平成19年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

全　　学　　部 (全　学　科) (A日程)

平成19年2月8日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 19 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2(\sin 30^\circ)$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3})$

2. $\log_{10} 5 = a$，$\log_{10} 6 = b$ とするとき，次の式を a と b を使って表せ。

(1) $\log_{10} 2$　　(2) $\log_{10} 3$　　(3) $\log_2(4.5)\cdot\log_{10} 2$

3. ある地域の天気について，晴れの日の翌日に晴れとなる確率は 60% ，雨になる確率は 40% である。また，雨の日の翌日に晴れとなる確率は 30% ，雨になる確率は 70% である。今日が晴れのとき，翌々日が雨になる確率を求めよ。ただし，天気はその前日の天気のみによって決まるとする。

4. 直線 $y = x$ と曲線 $y = x^2 - 2x$ に囲まれた領域 (境界も含む) の格子点 (x および y の値が整数) の x 座標と y 座標の値をそれぞれ X，Y とする。$X + Y$ の値が 1 である点を点 A，4 である点を点 B とするとき，次の問に答えよ。

(1) AB 間の距離を求めよ。
(2) 点 A から点 B に移動するとき，最短経路は何通りあるか。ただし，領域内の格子点を x 軸に平行に，または y 軸に平行に結んだ線分上のみを移動できるものとする。

5. 1 から 200 までの整数のうち，次の条件をみたす数はいくつあるか。

(1) 2，3 のいずれによっても割り切れる。
(2) 2，3，5 のいずれによっても割り切れる。
(3) 2，3 のいずれによっても割り切れるが，5 では割り切れない。

6. 次の方程式を解け。

(1) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 365$　　(2) $x^2 + 2|\,x - 1\,| = 5$

7. 円に内接する四角形 ABCD において，AB = 3，BC = 5，CD = 6，DA = 8 のとき，$\cos A$，$\sin A$，およびこの四角形の面積 S を求めよ。

8. 関数 $y = |\,4x^2 - 4x - 3\,|$ について次の問に答えよ。

(1) この関数のグラフ上の点 (0, 3) における接線を ℓ とするとき，ℓ の傾きを求めよ。
(2) この関数のグラフ上の点 (2, 5) における接線と ℓ の交点の座標を求めよ。
(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,4x^2 - 4x - 3\,|\,dx$ を求めよ。

解答例

1. (1) $\log_2(\sin 30^\circ) = \log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = \boldsymbol{-1}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3}) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 3^{\frac{1}{2}}) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} = \mathbf{1}$

2. (1) $\log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{10}{5} = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = \boldsymbol{1 - a}$

(2) (1) の結果を利用する．

$\log_{10} 3 = \log_{10} \dfrac{6}{2} = \log_{10} 6 - \log_{10} 2 = b - (1 - a) = \boldsymbol{a + b - 1}$

(3) (1),(2) の結果を利用する．

$$\log_2(4.5) \cdot \log_{10} 2 = \frac{\log_{10}(4.5)}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} 2 = \log_{10}(4.5) = \log_{10} \frac{3^2}{2}$$
$$= 2\log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 2(a + b - 1) - (1 - a) = \boldsymbol{3a + 2b - 3}$$

3. ［1］晴・晴・雨の場合の確率は $\dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{10} = \dfrac{24}{100}$

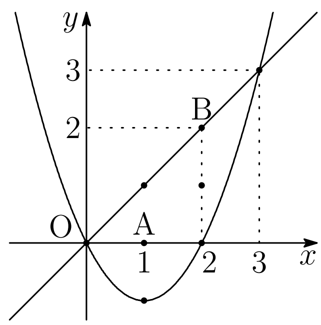
［2］晴・雨・雨の場合の確率は $\dfrac{4}{10} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{28}{100}$

［1］，［2］より，求める確率は $\dfrac{24}{100} + \dfrac{28}{100} = \dfrac{52}{100} = \boldsymbol{\dfrac{13}{25}}$

4. (1) 右図の格子点 $(X,\ Y)$ のうち，
$X + Y = 1$ を満たす点 A の座標は $(1,\ 0)$，
$X + Y = 4$ を満たす点 B の座標は $(2,\ 2)$

したがって

$\mathrm{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$



(2) $\mathrm{A} \to (2,\ 0) \to (2,\ 1) \to \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \to (1,\ 1) \to (2,\ 1) \to \mathrm{B}$

の **2 通り**である．

5. (1) 1 から 200 までの整数のうち，2，3 のいずれによっても割り切れる数は

$\{6 \cdot 1,\ 6 \cdot 2,\ 6 \cdot 3,\ \cdots, 6 \cdot 33\}$ の **33 個**

(2) 1 から 200 までの整数のうち，2，3，5 のいずれによっても割り切れる数は

$\{30 \cdot 1,\ 30 \cdot 2,\ 30 \cdot 3,\ \cdots, 30 \cdot 6\}$ の **6 個**

(3) (1),(2) の結果から　$33 - 6 = \mathbf{27}$ (個)

6. (1) $$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=365$$

左辺を展開すると $$3x^2+6x+5=365$$

整理して $$x^2+2x-120=0$$

左辺を因数分解して $$(x+12)(x-10)=0$$

ゆえに $$\boldsymbol{x=-12,\ 10}$$

(2) $x^2+2|x-1|=5$

［1］ $x \geqq 1$ のとき，$|x-1|=x-1$ であるから

$$x^2+2(x-1)=5$$

整理して　$x^2+2x-7=0$

ゆえに　$x=-1\pm 2\sqrt{2}$

$x \geqq 1$ に注意して　$x=-1+2\sqrt{2}$

［2］ $x<1$ のとき，$|x-1|=-x+1$ であるから

$$x^2+2(-x+1)=5$$

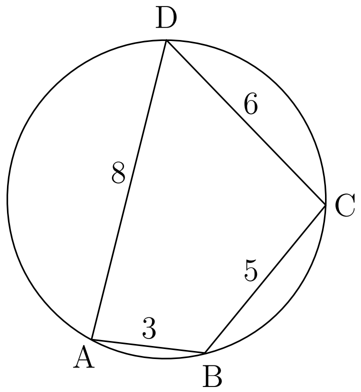
整理して　$x^2-2x-3=0$

ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$

$x<1$ に注意して　$x=-1$

［1］，［2］より　(答) $\boldsymbol{x=-1+2\sqrt{2},\ -1}$

7. $\triangle$ABD において, 余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 8^2+3^2-2{\cdot}8{\cdot}3\cos A\\ &= 73-48\cos A\end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$C = 180^\circ - A$$

$\triangle$BCD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 5^2+6^2-2{\cdot}5{\cdot}6\cos(180^\circ - A)\\ &= 61-60(-\cos A)\\ &= 61+60\cos A\end{aligned}$$

よって　　$73-48\cos A = 61+60\cos A$　　これを解いて　$\boldsymbol{\cos A = \dfrac{1}{9}}$

$\sin A > 0$ であるから　$\sin A = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\ &= \frac{1}{2}{\cdot}8{\cdot}3\sin A+\frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}6\sin(180^\circ - A)\\ &= 12\sin A+15\sin A\\ &= 27\sin A = 27\times\frac{4\sqrt{5}}{9} = \boldsymbol{12\sqrt{5}}\end{aligned}$$

8. (1) $x=0$ のとき $4x^2-4x-3=-3<0$ であるから

$$y=-4x^2+4x+3 \quad \text{ゆえに} \quad y'=-8x+4$$

$x=0$ のとき $y'=4$ であるから，求める**傾きは　4**

(2) $x=2$ のとき $4x^2-4x-3=5>0$ であるから

$$y=4x^2-4x-3 \quad \text{ゆえに} \quad y'=8x-4$$

$x=2$ のとき $y'=12$ であるから，点 $(2,\ 5)$ における接線の方程式は

$$y-5=12(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y=12x-19$$

ℓ の方程式は

$$y-3=4(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y=4x+3$$

であるから，交点の座標は

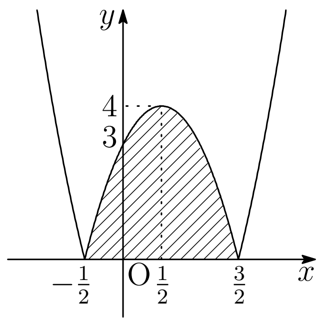
連立方程式 $\begin{cases} y=12x-19 \\ y=4x+3 \end{cases}$ を解いて $\left(\boldsymbol{\dfrac{11}{4}},\ \boldsymbol{14}\right)$

(3) $4x^2-4x-3=(2x+1)(2x-3)$ であるから，

$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ において　　$4x^2-4x-3 \leqq 0$

このとき　　$|\,4x^2-4x-3\,|=-4x^2+4x+3$

したがって



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,4x^2-4x-3\,|\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-4x^2+4x+3)\,dx$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot(-4)\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$