsymbol{(x+2-i)(x+2+i)} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} &\log_3\frac{5}{18}-\log_2 9-\log_3\frac{15}{2}+2\log_2 6 \\ =&\log_2(6^2\div 9)+\log_3\left(\frac{5}{18}\div\frac{15}{2}\right) \\ =&\log_2 4+\log_3\frac{1}{27} \\ =&\log_2 2^2+\log_3 3^{-3}=2+(-3)=\boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

2. (1) 左辺 $\geqq 0$ であるから，$1-\cos x\geqq 0$ に注意して　$1+5\cos x=\pm(1-\cos x)$

ゆえに　$1+5\cos x=1-\cos x$　から　$\cos x=0$

$1+5\cos x=-(1-\cos x)$　から　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{x=90^\circ，120^\circ}$

(2) 左辺 $\geqq 0$ であるから，$\dfrac{1}{2}x-2\geqq 0$ より　$x\geqq 4$　$\cdots$①

ゆえに　$x^2-3x-4=\dfrac{1}{2}x-2$　から　$(x-4)(2x+1)=0$

$x^2-3x-4=-\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$　から　$(x-4)(2x+3)=0$

① より　$\boldsymbol{x=4}$

3. $\angle\mathrm{QAS} = 20^\circ$，$\angle\mathrm{ASB} = 70^\circ$ より　$\angle\mathrm{AQS} = \angle\mathrm{ASB} - \angle\mathrm{QAS} = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$

$\angle\mathrm{SQC} = 180^\circ - \angle\mathrm{AQS} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\triangle\mathrm{SAQ} \backsim \triangle\mathrm{SBP}$ であるから，$\angle\mathrm{SQA} = \angle\mathrm{SPB}$ より　$\angle\mathrm{SQC} = \angle\mathrm{SPC} = 130^\circ$

$\angle\mathrm{QSP} = \angle\mathrm{ASB}$ (対頂角) であるから　$\angle\mathrm{QSP} = 70^\circ$

四角形 QSPC の内角の和は 360° であるから

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PCQ} &= 360^\circ - \angle\mathrm{CQS} - \angle\mathrm{QSP} - \angle\mathrm{SPC}\\ &= 360^\circ - 130^\circ - 70^\circ - 130^\circ\\ &= \mathbf{30^\circ}\end{aligned}$$

方べきの定理により　$\mathrm{PS}\cdot\mathrm{SA} = \mathrm{BS}\cdot\mathrm{SQ}$ であるから

$\mathrm{PS} \times 6 = 4 \times 3$　ゆえに　$\mathbf{PS = 2}$

設問の誤り

本問題も，平成 19 年 2 月 10 日に実施された一般入学試験問題 (A 日程) の 6 と同様に，角の大きさと辺の長さの整合性を欠いた問題である．たとえば，$\triangle\mathrm{QAS}$ に正弦定理を適用すると $\mathrm{QS} : \mathrm{AS} = \sin\angle\mathrm{QAS} : \sin\angle\mathrm{SQA}$ である．$\angle\mathrm{QAS} = 20^\circ$，$\angle\mathrm{SQA} = 50^\circ$ であれば，$\sin 20^\circ = 0.3420$，$\sin 50^\circ = 0.7660$ であるから，辺の長さの比 $\mathrm{QS} : \mathrm{AS} = 3 : 6$ と不整合である．

4. (1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{1\cdot3 + 2\cdot9}{2+1},\ \frac{1\cdot1 + 2\cdot4}{2+1}\right) \quad \text{より} \quad \mathbf{(7,\ 3)}$$

線分 AB を $2:1$ に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-1\cdot3 + 2\cdot9}{2-1},\ \frac{-1\cdot1 + 2\cdot4}{2-1}\right) \quad \text{より} \quad \mathbf{(15,\ 7)}$$

(2) 線分 AB の傾きは

$$\frac{4-1}{9-3} = \frac{1}{2}$$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = -2$$

直線 ℓ_1 の方程式は

$$y - 3 = -2(x - 7) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -2x + 17}$$

(3) 直線 ℓ_2 の方程式は

$$y-7=-\frac{1}{3}(x-15) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{3}x+12$$

ℓ_1，ℓ_2 の交点を C とすると，C の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=-2x+17 \\ y=-\frac{1}{3}x+12 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (3,\ 11)$$

A$(3,\ 1)$，C$(3,\ 11)$ 間の距離 AC は　AC $=10$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-11)^2=100}$

5. この 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする．方程式が異なる正の実数解をもつのは，次が成り立つときである．

$$D>0 \quad \text{かつ} \quad \alpha+\beta>0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta>0$$

ここで

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-(k-1)\}^2-1\cdot(-k^2+5k-4) \\ &= 2k^2-7k+5 \\ &= (k-1)(2k-5) \end{aligned}$$

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=2(k-1),\ \alpha\beta=-k^2+5k-4=-(k-1)(k-4)$$

したがって，$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ を満たせばよいので

$$\begin{cases} (k-1)(2k-5)>0 \\ 2(k-1)>0 \\ -(k-1)(k-4)>0 \end{cases}$$

第 1 式から　$k<1,\ \frac{5}{2}<k \quad \cdots①$

第 2 式から　$k>1 \quad \cdots②$

第 3 式から　$1<k<4 \quad \cdots③$

①，②，③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\frac{5}{2}<k<4}$

6.

	①	②	③	④	真偽
逆	**d**	**h**	**c**	**g**	**偽**
対偶	**d**	**g**	**c**	**h**	**真**

$L_1=(m+1)+(n+1)$，$L_2=(m+1)(n+1)$

L_2 が奇数であれば，$m+1$ および $n+1$ は奇数であるから，L_1 は偶数

7. (1) $y=-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$ であるから，$y=a\ (a>0)$ とこの放物線が 2 点で交わるとき a の値の範囲は　$0<a<9$

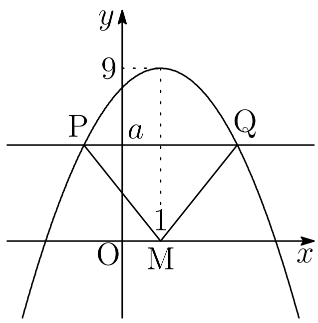
P，Q の x 座標は，方程式

$$-x^2+2x+8=a$$

を解いて　$x=1\pm\sqrt{9-a}$

よって　　$\mathbf{P(1-\sqrt{9-a},\ a)}$，

$\mathbf{Q(1+\sqrt{9-a},\ a)}$



(2) 右の図から

$$S_t=\frac{1}{2}\times \mathrm{PQ}\times a=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{9-a}\times a=a\sqrt{9-a}$$

$f(a)={S_t}^2$ とおくと　$f(a)=a^2(9-a)=-a^3+9a^2\quad(0<a<9)$

微分すると　$f'(a)=-3a^2+18a$

$\qquad\qquad\qquad\quad=-3a(a-6)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=0,\ 6$

増減表は，右のようになる．

a	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$f(a)$ が最大のとき，S_t は最大となる．

ゆえに S_t の最大値を与える a の値は　　$\boldsymbol{a=6}$

(3) $a=6$ であるから，(1) の結果より P，Q の x 座標はそれぞれ

$$x=1-\sqrt{3},\ x=1+\sqrt{3}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}S_u&=\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{(-x^2+2x+8)-6\}\,dx\\&=-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(x^2-2x-2)\,dx\\&=-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3=\boldsymbol{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$