

平成19年度 熊本学園大学一般入学試験問題

## 数学I・数学II・数学A

|                                                                              |   |       |
|------------------------------------------------------------------------------|---|-------|
| 商 学 部 第 一 部<br>(ホスタピリティ・マネジメント学科)<br>経 済 学 部 (経 済 学 科)<br>社会福祉学部第一部 (福祉環境学科) | } | (A日程) |
|------------------------------------------------------------------------------|---|-------|

平成19年2月11日実施

(70分)

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5. 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

## 平成 19 年度 熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

## 数学 I・数学 II・数学 A

1. 以下の方程式を解け。

(1)  $(4^x)^2 + 2 \cdot 4^x - 8 = 0$

(2)  $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3(27x^2)$

2.  $p = 2 + i$ ,  $q = 1 - i$  のとき,  $p^3 - q^3 + p^2 - q^2$  を  $a + bi$  の形で表せ。ただし,  $a$ ,  $b$  は実数とする。

3.  $x$  が正で,  $0 < a < b$  であるとする。このとき, 以下の問に答えよ。

(1)  $f(x) = x + \frac{b^2}{x+a}$  の最小値と, そのときの  $x$  の値を求めよ。

(2)  $g(x) = \frac{x+a}{x^2+ax+b^2}$  の最大値を求めよ。

4. 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフが点  $(1, 2k)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 8)$  を通り, かつ  $k \neq -1$  であるとき, 以下の問に答えよ。

(1)  $k$  を用いて  $f(x)$  を表せ。

(2)  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸との共有点の個数は,  $k$  の値によってどのように変わるか。

5. ある  $\triangle ABC$  の三辺の長さは  $BC = 6$ ,  $AC = b$ ,  $AB = 8$  であり, その三つの頂角について  $\angle A = A$ ,  $\angle B = B$ ,  $\angle C = C$  としたときに,  $C = 2A$  という関係が成立する。 $\triangle ABC$  が鋭角三角形のとき, 以下の値を求めよ。

(1)  $\cos A$

(2)  $\sin A$

(3)  $b$

6. 集合  $A = \{n | n \text{ は自然数}\}$  を全体集合として, その部分集合  $B$ ,  $C$ ,  $D$  をそれぞれ  $B = \{2n | n \in A\}$ ,  $C = \{2n - 1 | n \in A\}$ ,  $D = \{3n | n \in A\}$  とするとき, 次の命題が真か偽かを答えよ。

(1)  $\overline{B}$  の要素は  $\overline{B} \cap B$  の要素である。

(2)  $\overline{B}$  の要素は  $C$  の要素である。

(3)  $C \cap D$  の要素は  $B$  の要素である。

(4)  $\overline{C} \cap D$  の要素は  $B$  の要素である。

(5)  $\overline{C} \cup D$  の要素は  $B$  の要素である。

7. (1) 5都市 A, B, C, D, Eがある。これらの都市を重複なく訪問する順序は何通りあるか。
- (2) Aの直後にEを, およびEの直後にAを訪れることができない場合, 5都市を重複なく訪問する順序は何通りあるか。
8. (1) 放物線  $y = -x^2 + 10x - 21$  と  $x$  軸で囲まれる図形の面積  $S_1$  を求めよ。
- (2) 放物線  $y = x^2 + 2x - 1$  と直線  $y = x + a$  で囲まれる図形の面積  $S_2$  が  $\frac{9}{2}$  のとき,  $a$  の値を求めよ。

### 解答例

1. (1)  $4^x = t$  とおくと  $t > 0$   
 方程式は  $t^2 + 2t - 8 = 0$   
 ゆえに  $(t + 4)(t - 2) = 0$   
 $t > 0$  より  $t = 2$   
 したがって  $4^x = 2$  すなわち  $2^{2x} = 2^1$   
 よって,  $2x = 1$  を解いて  $x = \frac{1}{2}$
- (2) 真数は正であるから  $x > 0$ , 方程式を変形すると  
 $\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 27 + \log_3 x^2$   
 $(\log_3 x)^2 = 3 + 2 \log_3 x$   
 整理すると  $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$   
 ゆえに  $(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 3) = 0$   
 よって  $\log_3 x = -1, 3$  これを解いて  $x = \frac{1}{3}, 27$
2.  $p + q = (2 + i) + (1 - i) = 3$ ,  $p - q = (2 + i) - (1 - i) = 1 + 2i$ ,  
 $pq = (2 + i)(1 - i) = 3 - i$  であるから

$$\begin{aligned}
 p^3 - q^3 + p^2 - q^2 &= (p - q)(p^2 + pq + q^2) + (p + q)(p - q) \\
 &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq\} + (p + q)(p - q) \\
 &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq + (p + q)\} \\
 &= (1 + 2i)\{3^2 - (3 - i) + 3\} \\
 &= (1 + 2i)(9 + i) = \mathbf{7 + 19i}
 \end{aligned}$$

3. (1)  $f(x) = (x+a) + \frac{b^2}{x+a} - a$ ,  $x+a > 0$ ,  $b > 0$  であるから  
 相加平均, 相乗平均の大小関係により

$$f(x) = (x+a) + \frac{b^2}{x+a} - a \geq 2\sqrt{(x+a) \times \frac{b^2}{x+a}} - a = 2b - a$$

等号が成り立つのは  $(x+a) = \frac{b^2}{x+a}$

ゆえに  $(x+a)^2 = b^2$

$$x+a = \pm b$$

$$x = -a \pm b$$

$x > 0$ ,  $0 < a < b$  であるから  $x = -a + b$

よって,  $f(x)$  は  $x = -a + b$  のとき **最小値  $2b - a$**  をとる.

(2)  $x+a > 0$  であるから  $g(x) = \frac{x+a}{x(x+a)+b^2} = \frac{1}{x+\frac{b^2}{x+a}} = \frac{1}{f(x)}$

(1) の結果から,  $f(x)$  が最小となるとき,  $g(x)$  は最大となる.

よって,  $g(x)$  は  $x = -a + b$  のとき **最大値  $\frac{1}{2b-a}$**  をとる.

4. (1)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  とする.

グラフが3点  $(1, 2k)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 8)$  を通るから

$$2k = a + b + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3 = 4a + 2b + c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$8 = 9a + 3b + c \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ から } 3a + b = 3 - 2k \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ から } 5a + b = 5 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解くと } a = k + 1, b = -5k$$

これらを  $\textcircled{1}$  に代入して  $c = 6k - 1$

よって  $f(x) = (k+1)x^2 - 5kx + 6k - 1$

- (2) 関数  $f(x)$  の判別式  $D$  は

$$D = (-5k)^2 - 4(k+1)(6k-1) = k^2 - 20k + 4$$

したがって, 関数の  $x$  軸との共有点の個数は  $k \neq -1$  に注意して

$k < -1$ ,  $-1 < k < 10 - 4\sqrt{6}$ ,  $10 + 4\sqrt{6} < k$  のとき  $D > 0$  より **2個**

$k = 10 \pm 4\sqrt{6}$  のとき  $D = 0$  より **1個**

$10 - 4\sqrt{6} < k < 10 + 4\sqrt{6}$  のとき  $D < 0$  より **0個**

5. (1) 正弦定理により  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

これに  $C = 2A$ ,  $a = BC = 6$ ,  $c = AB = 8$  を代入すると

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \frac{6}{\sin A} &= \frac{8}{\sin 2A} \\ \frac{6}{\sin A} &= \frac{8}{2 \sin A \cos A} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \cos A = \frac{2}{3}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$(3) (\text{第1}) \text{ 余弦定理により } b = c \cos A + a \cos C$$

$$\text{このとき, } \cos C = \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\text{ゆえに } b = 8 \times \frac{2}{3} + 6 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{14}{3}$$

#### 設問の誤り

問題文に  $\triangle ABC$  は鋭角三角形とあるが,  $\cos C < 0$  であるため,  $C$  は鈍角となる. したがって, 本問題は深刻かつ重大な出題ミスである. 本来,  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるという条件無しに, 解答は得られる設問である.

6. (1) 偽 (2) 真 (3) 偽 (4) 真 (5) 偽

7. (1) A, B, C, D, E の5つの並べ方であるから

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (通り)}$$

(2) A と E をひとまとめにする.

A と E 以外の3つとひとまとめの並び方は,  $4!$  通りある.

また, ひとまとめにした A と E の並び方は,  $2!$  通りある.

A と E が続く方法は,  $4! \times 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 = 48$  通りある.

よって, A の直後に E を, および E の直後に A を訪れない場合の総数は

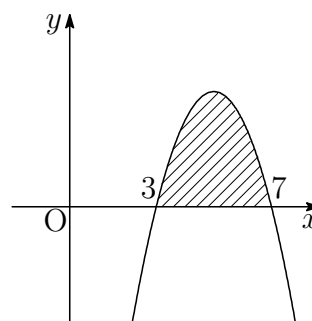
$$120 - 48 = 72 \text{ (通り)}$$

8. (1) この放物線と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標は、  
 $-x^2 + 10x - 21 = 0$  を解いて

$$x = 3, 7$$

$3 \leq x \leq 7$  では  $y \geq 0$  であるから、求める面積  $S_1$  は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_3^7 (-x^2 + 10x - 21) dx \\ &= - \int_3^7 (x-3)(x-7) dx \\ &= - \left( -\frac{1}{6} \right) (7-3)^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



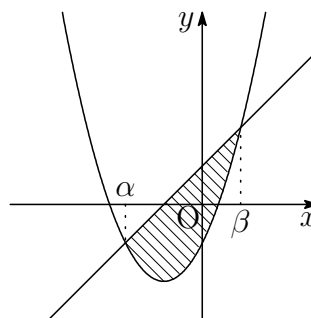
- (2) 放物線  $y = x^2 + 2x - 1$  と直線  $y = x + a$  の共有点の  $x$  座標は、方程式

$$x^2 + 2x - 1 = x + a$$

$$\text{すなわち } x^2 + x - a - 1 = 0$$

の解であり、この解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = -a - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$



放物線と直線で囲まれた部分の面積が  $S_2$  は、右の図および ① から

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x+a) - (x^2 + 2x + a)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + x - a - 1) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{9}{2} \text{ であるから } \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{9}{2}$$

$$\text{ゆえに } (\beta - \alpha)^3 = 27$$

$$\text{よって } \beta - \alpha = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて, } \alpha = -2, \beta = 1, a = 1 \quad (\text{答}) \mathbf{a = 1}$$