平成21年度　熊本駅前看護リハビリテーション学院　一般前期試験
看護・理学・作業　数学I・数学A(平成21年2月15日)60分

(解答はすべて解答番号【1】〜【25】にマークせよ)

(1) $x-\dfrac{1}{x}=2$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値は，【1】

① 4　② 6　③ 8　④ 10

(2) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，x^2+y^2 の値は，【2】

① 6　② 8　③ 10　④ 12

(3) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ を簡単にすると，【3】

① $3-\sqrt{2}$　② $3+\sqrt{2}$　③ $3+2\sqrt{2}$　④ $3+3\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b の値は順に，【4】

① $1,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　② $1,\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　③ $2,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　④ $2,\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(5) $|x-3|+|x-1|=3$ をみたす実数 x の値は，【5】

① $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}$　② $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}$　③ $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}$　④ $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}$

(6) x の方程式 $2kx^2-4x-1=0$ が実数解を1つだけもつような実定数 k の値は，【6】

① -2　② 2　③ $0, -2$　④ $0,\ 2$

(7) 頂点が $(1,-2)$ で，点 $(2,-3)$ を通る，軸が y 軸に平行な放物線の方程式は，【7】

① $y=-x^2+2x-3$　② $y=-x^2+2x+3$
③ $y=x^2-2x-3$　④ $y=x^2-2x+3$

(8) 放物線 $y=-3x^2+6x+1$ を x 軸方向へ -2，y 軸方向へ3だけ平行移動した放物線は，【8】

① $y=-3x^2-6x-4$　② $y=-3x^2-6x+4$
③ $y=-3x^2+6x-4$　④ $y=-3x^2+6x+4$

(9) x の関数 $f(x)=x^2-2x-1\ (-1<x<2)$ の最大値・最小値はそれぞれ順に，【9】

① $2, -2$　② $-1, -2$　③ なし, -2　④ なし，なし

(10) 任意の実数 x で $x^2 - kx + k > 0$ が成り立つような実定数 k の値の範囲は, **【10】**

① $-4 < k < 0$　② $0 < k < 4$　③ $k < 0,\ 4 < k$　④ $k < -4,\ 0 < k$

(11) $\tan 65^\circ \tan 25^\circ + \tan 35^\circ \tan 55^\circ$ の値は, **【11】**

① 1　② 2　③ 3　④ 4

(12) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\sin\theta\cos\theta$ の値は, **【12】**

① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{2}{9}$　③ $\dfrac{4}{9}$　④ $\dfrac{5}{9}$

(13) 3 辺の長さが 5, 6, 10 であるような三角形は, **【13】**

① 成立しない　② 鋭角三角形　③ 直角三角形　④ 鈍角三角形

(14) $\angle \mathrm{C} = 45^\circ$, 外接円の半径が 6 である $\triangle\mathrm{ABC}$ において, AB の長さは, **【14】**

① $3\sqrt{2}$　② $3\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{3}$

(15) $\mathrm{CA} = \sqrt{3}$, $\mathrm{AB} = 4$, 面積が 3 である $\triangle\mathrm{ABC}$ において, $\angle\mathrm{A}$ の大きさは, **【15】**

① 30°　② 60°　③ $60^\circ,\ 120^\circ$　④ $30^\circ,\ 150^\circ$

(16) 70 以下の自然数のうち, 2 または 3 の倍数の個数は, **【16】**

① 17　② 27　③ 37　④ 47

(17) 集合 U とその部分集合 A, B の要素の数について $n(U) = 200$, $n(A \cap B) = 35$, $n(A \cap \overline{B}) = 58$, $n(\overline{A} \cup \overline{B})$ は, **【17】**

① 145　② 155　③ 165　④ 175

(18) $x = 1$ は $x^2 - 3x + 2 = 0$ であるための **【18】**

① 必要条件　② 十分条件　③ 必要十分条件　④ いずれでもない

(19) a, b は実数とする。「$a + b < 0$ かつ $ab > 0$」は「$a < 0$ かつ $b < 0$」の **【19】**

① 必要条件　② 十分条件　③ 必要十分条件　④ いずれでもない

(20) 720 の正の約数の総和は, **【20】**

① 2418　② 2436　③ 2454　④ 2472

(21) 男子 2 人・女子 4 人が円卓に座るとき, 男子が向かい合う座り方は, **【21】**

① 12 通り　② 24 通り　③ 36 通り　④ 48 通り

(22) 正十角形の頂点を結んで得られる三角形で，正十角形と辺を共有しないのは， **【22】**

① 50 通り　② 60 通り　③ 70 通り　④ 80 通り

(23) 3 人でジャンケンを 1 回だけするとき，特定の 1 人が勝つ確率は， **【23】**

① $\dfrac{1}{27}$　② $\dfrac{2}{27}$　③ $\dfrac{1}{9}$　④ $\dfrac{1}{3}$

(24) コインを 6 回続けて投げるとき，5 回以上表が出る確率は， **【24】**

① $\dfrac{3}{64}$　② $\dfrac{5}{64}$　③ $\dfrac{7}{64}$　④ $\dfrac{9}{64}$

(25) 赤球 1 個，白球 2 個が入っている袋から球を 1 個取り出し，色を確かめてから袋に戻す。このような試行を 3 回繰り返す。ただし，赤球を取り出したときは以後の試行を行わない。このとき，取り出す赤球の回数の期待値は， **【25】**

① $\dfrac{11}{9}$　② $\dfrac{13}{9}$　③ $\dfrac{17}{9}$　④ $\dfrac{19}{9}$

解答例

(1) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = \mathbf{6}$

(2)
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

ゆえに　$x + y = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$

$xy = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1$

よって　$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1 = \mathbf{10}$

(3) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{(9+2)+2\sqrt{9\cdot 2}}$

$= \sqrt{9} + \sqrt{2} = \mathbf{3 + \sqrt{2}}$

(4) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

$2 < \sqrt{5} < 3$ であるから　$1 < \dfrac{3+2}{4} < \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} < \dfrac{3+3}{4} < 2$ より　$a = \mathbf{1}$

$a + b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ より　$b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} - a = \mathbf{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

(5) ［1］$x<1$ のとき　$(-x+3)+(-x+1)=3$

これを解いて　$x=\dfrac{1}{2}$

これは，$x<1$ を満たすから，解である．

［2］$1\leqq x<3$ のとき

$$|x-3|+|x-1|=(-x+3)+(x-1)=2$$

このとき，与えられた方程式を満たさない．

［3］$3\leqq x$ のとき　$(x-3)+(x-1)=3$

これを解いて　$x=\dfrac{7}{2}$

これは，$3\leqq x$ を満たすから，解である．

よって，求める方程式の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}}$

(6) ［1］$k=0$ のとき　$-4x-1=0$

この方程式は実数解を1つだけもつ．

［2］$k\neq 0$ のとき　$2kx^2-4x-1=0$ が重解を持つときであるから，

$(-4)^2-4\cdot 2k\cdot(-1)=0$　これを解いて　$k=-2$

よって　$\boldsymbol{k=0,-2}$

(7) 頂点が $(1,-2)$ であるから，求める関数は $y=a(x-1)^2-2$ とおける．

このグラフが $(2,-3)$ を通るから　$-3=a-2$　ゆえに　$a=-1$

よって　$y=-(x-1)^2-2$　すなわち　$\boldsymbol{y=-x^2+2x-3}$

(8) $y=-3x^2+6x+1$ のグラフを x 軸方向へ -2，y 軸方向へ3だけ平行移動すると

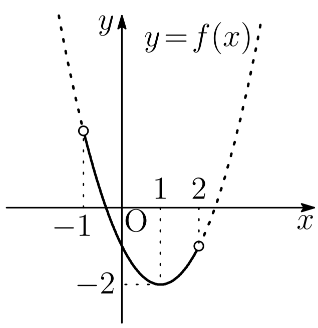
$y-3=-3(x+2)^2+6(x+2)+1$　すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2-6x+4}$

(9) $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ であるから

$f(x)=(x-1)^2-1$

$-1<x<2$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，$f(x)$ は

最大値はなし，$\boldsymbol{x=1}$ で最小値 $\boldsymbol{-2}$



(10) 2 次不等式の係数について

$$D = (-k)^2 - 4\cdot 1\cdot k = k(k-4)$$

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ であればよいので

$k(k-4) < 0$　これを解いて　$\boldsymbol{0 < k < 4}$

(11)

$$\begin{aligned} &\tan 65^\circ \tan 25^\circ + \tan 35^\circ \tan 55^\circ \\ =&\tan 65^\circ \times \frac{1}{\tan 65^\circ} + \tan 35^\circ \times \frac{1}{\tan 35^\circ} = \mathbf{2} \end{aligned}$$

(12) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

よって　$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{9}$

したがって　$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4}{9}}$

(13) $a = 5$，$b = 6$，$c = 10$ とおく．c が最大で，$c < a + b$ が成り立つので，

三角形が存在する．このとき

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 10^2}{2\cdot 5\cdot 6} = -\frac{13}{20} < 0$$

よって　**鈍角三角形**

(14) 正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 45^\circ} = 2\cdot 6$

ゆえに　$\mathrm{AB} = 2\cdot 6\sin 45^\circ = \boldsymbol{6\sqrt{2}}$

(15) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A$ であるから

$3 = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin A$　ゆえに　$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{A = 60^\circ,\ 120^\circ}$

(16) 70 以下の自然数全体の集合を U，U の部分集合で，2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とすると

$$\begin{aligned} A &= \{2{\cdot}1,\ 2{\cdot}2,\ 2{\cdot}3, \cdots,\ 2{\cdot}35\} \\ B &= \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3, \cdots,\ 3{\cdot}23\} \\ A \cap B &= \{6{\cdot}1,\ 6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ \cdots,\ 6{\cdot}11\} \end{aligned}$$

求めるのは $n(A \cup B)$ である．

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 35 + 23 - 11 \\ &= \mathbf{47} \end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cup \overline{B}) &= n(\overline{A \cap B}) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ &= 200 - 35 = \mathbf{165} \end{aligned}$$

(18) $x = 1 \Longrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

よって，$x = 1$ は $x^2 - 3x + 2 = 0$ であるための**十分条件**.

(19) 「$a + b < 0$ かつ $ab > 0$」$\Longleftrightarrow$「$a < 0$ かつ $b < 0$」

よって,「$a + b < 0$ かつ $ab > 0$」は「$a < 0$ かつ $b < 0$」の**必要十分条件**.

(20) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ であるから 720 の正の約数は，2^4 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5 の約数の積で表される．したがって，720 の正の約数の総和は

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 31{\cdot}13{\cdot}6 = \mathbf{2418}$$

(21) 特定の男子を固定すると，向かい合う男子は決まる．間に入る女子の並び方は 4 人を並べる順列であるから

$$4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{24}\ (\text{通り})$$

(22) 3 個の頂点を選んでできる三角形の個数は　${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10{\cdot}9{\cdot}8}{3{\cdot}2{\cdot}1} = 120$ (個)

1 辺を共有する三角形の個数は　$10{\cdot}(10 - 4) = 60$ (個)

2 辺を共有する三角形の個数は　10 (個)

よって，求める三角形の個数は　$120 - (60 + 10) = \mathbf{50}$ (個)

(23) 3 人の手の出し方は　$3 \times 3 \times 3 = 27$ (通り)

特定の 1 人が勝つ手の出し方は　3 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{27} = \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

(24) 1 回の試行で，表が出る確率は　$\dfrac{1}{2}$

この試行を 6 回行って 5 回以上表が出る確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \mathbf{\frac{7}{64}} $$

(25) 1 回目に赤球が出る確率は　$\dfrac{1}{3}$

2 回目に赤球が出る確率は　$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

3 回目に赤球が出る確率は　$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$

よって，取り出す赤球の回数の期待値は

$$ 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{4}{27} = \mathbf{\frac{11}{9}} $$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	③	②	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	①	②	③	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
②	③	④	③	③
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
④	③	②	③	①
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
②	①	③	③	①