# 平成20年度　熊本駅前リハビリテーション専門学校　一般入学試験
# 数学I・数学A(平成19年11月25日)60分

I. 次の各問に答えよ。

1) 5184の正の約数は何個ありますか。 **【1】**

① 24　② 27　③ 16　④ 18　⑤ 19　⑥ 35　⑦ 70

2) $x+\dfrac{1}{x}=2$ のとき $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。 **【2】**

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6　⑥ 7　⑦ 8

3) 行きは時速30km，帰りは時速60kmで往復したとき，平均時速は何kmか。 **【3】**

① 20　② 30　③ 40　④ 45　⑤ 60　⑥ 35　⑦ 70

4) $|x-3|+|x-2| \leqq 6$ を満たす実数 $x$ の範囲を求めよ。 **【4】**

① $x<2$　② $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$　③ $2 \leqq x < 3$　④ $3 \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$

⑤ $x \leqq 3$　⑥ $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$　⑦ $x \leqq \dfrac{11}{2}$

5) 2進法の11011101を，2進法の1101で割った商は10進法で何か。 **【5】**

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19　⑥ 20　⑦ 21

6) 底面の半径が $r$，高さが $2r$ の円錐の体積を $V_1$，底面の半径が $r$，高さが $2r$ の円柱の体積を $V_2$，半径 $r$ の球の体積を $V_3$ としたとき，$V_1 : V_2 : V_3$ の比はどうなるか。 **【6】**

① 1 : 3 : 2　② 1 : 3 : 1　③ 1 : 2 : 1　④ 1 : 2 : 2
⑤ 1 : 3 : 3　⑥ 1 : 2 : 3　⑦ 2 : 2 : 3

7) 同一円周上に7個の点がある。このうち3点を頂点とする三角形はいくつできるか。 **【7】**

① 210　② 21　③ 15　④ 35　⑤ 135　⑥ 10　⑦ 20

8) 2次方程式 $(a-1)x^2+ax+1=0$ が重なる解をもつとき，$a$ の値はいくつか。 **【8】**

① $-1$　② 0　③ $-2$　④ 3　⑤ $-3$　⑥ 2　⑦ 5

9) 三角形ABCにおいて，$a=9$，$b=8$，$c=7$ のとき，三角形ABCの面積を求めよ。 **【9】**

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $6\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{15}$　⑤ $3\sqrt{15}$　⑥ $12\sqrt{5}$　⑦ $\sqrt{15}$

10) $y=x^2+\sqrt{3}$ のグラフと傾き 1 の平行直線群との交点の中点はつねに定直線上にある。この直線の方程式は次のどれか。 **【10】**

① $y=x$　② $y=x+\sqrt{3}$　③ $y=x+\dfrac{1}{2}$　④ $y=\sqrt{3}$

⑤ $x=\sqrt{3}$　⑥ $x=\dfrac{1}{2}$　⑦ $x=1$

II. 次の各問に答えよ。

68 人の学生に，A，B，C の 3 つの専門学校の受験状況をたずねたところ，全員が A，B，C のうち少なくとも 1 校は受験していた。また，B と C の両方，C と A の両方，A と B の両方を受験した人数は，それぞれ 25 人，24 人，23 人であり，B と C の少なくとも一方，C と A の少なくとも一方，A と B の少なくとも一方を受験した人数は，それぞれ 65 人，62 人，59 人であった。このとき，以下の設問に答えよ。

1) A 校を受験した学生の人数はいくらか。 **【11】**

① 35　② 36　③ 37　④ 38　⑤ 39　⑥ 40　⑦ 41

2) B 校のみを受験した学生の人数はいくらか。 **【12】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

3) B 校と C 校の両方を受験したが，A 校を受験しなかった人数はいくらか。 **【13】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

4) A，B，C の 3 校すべてを受験した学生の人数はいくらか。 **【14】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

III. 次の問に答えよ。

$$\alpha=\sin\theta+\sin^2\theta+\sin(\theta+180^\circ)+\sin^2(\theta+90^\circ)$$

$$\beta=\cos\theta+\cos(\theta+90^\circ)+\cos(\theta+180^\circ)+\cos(\theta+270^\circ)$$

$$\gamma=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+90^\circ)+\cos^2(\theta+180^\circ)+\cos^2(\theta+270^\circ)$$

のとき，$\alpha+\beta+\gamma$ の値は次のどれか。 **【15】**

① $-2$　② $-1$　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4

IV. 下記のアイウのそれぞれの 2 条件 (A) と (B) の関係について，次の ①，②，③，④ のうちどの場合が成り立つか。

ア．$a$ は実数とする。 (A) $a<2$ (B) $a^2<4$ 【16】

イ．$a$ は実数とする。 (A) $-2<a<2$ (B) $a^4<a^2$ 【17】

ウ．$a,\ b$ は実数とする。 (A) $|a|<2,\ |b|<2$ (B) $|a^2-b^2|<4$ 【18】

① 「(A) ならば (B)」,「(B) ならば (A)」がともに正しい。

② 「(A) ならば (B)」は正しいが,「(B) ならば (A)」は正しくない。

③ 「(A) ならば (B)」は正しくないが,「(B) ならば (A)」は正しい。

④ 「(A) ならば (B)」,「(B) ならば (A)」のどちらも正しくない。

## 解答例

I. 1) $5184=2^6\times 3^4$ したがって，求める正の約数の個数は $7\times 5=\mathbf{35}$ 個

2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2^3-3\cdot 2=\mathbf{2}$

3) 片道 $l$km とすると，行きに要する時間は $\dfrac{l}{30}$ 時間，帰りに要する時間は $\dfrac{l}{60}$ 時間であるから，往復したときの平均時速は

$$2l\div\left(\frac{l}{30}+\frac{l}{60}\right)=2l\div\frac{l}{20}=\mathbf{40}$$

4) [1] $x<2$ のとき $(-x+3)+(-x+2)\leqq 6$

これを解いて $x\geqq -\dfrac{1}{2}$

条件に注意して $-\dfrac{1}{2}\leqq x<2$

[2] $2\leqq x<3$ のとき

$$|x-3|+|x-2|=(-x+3)+(x-2)=1$$

このとき，与えられた不等式を満たす.

[3] $3\leqq x$ のとき $(x-3)+(x-2)\leqq 6$

これを解いて $x\leqq\dfrac{11}{2}$

条件に注意して $3\leqq x\leqq\dfrac{11}{2}$

よって，求める不等式の解は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{11}{2}}$

5) $11011101_{(2)}=2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+1=221$

$1101_{(2)}=2^3+2^2+1=13$ よって，$221\div 13=\mathbf{17}$

**(別解)** $11011101_{(2)}=(11010000+1101)_{(2)}=\{1101\times(1000+1)\}_{(2)}$

よって，求める商は $(10000+1)_{(2)}=2^4+1=\mathbf{17}$

6) $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot 2r=\dfrac{2}{3}\pi r^3$, $V_2=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3$, $V_3=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

したがって　$V_1:V_2:V_3=\dfrac{2}{3}\pi r^3:2\pi r^3:\dfrac{4}{3}\pi r^3=\mathbf{1:3:2}$

7) 異なる 7 個の点から 3 個とる組合せであるから　${}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{35}$

8) 2 次方程式であるから　$a-1\neq 0$　ゆえに　$a\neq 1$

この 2 次方程式が重解をもつための条件は　$D=0$ であるから

$$a^2-4(a-1)\cdot 1=0$$

整理して　$(a-2)^2=0$

$a\neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{a=2}$

9) (ヘロンの公式を用いる．)

$2s=9+8+7$　これより　$s=12$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)}=\mathbf{12\sqrt{5}}$

10) 直線の方程式を $y=x+k$ ($k$ は定数) とする．この直線の方程式と $y=x^2+\sqrt{3}$ から $y$ を消去すると

$$x^2-x+\sqrt{3}-k=0 \quad \cdots ①$$

となる．共有点が存在するためには，係数について

$$(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\sqrt{3}-k)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad k\geqq\sqrt{3}-\frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

① の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると，2 つの共有点の中点の座標は

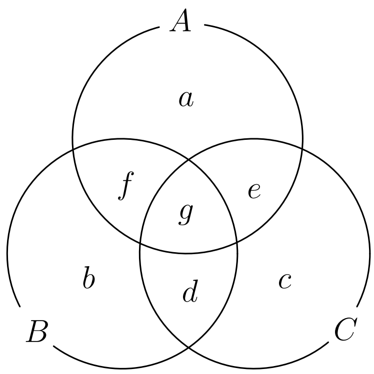
$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}+k\right)$$

① の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=1$

よって，中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}+k\right)$

② より，求める中点の軌跡は　直線 $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$　$\left(y\geqq\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\right)$

II. 右図のベン図のように人数をおくと




$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f + g = 68$
$n(B \cap C) = d + g = 25$
$n(C \cap A) = e + g = 24$
$n(A \cap B) = f + g = 23$
$n(B \cup C) = 68 - a = 65$
$n(C \cup A) = 68 - b = 62$
$n(A \cup B) = 68 - c = 59$
第５式から第７式より　$a = 3$，$b = 6$，$c = 9$
第２式から第５式より　$d = 25 - g \cdots$ ①，$e = 24 - g \cdots$ ②，$f = 23 - g \cdots$ ③
これらを第１式に代入して

$$3 + 6 + 9 + (25 - g) + (24 - g) + (23 - g) + g = 68$$

これを解いて　　$g = 11 \cdots$ ④

④ を ①，②，③ に代入して　$d = 14$，$e = 13$，$f = 12$

1) $n(A) = a + e + f + g = 3 + 13 + 12 + 11 = \mathbf{39}$ (人)

2) ベン図より　$b = \mathbf{6}$ (人)

3) ベン図より　$d = \mathbf{14}$ (人)

4) $n(A \cap B \cap C) = g = \mathbf{11}$ (人)

III.

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin\theta + \sin^2\theta + \sin(\theta + 180^\circ) + \sin^2(\theta + 90^\circ) \\ &= \sin\theta + \sin^2\theta - \sin\theta + \cos^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \cos\theta + \cos(\theta + 90^\circ) + \cos(\theta + 180^\circ) + \cos(\theta + 270^\circ) \\ &= \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta + \sin\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \cos^2\theta + \cos^2(\theta + 90^\circ) + \cos(\theta + 180^\circ) + \cos^2(\theta + 270^\circ) \\ &= \cos^2\theta + (-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ &= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2\end{aligned}$$

したがって　$\alpha + \beta + \gamma = 1 + 0 + 2 = \mathbf{3}$

IV.　ア. $a^2 < 4$ を解いて　$-2 < a < 2$

よって　(B) $\Longrightarrow$ (A)

イ. $a^4 < a^2$ を解いて　$-1 < a < 0,\ 0 < a < 1$

よって　(B) $\Longrightarrow$ (A)

ウ. $|a| < 2,\ |b| < 2$ のとき　$0 < a^2 < 4,\ -4 < -b^2 < 0$

ゆえに　$-4 < a^2 - b^2 < 4$　すなわち $|a^2 - b^2| < 4$ が成り立つ.

逆に，$a = 3,\ b = \sqrt{7}$ は $|a^2 - b^2| < 4$ を満たすが,

$|a| < 2,\ |b| < 2$ を満たさない.

よって　(A) $\Longrightarrow$ (B)

**(答)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 【1】 | 【2】 | 【3】 | 【4】 | 【5】 |
| ⑥ | ① | ③ | ⑥ | ③ |
| 【6】 | 【7】 | 【8】 | 【9】 | 【10】 |
| ① | ④ | ⑥ | ⑥ | ⑥ |
| 【11】 | 【12】 | 【13】 | 【14】 | 【15】 |
| ⑤ | ② | ⑦ | ④ | ⑥ |
| 【16】 | 【17】 | 【18】 | | |
| ③ | ③ | ② | | |