平成19年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部	(商学科)	(A日程)
経済学部	(国際経済学科)	
社会福祉学部第一部	(子ども家庭福祉学科)	

平成19年2月10日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 19 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x - 15 \times 2^x - 16 = 0$

(2) $9^x - \dfrac{28}{3} \times 3^x + 3 > 0$

2. $p = 3 + 4i$，$q = 3 - 4i$ のとき，$R = p^2 + q^2 + 7p + 5q + 8$ を $a + bi$ の形で表せ。ただし，a，b は実数とする。

3. 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(1) = -1$，$f(2) = 3$ を満たしている。このとき，以下の問に答えよ。

(1) b，c を a で表せ。

(2) $f(x)$ のグラフの頂点の x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ である場合の a，b，c の値を求めよ。

4. $\dfrac{q+r}{2p} = \dfrac{r-p}{2q} = \dfrac{3p+q}{2r}$ のとき，この式の値を求めよ。ただし，$p \neq 0$，$q \neq 0$，$r \neq 0$ で，しかも $p + q + r \neq 0$ である。

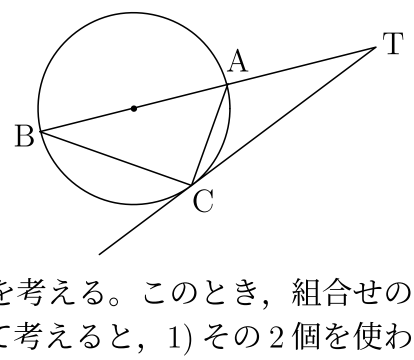
5. $f(x) = a\sin(bx + c)$ とする。$f(x)$ が次の 3 つの条件を満たすとき，a，b，c の値を求めよ。解は弧度法で表せ。ただし，$a > 0$，$0 < b < 4$，$0 \leqq c \leqq \pi$ とする。

条件 1. $f(x)$ は最大値 2π をとる。

条件 2. どんな x についても，$f(x + \pi) = f(x)$。

条件 3. x が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は -8。

6. 右図では，△ABC は円に内接し，辺 AB は円の中心を通っている。また，T は頂点 C における円の接線と AB を延長した線の交点である。$\angle$ATC $= 40°$，円の半径が $\dfrac{5}{2}$，AT $= 4$ のとき，$\angle$BAC の大きさと線分 TC の長さを求めよ。



7. 異なる n 個のものの中から r 個のものを選ぶことを考える。このとき，組合せの数は，n 個の中からあらかじめ 2 個のものを分けて考えると，1) その 2 個を使わずに選ぶ方法と，2) その 2 個のうちの 1 個だけを使って選ぶ方法と，3) その 2 個両方を使って選ぶ方法の数の和になると考えられる。このことから以下の式が常に成り立つ。自然数 a，b，c の値を求めよ。ただし，n と r はどの組合せの計算も行えるようなものとする。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{(n-2)}\mathrm{C}_r + a \times {}_{(n-b)}\mathrm{C}_{(r-c)} + {}_{(n-2)}\mathrm{C}_{(r-2)}$$

8. 3 次関数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ について，以下の問に答えよ。

(1) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフと $x = 0$ で接する直線の式を求めよ。

(3) (2) で求めた直線が，再び $y = f(x)$ のグラフと交わる点の x 座標を求めよ。

(4) (2) で求めた直線と $y = f'(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

1. (1) $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$，$2^x = X$ とおくと $X > 0$

与式から　$X^2 - 15X - 16 = 0$

ゆえに　$(X+1)(X-16) = 0$

$X > 0$ であるから　$X = 16$

すなわち　$2^x = 2^4$　よって　$\boldsymbol{x = 4}$

(2) $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$，$3^x = X$ とおくと $X > 0$

与式から　$X^2 - \frac{28}{3}X + 3 > 0$

$3X^2 - 28X + 9 > 0$

ゆえに　$(3X-1)(X-9) > 0$

$X > 0$ に注意して　$0 < X < \dfrac{1}{3},\ 9 < X$

すなわち　$0 < 3^x < 3^{-1},\ 3^2 < 3^x$　よって　$\boldsymbol{x < -1,\ 2 < x}$

2. $p + q = (3+4i) + (3-4i) = 6$，$pq = (3+4i)(3-4i) = 9 + 16 = 25$ より

$$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 6^2 - 2\cdot 25 = -14$$

したがって　$R = (p^2 + q^2) + 7p + 5q + 8$

$= -14 + 7(3+4i) + 5(3-4i) + 8 = \boldsymbol{30 + 8i}$

3. (1) $f(1) = -1$ から　$a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -1$

$f(2) = 3$ から　$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 3$

整理して　$a + b + c = -1$　$\cdots$ ①

$4a + 2b + c = 3$　$\cdots$ ②

① − ② より　$-3a - b = -4$　ゆえに　$\boldsymbol{b = -3a + 4}$

これを ① に代入して　$a + (-3a+4) + c = -1$　ゆえに　$\boldsymbol{c = 2a - 5}$

(2) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の頂点の x 座標は $x=-\dfrac{b}{2a}$ であるから

条件より　$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}$　すなわち　$b=a$

(1) の結果より　$a=-3a+4$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$

さらに　　　　$\boldsymbol{b=1,\ c=-3}$

4. $\dfrac{q+r}{2p}=\dfrac{r-p}{2q}=\dfrac{3p+q}{2r}=k$ とおくと

$$\begin{aligned} q+r&=2pk\\ r-p&=2qk\\ 3p+q&=2rk \end{aligned}$$

これらの 3 式の辺々を加えて

$$2p+2q+2r=2pk+2qk+2rk$$

整理して　$(p+q+r)-(p+q+r)k=0$

すなわち　$(p+q+r)(1-k)=0$

$p+q+r\neq 0$ であるから　$1-k=0$　すなわち　$k=\mathbf{1}$

5. 条件 1 より $a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=2\pi}$

条件 2 より　$2\pi\sin\{b(x+\pi)+c\}=2\pi\sin(bx+c)$

$$\sin\{(bx+c)+b\pi\}=\sin(bx+c)$$

このとき，整数 n を用いて $b\pi=2n\pi$ とかける．

よって，$b=2n$ および $0<b<4$ より　$\boldsymbol{b=2}$

関数 $f(x)=2\pi\sin(2x+c)$ において，$x=0$ から $x=\dfrac{\pi}{2}$ までの平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}+c)-2\pi\sin(2\cdot 0+c)}{\frac{\pi}{2}-0}&=4\sin(\pi+c)-4\sin c\\ &=-8\sin c \end{aligned}$$

条件 3 より $-8\sin c=-8$ であるから　$\sin c=1$

$0\leqq c\leqq\pi$ であるから　　$\boldsymbol{c=\dfrac{\pi}{2}}$

6. 接弦定理により　$\angle ACT = \angle CBA = \theta$ とおくと

AB は円の直径であるから　$\angle BCT = \theta + 90°$

$\triangle BCT$ について　$\theta + (\theta + 90°) + 40° = 180°$

これを解いて　　$\theta = 25°$

$\angle BAC = \angle ACT + \angle ATC$ であるから

$$\angle BAC = 25° + 40° = \mathbf{65°}$$

次に，$\triangle TAC \backsim \triangle TCB$ であるから　$TA : TC = TC : TB$

ゆえに　　$TC^2 = TA \cdot TB$

よって　　$TC^2 = 4 \times 9$　これを解いて　$\mathbf{TC = 6}$

別解　円の中心を O とすると，$OC \perp TC$ であるから

$$TC = \sqrt{OT^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$$

設問の誤り

円の中心を O とする．

AT = 4 であれば　　$\sin \angle OTC = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2} + 4} = \dfrac{5}{13} < \dfrac{1}{2}$

このとき，$\angle ATC < 30°$ であるから，$\angle ATC = 40°$ はありえない．
この点に関して拙者が同大学入試課に問い合わせたところ，試験ではこのことに気付かず，訂正されることはなかったそうである．確かに数学 A では，角度と長さを独立して扱うため，正解した受験生の中にもこの点に気付かなかったかもしれない．しかし作問者は，これらの整合性に配慮すべきであり，設問の内容を本来であれば，次のようにすべきであったと申し入れておいた．

訂正文

右図では，$\triangle ABC$ は半径 $\dfrac{5}{2}$ の円に内接し，辺 AB は円の中心を通っている。また，T は頂点 C における円の接線と AB を延長した線の交点である。$\angle ATC = 40°$ のとき，$\angle BAC$ の大きさを求めよ。また $AT = 4$ のとき，線分 TC の長さを求めよ。

7. 異なる n 個から r 個を取り出すとき，特定の 2 個 a，b について，これらを含むか含まないかで次のような組ができる．

a と b を含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-2)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}$ に等しい．

a だけを含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-1)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}$ に等しい．

b だけを含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-1)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}$ に等しい．

a も b も含まない組の総数は，$(n-2)$ 個から r 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r}$ に等しい．

よって，和の法則により　${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n-2}\mathrm{C}_{r} + 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}$

したがって　　$\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=1}$

8. (1) $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$ であるから

$-3x^2 + 4x - 1 = 0$ を解いて　　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3},\ 1}$

(2) $f(0) = 1$，$f'(0) = -1$ であるから，求める接線の方程式は

$y - 1 = -1(x - 0)$　すなわち　$\boldsymbol{y = -x + 1}$

(3) $y = -x + 1$ と $y = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ の交点の x 座標は，y を消去して

$$-x + 1 = -x^3 + 2x^2 - x + 1$$

すなわち　　$x^2(x - 2) = 0$

ゆえに　　$x = 0,\ 2$

したがって，求める x 座標は　$\boldsymbol{x = 2}$

(4) 直線 $y = -x + 1$ と放物線 $y = -3x^2 + 4x - 1$ で囲まれる部分の面積を求めればよい．直線 $y = -x + x$ と放物線 $y = -3x^2 + 4x - 1$ の共有点の x 座標は

$$-x + 1 = -3x^2 + 4x - 1$$

整理して　$3x^2 - 5x + 2 = 0$

すなわち　$(x - 1)(3x - 2) = 0$

ゆえに　$x = \dfrac{2}{3},\ 1$

このとき，放物線は直線の上側にあるので，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}}^{1} \{(-3x^2 + 4x - 1) - (-x + 1)\}\,dx \\ &= -\int_{\frac{2}{3}}^{1} (x - 1)(3x - 2)\,dx \\ &= -3\int_{\frac{2}{3}}^{1} (x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{54}} \end{aligned}$$