平成18年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

経　済　学　部
(リーガルエコノミクス学科)
外　国　語　学　部 (東アジア学科)
社会福祉学部第一部 (社会福祉学科)
(A日程)

平成18年2月13日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成18年度　熊本学園大学一般入学試験(A日程)

数学I・数学II・数学A

1. $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$，$y = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2$　　(2) $x^4 - x^2y^2 + y^4$

2. (1) から (3) のそれぞれについて，値が大きいのはどちらか，a または b で答えよ。

(1) $a = 8^{\frac{1}{6}}$,　$b = 64^{\frac{1}{10}}$

(2) $a = \sqrt[3]{3}$,　$b = 3\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$

(3) $a = \log_3 5$,　$b = \dfrac{5}{3}$

3. 2次方程式 $x^2 + 5x + k = 0$ の2つの解の比が $2:3$ となるような k の値を求めよ。

4. 長さが1，3，5，6，8の棒がそれぞれ1本ずつある。いま棒1本を1辺として三角形を作る場合，以下の問に答えよ。

(1) 三角形を作ることができる棒の選び方は何通りあるか。

(2) 無作為に3本の棒を選んだとき，三角形を作ることができる確率を求めよ。

5. $0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$，$0^\circ \leqq \beta \leqq 90^\circ$ の α と β に対して

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = 1 \\ \cos\alpha + \sin\beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

が成立するとき，$\alpha + \beta$ の値を求めよ。

6. 関数 $f(x) = ax^3 - bx$ (ただし，$a > 0$，$b > 0$) が極大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。このとき以下の問に答えよ。

(1) 定数 a の値を b を用いて表せ。

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を b を用いて表せ。

7. 以下の問に答えよ。

(1) 点 $(5, -3)$ を通り，直線 $\ell_1 : 2x - y - 8 = 0$ に垂直に交わる直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

(2) ℓ_1 と ℓ_2 の交点を中心とする，半径 $2\sqrt{2}$ の円 C の方程式を求めよ。

(3) 円 C と x 軸の 2 つの交点 P_1，P_2 の座標を求めよ。ただし x 座標の大きい方を P_2 とする。

(4) 円 C の中心と P_1，P_2 の 3 点を通る放物線の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ としたとき，a，b，c の値を求めよ。

(5) (4) で求めた放物線と x 軸で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

8. x，y が $2x + y = 1$ および $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たすとき，xy の最大値と最小値を求めよ。

解答例

1. (1) $x+y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)+2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3-1}=2\sqrt{3}$

$xy=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\times 2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4}{3-1}=2$

したがって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\times 2=\mathbf{8}$

(2) (1) の結果から

$x^4-x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-3(xy)^2=8^2-3\times 2^2=\mathbf{52}$

2. (1) $a=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}$，$b=64^{\frac{1}{10}}=(2^6)^{\frac{1}{10}}=2^{\frac{3}{5}}$

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}$ であるから　$a<b$　(答) $\boldsymbol{b}$

(2) $a=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$b=3\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{3}}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

$3^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$ であるから　$a<b$　(答) $\boldsymbol{b}$

(3) $a=\log_3 5=\dfrac{1}{3}\log_3 5^3=\dfrac{1}{3}\log_3 125$

$b=\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}\log_3 3=\dfrac{1}{3}\log_3 3^5=\dfrac{1}{3}\log_3 243$

$\dfrac{1}{3}\log_3 125<\dfrac{1}{3}\log_3 243$ であるから　$a<b$　(答) $\boldsymbol{b}$

3. 2 つの解は 2α，3α と表すことができる．

解と係数の関係から　$2\alpha+3\alpha=-5$，　$2\alpha\cdot 3\alpha=k$

すなわち　$5\alpha=-5$，　$6\alpha^2=k$

よって　$\alpha=-1$，　$k=6(-1)^2=\mathbf{6}$

4. (1) 三角形を作ることができるのは，次の **3 通り**である．

$\{3, 5, 6\}$，$\{3, 6, 8\}$，$\{5, 6, 8\}$

(2) (1) の結果から，求める確率は

$$\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$

三角形の存在

また，正の数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は，次の不等式が成り立つことである．

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|<\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

← $|\boldsymbol{A}|$ は $\boldsymbol{A}$ の絶対値を表す

とくに a が最大辺のときは $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ が成り立つことである．

5. $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=\sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned}(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\alpha+\sin\beta)^2&=1^2+(\sqrt{3})^2\\(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)&=4\\2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)&=4\\2+2\sin(\alpha+\beta)&=4\\\sin(\alpha+\beta)&=1\quad\cdots①\end{aligned}$$

$0^\circ\leqq\alpha\leqq90^\circ$，$0^\circ\leqq\beta\leqq90^\circ$ より　$0^\circ\leqq\alpha+\beta\leqq180^\circ$ であるから，① より

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ}$$

6. (1) $f'(x)=3ax^2-b$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{b}{3a}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{b}{3a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値 $f\left(-\sqrt{\dfrac{b}{3a}}\right)$ は

$$\begin{aligned}f\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)&=a\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^3-b\left(-\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)\\&=a\left(-\frac{b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)+b\sqrt{\frac{b}{3a}}\\&=\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{3a}}\end{aligned}$$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{b^3}{3a}}=\dfrac{2}{3}$　であるから　$\dfrac{b^3}{3a}=1$　　したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{b^3}{3}}$

(2) $x=-\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$ で極大となる．これに (1) の結果を代入して

$$x=-\sqrt{\frac{b}{3a}}=-\sqrt{\frac{b}{b^3}}=-\sqrt{\frac{1}{b^2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{b}}$$

7. (1) ℓ_1 の傾きは 2，ℓ_2 の傾きを m とすると

$$2m = -1 \quad \text{から} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって，ℓ_2 は点 $(5, -3)$ を通り，傾き $-\frac{1}{2}$ の直線であるから

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 5) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x + 2y + 1 = 0}$$

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ を解いて　$x = 3$，$y = -2$

したがって，ℓ_1 と ℓ_2 の交点の座標は $(3, -2)$

よって，C は中心が $(3, -2)$ で半径 $2\sqrt{2}$ の円であるから

$$(x-3)^2 + \{y-(-2)\}^2 = (2\sqrt{2}\,)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8}$$

(3) 円 C の方程式で，$y = 0$ とすると

$$(x - 3)^2 + (0 + 2)^2 = 8$$

すなわち　$(x - 3)^2 = 4$

したがって　$x = 5,\ 1$

よって　$\mathbf{P_1(1,\ 0),\ P_2(5,\ 0)}$

(4) $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(5,\ 0)$ を通る放物線の方程式を

$$y = a(x - 1)(x - 5)$$

とおく．さらにこの放物線は点 $(3, -2)$ を通るので

$$-2 = a(3 - 1)(3 - 5) \quad \text{これから} \quad a = \frac{1}{2}$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

(答) $\boldsymbol{a = \frac{1}{2},\ b = -3,\ c = \frac{5}{2}}$

(5) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ は $1 \leqq x \leqq 5$ において，$y \leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S = \int_1^5 \left\{ -\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} \right) \right\} dx = \mathbf{\frac{16}{3}}$$

２次関数の主な表し方

1	**一般形**	$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
2	**頂点が (p, q) のとき**	$\boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$
3	**x 軸と $(\alpha, 0)$，$(\beta, 0)$ で交わるとき**	$\boldsymbol{y = a(x-\alpha)(x-\beta)}$

［注意］ **2**，**3** の２次関数を展開し，一般形で表してわかるように
x^2 の係数 a は等しい値である．

【7.(4) の解説】 求める放物線は x 軸と $(1,\ 0)$，$(5,\ 0)$ で交わるから上の３の表し方により，求める放物線の方程式を $y = a(x-1)(x-5)$ とおくことができる．

重要な定積分

α，β を実数とする．

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

[証明]

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2\,dx - (\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta} x\,dx + \alpha\beta\int_{\alpha}^{\beta} dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2) + \alpha\beta(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) - 3(\beta+\alpha)^2 + 6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2) = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

[証終]

【7.(5) の別解】 $\displaystyle\int_1^5 (x-1)(x-5)\,dx = -\frac{1}{6}(5-1)^3 = -\frac{32}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 \left\{-\frac{1}{2}(x-1)(x-5)\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^5 (x-1)(x-5)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

8. $2x+y=1$ より　$y=1-2x$　$\cdots$①

このとき　$x \geqq 0$　かつ　$1-2x \geqq 0$　すなわち　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

① より $xy=x(1-2x)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} x(1-2x) &= -2x^2+x=-2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) \\ &= -2\left\{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8} \end{aligned}$$

② の値の範囲において xy は $x=\dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$，$x=0,\ \dfrac{1}{2}$ で最小値 0 をとる.

したがって，① より　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で**最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$**

$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ で**最小値 0**