平成18年度　熊本学園大学一般入学試験問題

数学I・数学II・数学A

全　　学　　部 (全　学　科) (A日程)

平成18年2月9日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

平成 18 年度　熊本学園大学一般入学試験 (A 日程)

数学 I・数学 II・数学 A

1. $x=\dfrac{1}{7}(3+\sqrt{2})$，$y=\dfrac{1}{7}(3-\sqrt{2})$ のとき，以下の値を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $\dfrac{x^2-x^2y+xy^2-y^2}{x-y}$

2. 次の問に答えよ。

(1) 次の条件をみたす直線 ℓ，m のそれぞれの式，および 2 直線の交点の座標を求めよ。

ℓ ：点 A$(-1,\ 2)$ を通り，傾き -3

m : 2 点 $(-1,-4)$，$(2,-1)$ を通る

(2) 直線 m に垂直で，点 A を通る直線の式を求めよ。

3. $\triangle$ABC において，$\angle \mathrm{A}=30^\circ$，辺 AB，AC の長さをそれぞれ 6，8 とする。辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，AD，AE の長さをそれぞれ x，y とする。$\triangle$ADE の面積は $\triangle$ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ である。このとき以下の問に答えよ。

(1) x と y の関係を式で表せ。

(2) $x=4$ のとき，$\triangle$BDE の面積を求めよ。

4. $x>0$ かつ $x\neq 1$ のとき，方程式 $\log_3 x-\log_x 27=\log_9 3$ を解け。

5. 3 個のサイコロを投げたとき，次の確率を求めよ。

(1) 出た目の和が偶数である。

(2) 少なくとも 1 個は 6 の目が出る。

(3) 出た目の和が偶数であるか，または，少なくとも 1 個は 6 の目が出る。

6. $2x-y=2$ のとき，$2x^2-y^2$ の最大値と，そのときの x，y の値を求めよ。

7. 2 直線 $\ell_1: x+y-4=0$ と $\ell_2: 2x-y-11=0$ の交点 P を通り，y 軸と $y>0$ で交わる放物線 $y=x^2-(a+3)x+a^2-5$ について，以下の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 P における放物線の接線の方程式を求めよ。

(3) 放物線と直線 ℓ_1 によって囲まれる領域の面積 S の値を求めよ。

8. 関数 $f(x)=2a\cos^2 x-6a\sin x\cdot\cos x-4a\sin^2 x+b$ が $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ で最大値 7，最小値 $1-6\sqrt{2}$ をとるとき，定数 a と b の値を求めよ。ただし $a>0$ とする。

解答例

1. (1) $$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{\left\{\frac{1}{7}\left(3+\sqrt{2}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{7}\left(3-\sqrt{2}\right)\right\}^2}{\left\{\frac{1}{7}\left(3+\sqrt{2}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{7}\left(3-\sqrt{2}\right)\right\}^2}=\frac{\frac{1}{49}\left(3+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{49}\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{\frac{1}{49}\left(3+\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{49}\left(3-\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^2-\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{\left(3+\sqrt{2}\right)^2+\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{(11+6\sqrt{2})-(11-6\sqrt{2})}{(11+6\sqrt{2})+(11-6\sqrt{2})}$$
$$=\frac{12\sqrt{2}}{22}=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{2}}{11}}$$

(2) $$\frac{x^2-x^2y+xy^2-y^2}{x-y}=\frac{(x^2-y^2)-(x^2y-xy^2)}{x-y}=\frac{(x+y)(x-y)-xy(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-xy)}{x-y}=x+y-xy$$
$$=\frac{3+\sqrt{2}}{7}+\frac{3-\sqrt{2}}{7}-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\times\frac{3-\sqrt{2}}{7}=\boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

2. (1) ℓ の方程式は　$y-2=-3\{x-(-1)\}$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x-1}$　$\cdots$①

m の方程式は　$y-(-4)=\dfrac{-1-(-4)}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

すなわち　$\boldsymbol{y=x-3}$　$\cdots$②

連立方程式 $\begin{cases} y=-3x-1 & \cdots① \\ y=x-3 & \cdots② \end{cases}$ を解いて　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{5}{2}$

よって，2 直線の交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)}$

(2) 直線 m に垂直な直線の傾きを a とすると

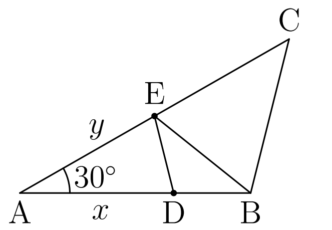
$1\cdot a=-1$ より　　$a=-1$

よって，点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ を通り，直線 m に垂直な直線の方程式は

$y-2=-1\{x-(-1)\}$　すなわち　$\boldsymbol{y=-x+1}$

3. (1) $\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{1}{2}xy\sin 30^\circ = \dfrac{1}{4}xy \quad \cdots ①$

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\sin 30^\circ = 12 \quad \cdots ②$



$\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{4}xy = \frac{1}{3}\times 12$$

すなわち　$\boldsymbol{xy = 16} \quad \cdots ③$

(2) ①，③ より　$\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{1}{4}\times 16 = 4$

$x = 4$ のとき　$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 4 : (6-4) = 2 : 1$

$\triangle\mathrm{ADE} : \triangle\mathrm{BDE} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB}$ であるから　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{BDE} = 2}$

4. $x > 0$ かつ $x \neq 1$ より $\log_3 x = t \cdots ①$ とおくと $t \neq 0$ であるから

方程式を変形すると　$\log_3 x - \dfrac{\log_3 27}{\log_3 x} = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 9}$

① より　$t - \dfrac{3}{t} = \dfrac{1}{2}$

両辺に $2t$ をかけると　$2t^2 - 6 = t$

すなわち　$(t-2)(2t+3) = 0$

これを解いて　$t = 2, -\dfrac{3}{2}$

① より $x = 3^t$ であるから

$t = 2$ のとき　$x = 3^2 = 9$

$t = -\dfrac{3}{2}$ のとき　$x = 3^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

したがって　$\boldsymbol{x = 9,\ \dfrac{\sqrt{3}}{9}}$

5. (1) 3 個のさいころの目の出方は　$6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)

出た目の和が偶数となるのは，以下の $27 + 27 + 27 + 27 = 108$ (通り)

(偶数，偶数，偶数) のとき　$3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(偶数，奇数，奇数) のとき　$3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(奇数，偶数，奇数) のとき　$3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

(奇数，奇数，偶数) のとき　$3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

したがって，求める確率は　$\dfrac{108}{216} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) 3 個のさいころの目すべてが 6 でない確率は　$\dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{125}{216} = \boldsymbol{\dfrac{91}{216}}$

(3) 出た目の和が偶数である事象を A,

少なくとも 1 個は 6 の目が出る事象を B とすると,

(1)，(2) の結果から　$P(A) = \dfrac{108}{216}$，$P(B) = \dfrac{91}{216}$

事象 $A \cap B$ は，以下の $19 + 9 + 9 + 9 = 46$ (通り)

(偶数，偶数，偶数) のとき　$3^3 - 2^3 = 19$ (通り)

(偶数，奇数，奇数) のとき　$1 \times 3 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数，偶数，奇数) のとき　$3 \times 1 \times 3 = 9$ (通り)

(奇数，奇数，偶数) のとき　$3 \times 3 \times 1 = 9$ (通り)

したがって　$P(A \cap B) = \dfrac{46}{216}$

よって，求める確率 $P(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{108}{216} + \frac{91}{216} - \frac{46}{216} \\ &= \frac{153}{216} = \boldsymbol{\frac{17}{24}} \end{aligned}$$

【別解】(3)　出た目の和が奇数である事象を A，3 個の目すべてが 6 でない事象を B とすると，求める確率は $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ であるから

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\cup\overline{B}) &= P(\overline{A\cap B}) \\
&= 1 - P(A\cap B) \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

事象 $A\cap B$ であるのは (5 以下の目で 3 つの目の和が奇数)，

以下の $27+12+12+12=63$ (通り)

(奇数，奇数，奇数) のとき　$3\times3\times3=27$ (通り)

(奇数，偶数，偶数) のとき　$3\times2\times2=12$ (通り)

(偶数，奇数，偶数) のとき　$2\times3\times2=12$ (通り)

(偶数，偶数，奇数) のとき　$2\times2\times3=12$ (通り)

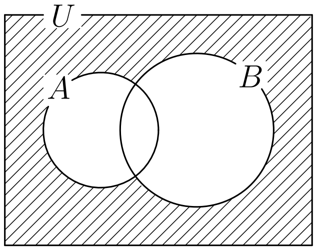
したがって　$P(A\cap B)=\dfrac{63}{6^3}=\dfrac{7}{24}$

① より求める確率は　$1-\dfrac{7}{24}=\boldsymbol{\dfrac{17}{24}}$

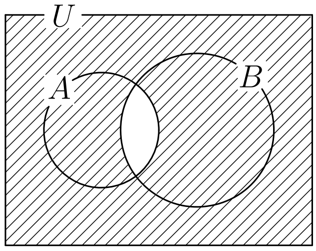
ド・モルガンの法則

1　$\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$

2　$\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cup B}}$ **と** $\boldsymbol{\overline{A}\cap\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cap B}}$ **と** $\boldsymbol{\overline{A}\cup\overline{B}}$

6. $2x-y=2$ から　$y=2x-2 \quad \cdots ①$

① より

$$
\begin{aligned}
2x^2-y^2 &= 2x^2-(2x-2)^2 \\
&= -2x^2+8x-4 \\
&= -2(x^2-4x)-4 \\
&= -2\{(x-2)^2-2^2\}-4 \\
&= -2(x-2)^2+4
\end{aligned}
$$

したがって，$x=2$ のとき最大値 4 をとる．このとき ① より $y=2$

よって，$\boldsymbol{x=2}$**，**$\boldsymbol{y=2}$ **のとき　最大値 4**

7. (1) 連立方程式 $\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y-11=0 \end{cases}$ を解いて　$x=5$，$y=-1$

したがって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点 P の座標は　$(5,-1)$

放物線 $y=x^2-(a+3)x+a^2-5$ は y 軸と $y>0$ で交わるから

$x=0$ のとき $y>0$ より　$a^2-5>0$　$\cdots$①

P は放物線上の点であるから

$$-1=5^2-(a+3)\cdot 5+a^2-5$$

整理して
$$a^2-5a+6=0$$
$$(a-2)(a-3)=0$$

① に注意して　$\boldsymbol{a=3}$

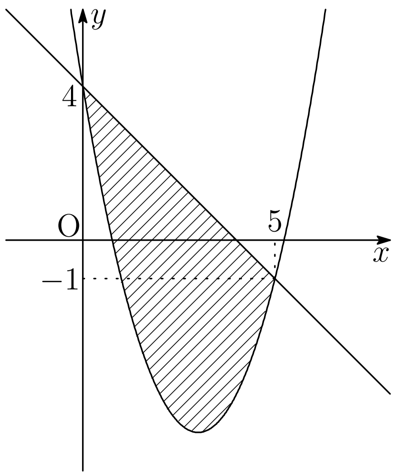
(2) $f(x)=x^2-6x+4$ とすると　$f'(x)=2x-6$

$$f'(5)=2\times5-6=4$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y-(-1)=4(x-5)$$
$$\boldsymbol{y=4x-21}$$

(3) 放物線 $y=x^2-6x+4$ と直線 $y=-x+4$ の共有点の x 座標は



$$x^2-6x+4=-x+4$$

を解いて　$x=0,\ 5$

右の図から求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \{(-x+4)-(x^2-6x+4)\}\,dx \\ &= \int_0^5 (-x^2+5x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5 \\ &= \left(-\frac{5^3}{3}+\frac{5}{2}\times5^2\right)-0 \\ &= \boldsymbol{\frac{125}{6}} \end{aligned}$$

8. $f(x) = 2a\cos^2 x - 6a\sin x\cdot\cos x - 4a\sin^2 x + b \qquad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$

$$= 2a\cos^2 x - 6a\sin x\cdot\cos x - 4a(1-\cos^2 x) + b$$
$$= 6a\cos^2 x - 6a\sin x\cos x - 4a + b$$
$$= 3a(2\cos^2 x - 1) - 3a\cdot 2\sin x\cos x - a + b$$
$$= 3a\cos 2x - 3a\sin 2x - a + b$$
$$= 3a(-\sin 2x + \cos 2x) - a + b$$
$$= 3a\sqrt{2}\sin(2x + 135^\circ) - a + b$$

$a > 0$ であるから

$x = 0^\circ$ で最大値 $2a + b$ をとり，

$x = 67.5^\circ$ で最小値 $-3\sqrt{2}\,a - a + b$ をとる．

したがって　$2a + b = 7,\ \ -3\sqrt{2}\,a - a + b = 1 - 6\sqrt{2}$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 3}$