平成19年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商 学 部 第 一 部 (経 営 学 科)　}
外 国 語 学 部 (英 米 学 科)　} (A日程)

平成19年2月13日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 19 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の方程式を解け。

(1) $2^{2x+2} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_2(3-x) = \log_2(x-1)$

2. 次の関数の周期と値域を求めよ。

(1) $y = 3\cos\theta + 1$

(2) $y = \cos 2\theta + 2\cos^2\theta$

3. $y = (x+a)(x-2a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $81a$ であるという。定数 a の値を求めよ。ただし，$a > 0$ とする。

4. 直線 $l : y = kx$ が x 軸の正の向きとなす角は，直線 $m : y = \dfrac{1}{2}x + 2$ と直線 $n : y = 2x - 1$ とがなす鋭角に等しいという。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 直線 m と直線 n の交点の座標を求めよ。

(2) 直線 m が x 軸の正の向きとなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ を求めよ。

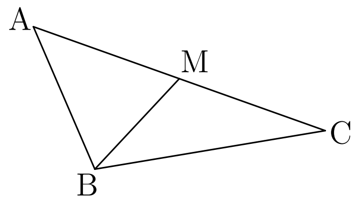
(3) k の値を求めよ。

5. 図のように，△ABC において辺 AC に中点 M をとるとき，以下の問に答えよ。ただし，各辺の長さは，辺 AB $= 2$，辺 BC $= 3$，辺 AC $= 4$ とする。

(1) 辺 BM の長さを求めよ。

(2) ∠BMC $= \alpha$ とおくとき，$\sin\alpha$ を求めよ。

(3) △BMC の面積を求めよ。



6. 役員 3 名を含む 7 名の生徒を 2 つに分ける方法は何通りあるか。ただし，どちらにも必ず 1 名は役員が含まれるものとする。

7. 5 個のコインがある。それぞれ片面に 2，3，5，7，11 が記されており，もう片面はすべて 1 が記されている。5 つのコインを同時に投げ，表に出た 5 つの数字を掛け合わせる。以下の確率を計算せよ。なお，すべてのコインはどちらの面も出る確率が等しいものとする。

(1) 掛け合わせた数が，1 になる確率。

(2) 掛け合わせた数が，素数になる確率。

(3) 掛け合わせた数が，10 の倍数になる確率。

(4) 掛け合わせた数が，10 の倍数になるが，6 の倍数にならない確率。

解答例

1. (1) $2^{2x+2} = 2^{2x}\cdot 2^2 = 4\cdot(2^x)^2$，$2^x = X$ とおくと $X > 0$

$$4X^2 - 17X + 4 = 0$$

ゆえに　$(X-4)(4X-1) = 0$

$X > 0$ に注意して　$X = 4,\ \dfrac{1}{4}$

すなわち　$2^x = 2^2$ または $2^x = 2^{-2}$　よって　$\boldsymbol{x = \pm 2}$

(2) 真数は正であるから　$3 - x > 0$ かつ $x - 1 > 0$

すなわち　$1 < x < 3$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2(3-x) = \log_2(x-1)^2$

よって　$3 - x = (x-1)^2$

したがって　$(x+1)(x-2) = 0$

① に注意して　$\boldsymbol{x = 2}$

2. (1) **周期は　$\boldsymbol{2\pi}$**

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より　$-3 \leqq 3\cos\theta \leqq 3$

したがって　$-2 \leqq 3\cos\theta + 1 \leqq 4$

よって，**値域は　$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 4}$**

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$ であるから

$$y = \cos 2\theta + (\cos 2\theta + 1) = 2\cos 2\theta + 1$$

よって，**周期は**　$2\pi \div 2 = \boldsymbol{\pi}$

$-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ より　$-2 \leqq 2\cos\theta \leqq 2$

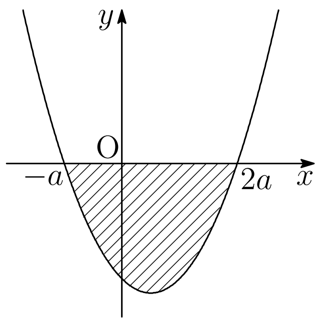
したがって　$-1 \leqq 2\cos 2\theta + 1 \leqq 3$

よって，**値域は　$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 3}$**

3. この放物線と x 軸の共有点の x 座標は　$x=-a,\ 2a$

$-a \leqq x \leqq 2a$ では　　$y \leqq 0$

ゆえに，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_{-a}^{2a}\{-(x+a)(x-2a)\}\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2a-(-a)\}^3=\frac{9a^3}{2}$$

条件より　$\dfrac{9a^3}{2}=81a$　ゆえに　$a(a^2-18)=0$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=3\sqrt{2}}$

4. (1) 連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+2 \\ y=2x-1 \end{cases}$ を解いて　$x=2,\ y=3$

ゆえに，**交点の座標は (2，3)**

(2) $\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{1}{2}}$

(3) 直線 n が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\tan\alpha=2$

直線 m と直線 n のなす鋭角は $\alpha-\theta$ であるから

$$\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{2-\dfrac{1}{2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{k=\pm\dfrac{3}{4}}$

5. (1) $\mathrm{BM}=x$, $\angle\mathrm{BMC}=\alpha$ とする．

$\triangle\mathrm{BMC}$ に余弦定理を適用すると

$$3^2=x^2+2^2-2x\cdot 2\cos\alpha$$
$$5=x^2-4x\cos\alpha \quad \cdots ①$$

$\triangle\mathrm{BMA}$ に余弦定理を適用すると

$$2^2=x^2+2^2-2x\cdot 2\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$0=x^2+4x\cos\alpha \quad \cdots ②$$

① と ② の辺々を加えて　$2x^2=5$

$x>0$ であるから　$\mathbf{BM}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{2}}$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ を ② に代入して　$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{8}$

$\sin\alpha>0$ であるから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\tfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{54}{64}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\triangle\mathrm{BMC}=\frac{1}{2}\mathrm{BM}\cdot\mathrm{MC}\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times 2\times\frac{3\sqrt{6}}{8}=\frac{\mathbf{3\sqrt{15}}}{\mathbf{8}}$$

6. 役員 3 名を 2 名と 1 名に分る方法は　${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

残りの 4 名を役員 2 名の組と役員 1 名の組に分ける方法は　2^4 通り

よって，分け方の総数は　${}_3\mathrm{C}_2\times 2^4=3\times 16=\mathbf{48}$ (通り)

7. (1) 5 つのコインがすべて 1 になる確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}$

(2) 4 つのコインが 1 で，1 つだけ 1 以外になる確率であるから

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{32}}$$

(3) 2 と 5 が出る確率であるから　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(4) 2 と 5 が出て，3 が出ない確率であるから　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$