平成18年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部 (ホスタピリティ・マネジメント学科) 経済学部(経済学科) 社会福祉学部第一部(福祉環境学科)	(A日程)

平成18年2月12日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 18 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $1 - \log_5 \left(\dfrac{1}{125} \times \dfrac{1}{25} \right)$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

2. 以下の条件 (ア)，(イ) のそれぞれにおいて，2 つの数 $A = a + \dfrac{1}{2a}$，$B = \sqrt{a^2+1}$ の大小関係を調べよ。解答欄には不等号もしくは等号を記入せよ。

(ア) $a < 0$ のとき

(イ) $a > 0$ のとき

3. 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq |x-1| + |x-2| \\ y \leqq 3 \end{cases}$$

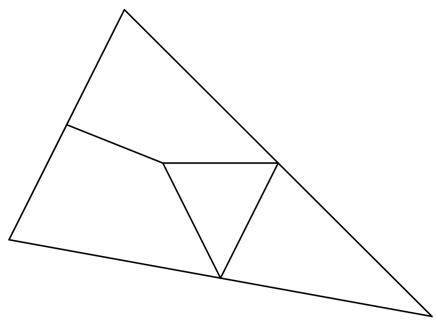
の表す領域の面積を求めよ。

4. 全体集合 U を $U = \{x \,|\, x$ は 1 以上で 30 以下の整数$\}$ とし，その部分集合として $P = \{x \,|\, x$ は偶数, $x \in U\}$，$Q = \{x \,|\, x$ は素数, $x \in U\}$，そして $R = \{x \,|\, x$ は 2 つの相異なる素数の和, $x \in U\}$ を考えるとき，以下の集合を要素を書き並べて表せ。

(1) $P \cap Q$

(2) $Q \cap R$

5. 異なる 4 色がある。このうちの何色かを用いて右の図形の 4 つの領域を塗り分けるとき，塗り分け方は何通りあるか。ただし，2 つの領域が線分をはさんで隣接する場合は，各々を異なる色で塗り分けること。



6. 2つの△ABCと△A′B′C′がある。△ABCについてはBC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，∠A $= A$，∠B $= B$，∠C $= C$ とし，同様に△A′B′C′についてはB′C′ $= a'$，C′A′ $= b'$，A′B′ $= c'$，∠A′ $= A'$，∠B′ $= B'$，∠C′ $= C'$ とする。いま，2つの三角形について以下の(i)〜(iii)が成立するものとする。

(i) $b = c$，$b' = c'$

(ii) $b' = b$

(iii) $A' = 2A$

このとき，以下の問に答えよ。

(1) A' と B' の関係から $\sin B'$ を $\cos A$ で表せ。また，a' を $\sin A$ と b で表せ。

(2) a^2 を b^2 と $\cos A$ で表せ。

(3) △A′B′C′の面積を S'，△ABCの面積を S としたとき，$\dfrac{S'}{S}$ を $\cos A$ で表せ。

7. 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ が以下の条件を満たすとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(i) 2次関数 $g(x) = -2x^2 - 4x - 5$ に対して，$f(0) = g(0)$，$f'(0) = g'(0)$ が成立する。ただし，$f'(x)$，$g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$，$g(x)$ の導関数である。

(ii) $y = f'(x)$ のグラフは $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{25}{6}\right)$ に頂点をもつ。

8. 2つの曲線 $y = x^3 + 2x^2 - x + 2$ と $y = x^3 + x^2 + 3x - 2$ および2つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれた図形の面積を S とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) S を t の関数として求めると $S(t) = at^2 + bt + c$ の形で表すことができる。定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) $S(t)$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解答例

1. (1) $1-\log_5\left(\dfrac{1}{125}\times\dfrac{1}{25}\right)=1-\log_5(5^{-3}\times 5^{-2})=1-\log_5 5^{-5}$

$=1-(-5)\log_5 5=1+5=\mathbf{6}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=\dfrac{\log_3\sqrt{27}}{\log_3\frac{1}{3}}=\dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{-1}=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

2. (ア) $a<0$ のとき

$A=a+\dfrac{1}{2a}<0$, $B=\sqrt{a^2+1}>0$ であるから　$\boldsymbol{A<B}$

(イ) $a>0$ のとき

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2\\&=\left(a^2+1+\frac{1}{4a^2}\right)-(1+a^2)\\&=\frac{1}{4a^2}>0\end{aligned}$$

よって　　$A^2>B^2$

$A=a+\dfrac{1}{2a}>0$, $B=\sqrt{1+a^2}>0$ であるから　$\boldsymbol{A>B}$

3. $|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\geqq 1)\\ -(x-1) & (x<1)\end{cases}$, $|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\geqq 2)\\ -(x-2) & (x<2)\end{cases}$ であるから

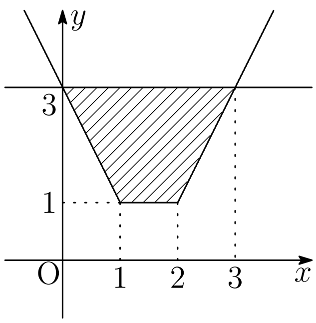
$x<1$ のとき　　$|x-1|+|x-2|=-(x-1)+\{-(x-2)\}=-2x+3$

$1\leqq x<2$ のとき　$|x-1|+|x-2|=x-1+\{-(x-2)\}=1$

$2\leqq x$ のとき　　$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2x-3$

不等式の表す領域は，右の図の斜線部分であり，求める領域の面積は

$\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times 2=\mathbf{4}$

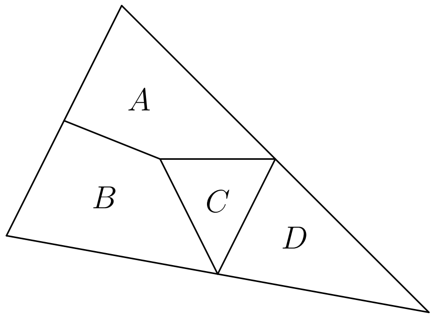


4. (1) $\boldsymbol{P\cap Q=\{2\}}$,

(2) $5=3+2$, $7=5+2$, $13=11+2$, $19=17+2$ であるから

$\boldsymbol{Q\cap R=\{5,\ 7,\ 13,\ 19\}}$

5. 右の図の A，B，C の3つの領域は互いに隣接しているので，4つの領域 A，B，C，D を塗り分けるとき，3色以上用いることになる．



4色用いる場合

A，B，C，D の4つの領域に異なる4色を塗り分ける方法であるから

$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24 \text{ (通り)}$$

3色用いる場合

4色の中から A，B，C の3つの領域に異なる3色を塗り分けて，D は A または B と同色に塗る方法であるから

$$_4\mathrm{P}_3 \times 2 = 4\cdot3\cdot2 \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

したがって　$24 + 48 = \mathbf{72}$ (通り)

6. (1) $b' = c'$ より $C' = B'$，$A' = 2A$

これらを $A' + B' + C' = 180^\circ$ に代入して　$2A + 2B' = 180^\circ$

したがって　$B' = 90^\circ - A$

よって　$\sin B' = \sin(90^\circ - A) = \boldsymbol{\cos A}$　$\cdots$①

$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ に正弦定理を用いて　$\dfrac{a'}{\sin A'} = \dfrac{b'}{\sin B'}$

これに $A' = 2A$，$b' = b$ および①を代入して

$$\frac{a'}{\sin 2A} = \frac{b}{\cos A}$$

したがって　$a' = \dfrac{b\sin 2A}{\cos A} = \dfrac{b\cdot2\sin A\cos A}{\cos A} = \boldsymbol{2b\sin A}$

(2) 余弦定理 $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ に $c = b$ を代入して　$\boldsymbol{a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos A}$

(3) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$，$S' = \dfrac{1}{2}b'c'\sin A'$

これに $c = b$，$b' = c' = b$，$A' = 2A$ を代入すると

$$S = \frac{1}{2}b^2\sin A, \qquad S' = \frac{1}{2}b^2\sin 2A$$

したがって　$\dfrac{S'}{S} = \dfrac{\frac{1}{2}b^2\sin 2A}{\frac{1}{2}b^2\sin A} = \dfrac{\sin 2A}{\sin A} = \dfrac{2\sin A\cos A}{\sin A} = \boldsymbol{2\cos A}$

7. $g(x)=-2x^2-4x-5$ より $g(0)=-5$

$g'(x)=-4x-4$ より $g'(0)=-4$

(i) の条件より $f(0)=-5$，$f'(0)=-4$ であるから

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \text{より} \quad f(0)=d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \text{より} \quad f'(0)=c$$

したがって　$c=-4$，$d=-5$，$f'(x)=3ax^2+2bx-4$

$y=3ax^2+2bx-4$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}3ax^2+2bx-4&=3a\left(x^2+\frac{2b}{3a}x\right)-4\\&=3a\left\{\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2-\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right\}-4\\&=3a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2-3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2-4\end{aligned}$$

$y=3ax^2+2bx-4$ の頂点の座標は $\left(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{25}{6}\right)$ であるから

$$-\frac{b}{3a}=-\frac{1}{6},\quad -3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2-4=-\frac{25}{6}$$

したがって　$\dfrac{b}{3a}=\dfrac{1}{6}$，　$3a\left(\dfrac{b}{3a}\right)^2=\dfrac{1}{6}$

これを解いて　$a=2$，$b=1$　　(答) $\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=-4,\ d=-5}$

8. (1) $(x^3+2x^2-x+2)-(x^3+x^2+3x-2)=x^2-4x+4=(x-2)^2 \geqq 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \int_t^{t+1} (x^2-4x+4)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\ \right]_t^{t+1} \\
&= \frac{1}{3}\left[\ x^3\ \right]_t^{t+1} - 2\left[\ x^2\ \right]_t^{t+1} + 4\left[\ x\ \right]_t^{t+1} \\
&= \frac{1}{3}\{(t+1)^3 - t^3\} - 2\{(t+1)^2 - t^2\} + 4\{(t+1)-t\} \\
&= \frac{1}{3}(3t^2+3t+1) - 2(2t+1) + 4\cdot 1 \\
&= t^2 - 3t + \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

したがって　$S(t)=t^2-3t+\dfrac{7}{3}$　すなわち　$\boldsymbol{a=1,\ b=-3,\ c=\dfrac{7}{3}}$

(2) $S(t)=t^2-3t+\dfrac{7}{3}$ の右辺を変形すると

$$
\begin{aligned}
t^2-3t+\frac{7}{3} &= (t^2-3t)+\frac{7}{3} \\
&= \left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + \frac{7}{3} \\
&= \left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

したがって，$S(t)$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{3}{2}}$ **で最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ をとる．