# 平成18年度　熊本学園大学一般入学試験問題

# 数学I・数学II・数学A

商学部第一部(経営学科)　}
外国語学部(英米学科)　} (A日程)

平成18年2月10日実施

(70分)

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成18年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

**1.** $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $a^2 - a$　　(2) $2a^4$

**2.** $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とするとき，次の値を $a$，$b$ で表せ。

(1) $\log_{10} 6^{10}$　　(2) $\log_{10} \dfrac{1}{25}$　　(3) $\log_{10}(6!)$

**3.** 関数 $f(x) = -|2x-4| + 4$ について，以下の問に答えよ。

(1) $f(x) = 0$ のとき，$x$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $y = f(x)$ としたとき，$y \geqq 0$ の範囲で $x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ。

**4.** 放物線 $y = x^2 + 1$ の接線 $\ell$ と $x$ 軸がなす角は正の向きに $30^\circ$ である。放物線と $\ell$ の接点の座標および $\ell$ の式を求めよ。

**5.** $f(x) = a^x$，$a > 0$ とする。$f(x+1) = 2f(x)$ が成り立つとき，以下の問に答えよ。なお $\sqrt{2}$ は，すべて 1.41 という近似値におきかえて計算せよ。

(1) $a$ の値を求めよ。

(2) $x$ が 0 から 1 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

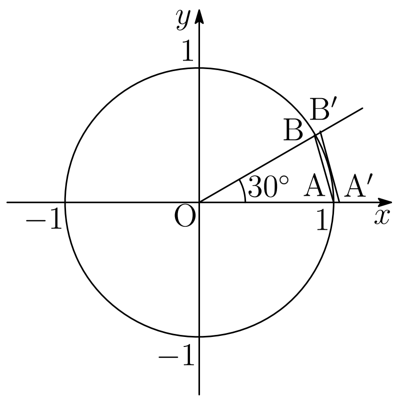
(3) $y = f(x)$ のグラフと，$x = 1$，$x = 1.5$ で交わる直線の式を求めよ。傾きおよび $y$ 切片の値は小数点以下 2 桁まで求めよ。

**6.** 連立不等式 $|x| \leqq 1$，$|2y + x| \leqq 2$ によって表される領域を $D$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 原点 $(0,\ 0)$ を中心にもつ円が $D$ に含まれるとき，その半径が最大である円の方程式を求めよ。

(2) 原点 $(0,\ 0)$ を中心にもつ円が $D$ を含むとき，その半径が最小である円の方程式を求めよ。

**7.** 半径 1 の円の円周の長さを $2p$ とする。座標平面上で原点 O(0, 0) を中心として半径 1 の円を描き，右図のように円上に点 A，B をとる。点 A の座標は (1, 0)，線分 OB と $x$ 軸は正の向きに $30^\circ$ の角をなす。また，OA，OB の延長上に，AB と A′B′ が平行かつ A′B′ が円に接するよう，右図のように点 A′，B′ をとる。以下の問に答えよ。




(1) 弧 AB の長さ (円周上の A から B の長さ) を $p$ で表せ。

(2) 線分 A′B′ の長さを求めよ。

**8.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。$a$，$b$，$c$ は 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 から重複を許していずれかの値をとるものとするが，ただし，$a$ だけは 0 をとらない。以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ は何通り作ることができるか。

(2) $f(0) = 0$ である $f(x)$ は何通り作ることができるか。

(3) $x = -1$ で最小値をとる $f(x)$ は何通り作ることができるか。

(4) すべての整数 $n$ に対して $f(n)$ の値が偶数である $f(x)$ は何通り作ることができるか。

**解答例**

**1.** (1) $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ より

$$a^2-a=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\mathbf{1}$$

(2) (1) の結果から $a^2=a+1$ であるから

$$\begin{aligned}2a^4&=2(a^2)^2\\&=2(a+1)^2=2a^2+4a+2\\&=2(a+1)+4a+2=6a+4\\&=6\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+4=\boldsymbol{7+3\sqrt{5}}\end{aligned}$$

**2.** (1) $$\begin{aligned}\log_{10}6^{10}&=10\log_{10}6=10\log_{10}(2\times3)\\&=10(\log_{10}2+\log_{10}3)=\boldsymbol{10(a+b)}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\log_{10}\frac{1}{25}&=\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^2=2\log_{10}\frac{1}{5}=2\log_{10}\frac{2}{10}\\&=2(\log_{10}2-\log_{10}10)=\boldsymbol{2(a-1)}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\log_{10}(6!)&=\log_{10}720=\log_{10}(2^3\times3^2\times10)\\&=3\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}10=\boldsymbol{3a+2b+1}\end{aligned}$$

**3.** (1) $f(x)=0$ のとき $-|2x-4|+4=0$ であるから

$$|2x-4|=4$$

したがって　$2x-4=\pm 4$

$$2x-4=4 \text{ を解いて } x=4, \qquad 2x-4=-4 \text{ を解いて } x=0$$

よって　$\boldsymbol{x=4,\ 0}$

(2) $|2x-4|=\begin{cases} -(2x-4) & (x \leqq 2) \\ 2x-4 & (x \geqq 2) \end{cases}$ より $f(x)=\begin{cases} 2x & (x \leqq 2) \\ -2x+8 & (x \geqq 2) \end{cases}$ $\cdots$①

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^2 2x\,dx + \int_2^6 (-2x+8)\,dx \\ &= \Big[\ x^2\ \Big]_0^2 + \Big[\ -x^2+8x\ \Big]_2^6 \\ &= 2^2-0^2+(-6^2+8\cdot 6)-(-2^2+8\cdot 2) \\ &= \mathbf{4}\end{aligned}$$

(3) $y \geqq 0$ の範囲では $-|2x-4|+4 \geqq 0$ であるから

$$|2x-4| \leqq 4$$

したがって　$-4 \leqq 2x-4 \leqq 4$

各辺に 4 を加えると　$0 \leqq 2x \leqq 8$

各辺を 2 で割ると　$0 \leqq x \leqq 4$　$\cdots$②

$y=f(x)$ および ① から

$$x+2y=\begin{cases} 5x & (x \leqq 2) \\ -3x+16 & (x \geqq 2) \end{cases}$$

したがって，② の値の範囲において，$x+2y$ は

$x=2$ で最大値 10 をとり，

$x=0$ で最小値 0 をとる．

よって，**最大値 10，最小値 0**

**4.** $y = x^2 + 1$ を微分すると　$y' = 2x$

接点の座標を $(a,\ a^2 + 1)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となる．

接線 $\ell$ の傾きは $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$2a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{を解いて} \quad a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

このとき　$a^2 + 1 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \dfrac{13}{12}$

したがって，接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \dfrac{13}{12}\right)}$

接線 $\ell$ の方程式は

$$y - \frac{13}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{11}{12}}$$

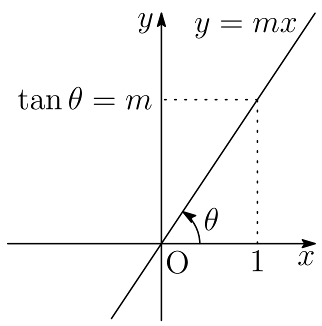
**直線の傾き $m$ と $x$ 軸の正の部分となす角 $\theta$**

右の図のように，$x$ 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を $\theta$ とすると

$$\tan\theta = \frac{m}{1} = m$$

一般に，直線 $y = mx + n$ の $x$ 軸の正の部分となす角が $\theta$ であるとき

$$\boldsymbol{m = \tan\theta}$$



**5.** (1) $f(x+1)=2f(x)$ より　　$a^{x+1}=2a^x$

$a^{x+1}=a^x\cdot a$ であるから　　$a^x\cdot a=2a^x$

両辺を $a^x(\neq 0)$ で割って　　$\boldsymbol{a=2}$

(2) $x$ が 0 から 1 まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2^1-2^0}{1}=2-1=\mathbf{1}$$

(3) 求める直線は，2 点 $(1,\ 2^1)$，$(1.5,\ 2^{1.5})$ を通る直線であるから

$$y-2^1=\frac{2^{1.5}-2^1}{1.5-1}(x-1)$$

$$y-2=\frac{2\sqrt{2}-2}{0.5}(x-1)$$

$$y-2=4(\sqrt{2}-1)(x-1)$$

$\sqrt{2}=1.41$ より　$y-2=1.64(x-1)$

$$\boldsymbol{y=1.64x+0.36}$$

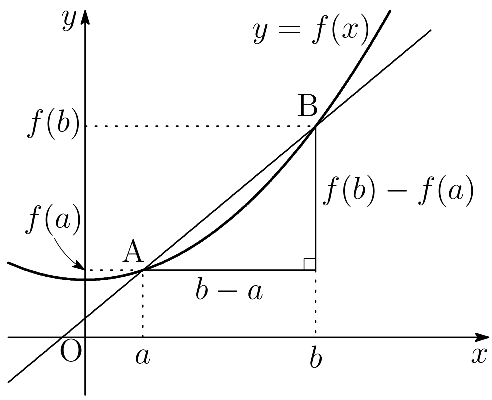
**平均変化率**

関数 $y=f(x)$ において，$x$ の値が $a$ から $b$ まで変化するとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である．この値を，$x=a$ から $x=b$ までの，$f(x)$ の**平均変化率**という．

この平均変化率は，右の図で直線 AB の傾きを表している．



**6.** $|x| \leqq 1$ から $-1 \leqq x \leqq 1$

$|2y+x| \leqq 2$ から $-2 \leqq 2y+x \leqq 2$　すなわち　$-\dfrac{x}{2}-1 \leqq y \leqq -\dfrac{x}{2}+1$

したがって，領域 $D$ は，4 本の直線

$$x=1,\ x=-1,\ x+2y+2=0,\ x+2y-2=0$$

によって囲まれた部分であるから，$D$ は 4 点

$$\left(1, -\frac{3}{2}\right),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-1,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

を結ぶ四角形の内部および周である．

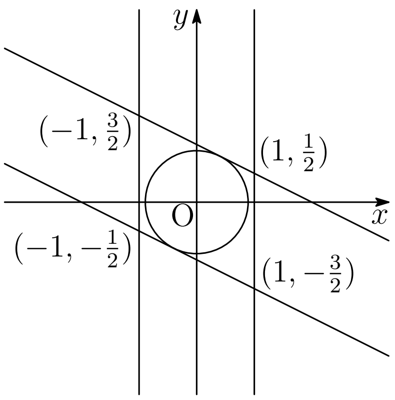
(1) 原点から直線 $x=1$ および直線 $x=-1$ までの距離はともに　1

原点から直線 $x+2y+2=0$ までの距離は

$$\frac{|2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

原点から直線 $x+2y-2=0$ までの距離は

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$




$\dfrac{2}{\sqrt{5}}<1$ であるから，右の図からわかるように求める円の半径は　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

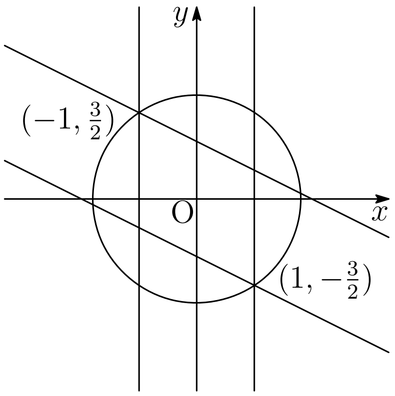
したがって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+y^2=\dfrac{4}{5}}$

(2) 求める円の半径は，右の図からわかるように 2 点 $(1, -\frac{3}{2})$ および点 $(-1,\ \frac{3}{2})$ を通るとき最小となる．したがって，求める半径は

$$\sqrt{1^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

したがって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{13}{4}}$$




**点と直線の距離**

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 $d$ は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

**7.** (1) 円周の長さ $2p$ の円 O において，中心角 $30^\circ$ に対する円弧の長さであるから

$$2p \times \frac{30}{360} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{6}}$$

(2) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ より　$\angle\mathrm{OAB} = \angle\mathrm{OBA} = 75^\circ$

$\mathrm{A'B'}//\mathrm{AB}$ より　$\angle\mathrm{OB'A'} = \angle\mathrm{OBA}$ であるから　$\angle\mathrm{OB'A'} = 75^\circ$

$\angle\mathrm{OA'B'} = \angle\mathrm{OAB}$ であるから　$\angle\mathrm{OA'B'} = 75^\circ$

円 O と線分 $\mathrm{A'B'}$ の接点を M とすると，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{A'B'}$ であるから

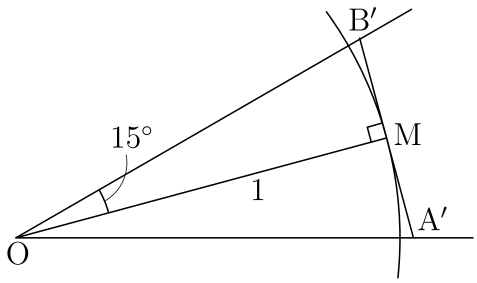
$$\angle\mathrm{A'OM} = \angle\mathrm{B'OM} = 15^\circ \quad \text{これから} \quad \mathrm{MA'} = \mathrm{MB'}$$

したがって　　$\mathrm{A'B'} = 2\mathrm{MB'}$　$\cdots$①

$\mathrm{MB'} = \mathrm{OM}\tan 15^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{MB'} &= 1 \times \tan 15^\circ \\
&= \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}\cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
&= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3}) - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \cdots②
\end{aligned}$$

①，② から　$\mathrm{A'B'} = 2 \times (2 - \sqrt{3}) = \mathbf{4 - 2\sqrt{3}}$



**8.** (1) $a$ は 0 以外の 1 から 9 の 9 通り，$b$，$c$ はともに 0 から 9 の 10 通りの選び方であるから

$$9 \times 10 \times 10 = \mathbf{900} \text{ (通り)}$$

(2) $f(0) = c$ であるから $c = 0$ となる．よって，$a$ は 0 以外の 1 から 9 の 9 通り，$b$ は 0 から 9 の 10 通り，$c$ は 0 の 1 通りの選び方であるから

$$9 \times 10 \times 1 = \mathbf{90} \text{ (通り)}$$

(3) $a > 0$ のとき，$f(x) = ax^2 + bx + c$ は $x = -\dfrac{b}{2a}$ で最小となるので

$$-\frac{b}{2a} = -1 \quad \text{これから} \quad b = 2a$$

これを満たす $a$，$b$ の組は,

$$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6),\ (4,\ 8)$$

の 4 通りであり，$c$ は 0 から 9 の 10 通りであるから

$$4 \times 10 = \mathbf{40} \text{ (通り)}$$

(4) $f(n) = an^2 + bn + c$ の右辺は $an(n+1) + (b-a)n + c$ と変形できる．
このとき，$an(n+1)$ は偶数であるから，$f(n)$ が偶数であるとき $b-a$，$c$ がともに偶数であればよい.
したがって　$(a,\ b) = $ (偶数, 偶数) のとき　$4 \times 5 = 20$ (通り)
$(a,\ b) = $ (奇数, 奇数) のとき　$5 \times 5 = 25$ (通り)

$b-a$ が偶数であるのは，$20 + 25 = 45$(通り) であり，それぞれに対する $c$ の選び方が 5 通りであるから

$$45 \times 5 = \mathbf{225} \text{ (通り)}$$