平成18年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

商学部第一部	(商学科)	(A日程)
経済学部	(国際経済学科)	
社会福祉学部第一部	(子ども家庭福祉学科)	

平成18年2月11日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で7題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成18年度　熊本学園大学一般入学試験 (A日程)

数学I・数学II・数学A

1. $a+b=x$，$ab=y$ とおくとき，次の式を x と y で表せ。ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。

(1) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

(2) $a^4+a^2b^2+b^4$

2. 以下の方程式を解け。

(1) $4^{x-\frac{1}{2}}-3\cdot 2^x+4=0$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=-3$

(3) $\log_4(2x^2-8x-6)=\log_2(x-1)$

3. 次の定積分 I の値を求めよ。

$$I=\int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx$$

4. 辺の長さが $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=4$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺BCの交点をD，頂点Aから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をEとする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ の面積の比を求めよ。

(2) 線分DEの長さを求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積を求めよ。

5. 3点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(1, -3)$，$\mathrm{C}(3,\ 1)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心の座標と半径を求めよ。

6. 角 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲にあるとき，$f(\theta)$ と $g(\theta)$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(\theta)=4\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sin\theta-2$

(2) $g(\theta)=4\sin\theta+4\sqrt{3}\cos\theta-2$

7. 1 から 4 のいずれかの数字が書かれているボールが 10 個，箱に入っている。数字 1 のボールは 1 個，数字 2 のボールは 2 個，数字 3 のボールは 3 個，数字 4 のボールは 4 個である。いま，ボールを 1 個取り出し，数字を確めた後，もとに戻す。これを 4 回繰り返すとき，以下の確率を求めよ。

(1) 数字 1 のボールを，4 回取り出す確率。

(2) 数字 3 のボールをちょうど 2 回取り出す確率。

(3) 取り出したボールの数字の合計が 5 になる確率。

解答例

1. (1) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}=\boldsymbol{\dfrac{x^2-2y}{y^2}}$

(2) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=\{(a+b)^2-2ab\}^2-(ab)^2$

$=(x^2-2y)^2-y^2=\boldsymbol{x^4-4x^2y+3y^2}$

2. (1) $4^{x-\frac{1}{2}}=2^{2(x-\frac{1}{2})}=2^{2x}\cdot 2^{-1}=(2^x)^2\times\frac{1}{2}$ であるから，方程式は

$\frac{1}{2}\cdot(2^x)^2-3\cdot 2^x+4=0$

2 をかけて　$(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

ゆえに　$(2^x-2)(2^x-4)=0$

よって　$2^x-2=0$　または　$2^x-4=0$

$2^x=2$ を解いて　$x=1$

$2^x=4$ を解いて　$x=2$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) 真数は正であるから　$x-3>0$　かつ　$x-1>0$

すなわち　$x>3$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)(x-1)=-3$

よって　$(x-3)(x-1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

$x^2-4x+3=8$

したがって　$(x+1)(x-5)=0$

① に注意して　$\boldsymbol{x=5}$

(3) 真数は正であるから　$2x^2-8x-6>0$　かつ　$x-1>0$

すなわち　$x>2+\sqrt{7}$　$\cdots$①

$\log_4(2x^2-8x-6)=\dfrac{1}{2}\log_2(2x^2-8x-6)$ であるから，方程式は

$\dfrac{1}{2}\log_2(2x^2-8x-6)=\log_2(x-1)$

2 をかけて　$\log_2(2x^2-8x-6)=2\log_2(x-1)$

よって　$2x^2-8x-6=(x-1)^2$

整理して　$x^2-6x-7=0$

したがって　$(x+1)(x-7)=0$

① に注意して　$\boldsymbol{x=7}$

3. $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $x^2-3x+2=(x-1)(x-2) \leqq 0$ であるから

$$|x^2-3x+2| = -(x^2-3x+2)$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx = \int_1^2 \{-(x^2-3x+2)\}\,dx \\ &= \int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{2^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\cdot 1^2-2\cdot 1\right)=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

重要な定積分

α, β を実数とする.

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

[証明]

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta x^2\,dx-(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta x\,dx+\alpha\beta\int_\alpha^\beta dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2) = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

[証終]

【3. の別解】 $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx = -\frac{1}{6}(2-1)^3 = -\frac{1}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx = -\int_1^2 (x^2-3x+2)\,dx \\ &= -\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

4. (1) $\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AE},$

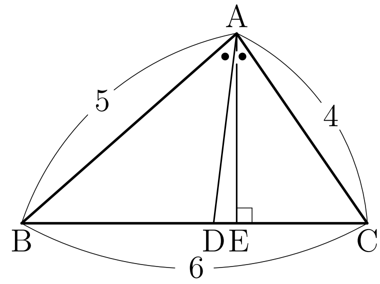
$\triangle\mathrm{ACD} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{DC}\cdot\mathrm{AE}$

したがって，$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ACD} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$

AD は角 A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$$

よって，$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ACD} = 5 : 4}$



(2) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 5 : 4$ であるから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{5}{5+4} = 6 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{3}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いると

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$\mathrm{BE} = \mathrm{AB}\cos B$ であるから

$$\mathrm{BE} = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

したがって　$\mathrm{DE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BD} = \dfrac{15}{4} - \dfrac{10}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

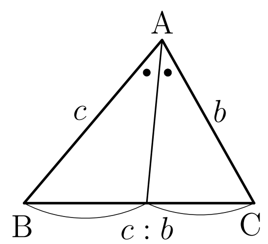
(3) $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$ であるから　$\sin B = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AB}\sin B$ であるから　$\mathrm{AE} = 5 \times \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$

したがって　$\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{AE} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{7}}{96}}$

三角形の角の二等分線と比

$\triangle\mathrm{ABC}$ の $\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC との交点は，
辺 BC を AB : AC に内分する．



5. 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 A を通るから　$1^2+2^2+l+2m+n=0$

点 B を通るから　$1^2+(-3)^2+l-3m+n=0$

点 C を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

整理すると　$l+2m+n+5=0$

$l-3m+n+10=0$

$3l+m+n+10=0$

これを解くと　$l=-2,\ m=1,\ n=-5$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x+y-5=0$

方程式を変形すると

$$(x^2-2x+1)+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)=5+1+\frac{1}{4}$$

すなわち　$(x-1)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

これは，**中心が $\left(\mathbf{1},-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ で，半径が $\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ の円**である．

6. (1)　$f(\theta)=4\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sin\theta-2$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}
&4\cos^2\theta+2\sin^2\theta+2\sin\theta-2\\
=&4(1-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+2\sin\theta-2\\
=&-2\sin^2\theta+2\sin\theta+2\\
=&-2(\sin^2\theta-\sin\theta)+2\\
=&-2\left\{\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+2\\
=&-2\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから，$f(\theta)$ は

最大値 $\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ $(\boldsymbol{\theta}=\mathbf{30^\circ})$，最小値 $\mathbf{2}$ $(\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0^\circ},\ \mathbf{90^\circ})$

をとる．

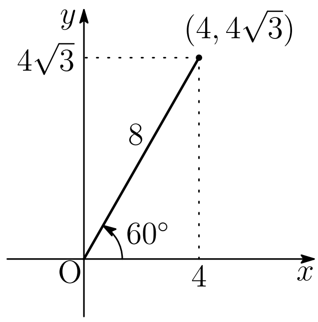
(2) $4\sin\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta = 8\sin(\theta + 60^\circ)$ より

$$g(\theta) = 8\sin(\theta + 60^\circ) - 2 \ (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$$

であるから，$g(\theta)$ は

最大値 6 ($\theta = 30^\circ$)，最小値 2 ($\theta = 90^\circ$)

をとる．



7. (1) ボールを 1 回取り出すとき，数字 1 のボールを取り出す確率は $\dfrac{1}{10}$

この試行を 4 回行って，数字 1 のボールが 4 回とも出る確率は

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{10000}}$$

(2) ボールを 1 回取り出すとき，数字 3 のボールを取り出す確率は $\dfrac{3}{10}$

この試行を 4 回行って，数字 3 のボールがちょうど 2 回出る確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(1-\frac{3}{10}\right)^{4-2} = 6 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1323}{5000}}$$

(3) 取り出した数字の合計が 5 になるのは，次の ① から ④ の場合である．

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
①	2	1	1	1
②	1	2	1	1
③	1	1	2	1
④	1	1	1	2

① から ④ のどの確率も $\dfrac{2}{10} \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^3 = \dfrac{1}{5000}$

したがって，求める確率は $4 \times \dfrac{1}{5000} = \boldsymbol{\dfrac{1}{1250}}$

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}}$

← A が r 回起こり，$\overline{A}$ が $(n-r)$ 回起こる確率