平成21年度　熊本駅前看護リハビリテーション学院　一般後期試験
看護・理学・作業　数学I・数学A(平成21年3月8日)60分

(解答はすべて解答番号【1】～【25】にマークせよ)

(1) $x = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ のとき，$\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$ の値は， **【1】**

① 5　② 6　③ 7　④ 8

(2) $x + y = 3$，$xy = 1$ のとき，$x^3 + y^3$ の値は， **【2】**

① 12　② 18　③ 24　④ 27

(3) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$ を簡単にすると， **【3】**

① $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　② $\sqrt{7}-1$　③ $\sqrt{7}+1$　④ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(4) $-3 < a < 0$ のとき，$3\sqrt{a^2-4a+4} - 2\sqrt{a^2+6a+9} + 4\sqrt{a^2}$ を簡単にすると， **【4】**

① $-9a$　② $12-5a$　③ $5a-12$　④ $9a$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b の値は順に， **【5】**

① $2,\ \sqrt{2}-1$　② $2,\ 2\sqrt{2}-2$　③ $3,\ \sqrt{2}-1$　④ $3,\ 2\sqrt{2}-2$

(6) $\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき，$\sqrt{50}$ の小数部分は， **【6】**

① $5a$　② $5a-1$　③ $5a-2$　④ $5a-3$

(7) 頂点が $(-1,\ 3)$ で，点 $(0,\ 1)$ を通る，軸が y 軸に平行な放物線の方程式は， **【7】**

① $y = -2x^2 - 4x - 1$　② $y = -2x^2 - 4x + 1$
③ $y = 2x^2 + 4x - 1$　④ $y = 2x^2 + 4x + 1$

(8) 放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ を x 軸方向へ3，y 軸方向へ5だけ平行移動した放物線は， **【8】**

① $y = x^2 - 2x - 3$　② $y = x^2 - 2x + 3$
③ $y = x^2 + 2x - 3$　④ $y = x^2 + 2x + 3$

(9) 放物線 $y = 2x^2 + bx + c$ は点 $(1,\ 1)$ を通り，かつその頂点が直線 $3x + y - 4 = 0$ 上にあるという．このような放物線の個数は， **【9】**

① 1個　② 2個　③ 3個　④ 4個

(10) x の関数 $f(x)=-x^2-4x+1\ (1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値・最小値はそれぞれ順に，
【10】

① $5, -20$　② 5, なし　③ $-4, -20$　④ -4, なし

(11) x の関数 $f(x)=2x^2+3ax+2a$ の最小値が最大となるような a の値は，**【11】**

① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{2}{9}$　③ $\dfrac{4}{9}$　④ $\dfrac{8}{9}$

(12) x の 2 次関数 $f(x)=ax^2-2ax+b\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -4 であるとき，b の値は，**【12】**

① $-4, -3$　② -4, 3　③ $4, -3$　④ 4, 3

(13) $|x-4|+|x-2|=4$ をみたす実数 x の値は，**【13】**

① $-1, -5$　② $1, -5$　③ -1, 5　④ 1, 5

(14) x の方程式 $x^2+kx-k+3=0$ が実数解をもたないような実定数 k の値の範囲は，**【14】**

① $-6<k<-2$　② $-6<k<2$　③ $-2<k<6$　④ $2<k<6$

(15) 任意の実数 x で $2x^2-2(k-1)x+k+3$ が成り立つ実定数 k の値の範囲は，**【15】**

① $-5<k<-1$　② $-5<k<1$　③ $-1<k<5$　④ $1<k<5$

(16) 放物線 $y=x^2-x+k$ が直線 $y=2x-3$ と共有点をもたないような実定数 k の値の範囲は，**【16】**

① $k<-\dfrac{3}{4}$　② $k>-\dfrac{3}{4}$　③ $k<\dfrac{3}{4}$　④ $k>\dfrac{3}{4}$

(17) $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ$ の値は，**【17】**

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1

(18) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値は，**【18】**

① $\dfrac{7}{32}$　② $\dfrac{9}{32}$　③ $\dfrac{7}{16}$　④ $\dfrac{9}{16}$

(19) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ のとき，$\tan\theta$ の値は，**【19】**

① $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$　② $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$　④ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(20) 3 辺の長さが 5，12，13 であるような三角形は， **【20】**

① 成立しない　② 鋭角三角形　③ 直角三角形　④ 鈍角三角形

(21) $\sin A\cos B = \sin C$ であるような $\triangle$ABC は， **【21】**

① 成立しない　② 鋭角三角形　③ 直角三角形　④ 鈍角三角形

(22) $\mathrm{CA} = 2$，$\mathrm{AB} = \sqrt{6}$，$\angle \mathrm{C} = 60^\circ$ の $\triangle$ABC において，$\angle$B の大きさは， **【22】**

① 30°　② 45°　③ 45°，135°　④ 30°，150°

(23) $\angle \mathrm{A} = 60^\circ$，$\mathrm{CA} = 5$，面積が 15 である $\triangle$ABC において，AB の長さは， **【23】**

① $3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{3}$　③ $5\sqrt{3}$　④ $6\sqrt{3}$

(24) $\triangle$ABC において，$\angle \mathrm{A} = 120^\circ$，$\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{AC} = 5$ とする。$\angle$A の二等分線が BC と交わる点を D とするとき，AD の長さは， **【24】**

① $\dfrac{15}{8}$　② $\dfrac{15}{7}$　③ $\dfrac{15}{4}$　④ $\dfrac{15}{2}$

(25) 底面の半径が 3，母線の長さが 5 である円錐に内接する球の半径は， **【25】**

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2　④ $\dfrac{5}{2}$

解答例

(1) $x = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,　$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに　$x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$

よって　$\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = (-\sqrt{5})^2 = \mathbf{5}$

(2) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 3^3 - 3\cdot1\cdot3 = \mathbf{18}$

(3) $\sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{(7+1)+2\sqrt{7\cdot1}}$
$= \sqrt{7} + \sqrt{1} = \boldsymbol{\sqrt{7}+1}$

(4) $3\sqrt{a^2-4a+4} - 2\sqrt{a^2+6a+9} + 4\sqrt{a^2}$
$= 3|a-2| - 2|a+3| + 4|a|$

$-3 < a < 0$ より $|a-2| = -a+2$，$|a+3| = a+3$，$|a| = -a$ であるから

(与式) $= 3(-a+2) - 2(a+3) + 4(-a) = \boldsymbol{-9a}$

(5) $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2+\sqrt{2}$$

$1<\sqrt{2}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{2}<4$ より　$a=\mathbf{3}$

$a+b=2+\sqrt{2}$ より　　$b=(2+\sqrt{2})-a=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(6) $1<\sqrt{2}<2$ より，$\sqrt{2}$ の整数部分は 1 であるから

$$\sqrt{2}=1+a \quad \cdots ①$$

$7<\sqrt{50}<8$ より，$\sqrt{50}$ の小数部分は　$\sqrt{50}-7$

よって，$\sqrt{50}$ の小数部分は，① から

$$\sqrt{50}-7=5\sqrt{2}-7=5(1+a)-7=\boldsymbol{5a-2}$$

(7) 頂点が $(-1,\ 3)$ であるから，求める関数は $y=a(x+1)^2+3$ とおける．

このグラフが $(0,\ 1)$ を通るから　　$1=a+3$　ゆえに　$a=-2$

よって　　$y=-2(x+1)^2+3$　すなわち　$\boldsymbol{y=-2x^2-4x+1}$

(8) $y=x^2+4x+1$ のグラフを x 軸方向へ 3，y 軸方向へ 5 だけ平行移動すると

$y-5=(x-3)^2+4(x-3)+1$　すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-2x+3}$

(9) 頂点が直線 $3x+y-4=0$ 上にあるから，頂点を $(p,-3p+4)$ とし，x^2 の係数に注意して，求める関数を $y=2(x-p)^2-3p+4$ とおく．

このグラフが $(1,\ 1)$ を通るから　　$1=2(1-p)^2-3p+4$

整理して　　$2p^2-7p+5=0$　これを解いて　$p=1,\ \dfrac{5}{2}$

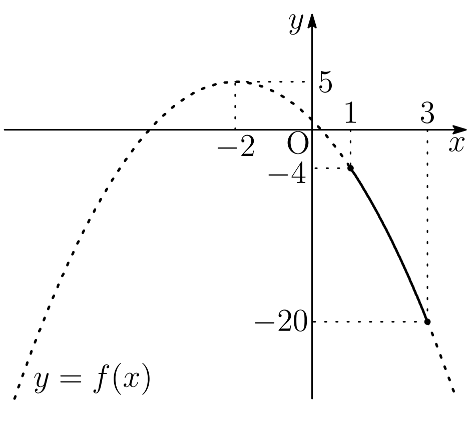
よって，このような放物線の個数は　　**2 個**

(10) $-x^2-4x+1=-(x+2)^2+5$ であるから

$f(x)=-(x+2)^2+5$

$1 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=1}$ **で最大値** $\boldsymbol{-4}$
$\boldsymbol{x=1}$ **で最小値** $\boldsymbol{-20}$



(11) $f(x)=2x^2+3ax+2a=2\left(x+\dfrac{3a}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}a^2+2a$ であるから

$f(x)$ の最小値 $-\dfrac{9}{8}a^2+2a$ は

$$-\frac{9}{8}a^2+2a=-\frac{9}{8}\left(a-\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}$$

よって，この関数の最小値は，$a=\dfrac{8}{9}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{9}}$ をとる．

(12) $f(x)=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b\ (-2\leqq x\leqq 2)$

［1］$a>0$ のとき

$x=-2$ で最大値 $8a+b$，$x=1$ で最小値 $-a+b$ をとる．

ゆえに　$8a+b=5$，$-a+b=-4$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$

［2］$a<0$ のとき

$x=1$ で最大値 $-a+b$，$x=-2$ で最小値 $8a+b$ をとる．

ゆえに　$-a+b=5$，$8a+b=-4$

これを解いて　$a=-1$，$b=4$

よって　$\boldsymbol{b=4,-3}$

(13) ［1］$x<2$ のとき　$(-x+4)+(-x+2)=4$

これを解いて　$x=1$

これは，$x<2$ を満たすから，解である．

［2］$2\leqq x<4$ のとき

$$|x-4|+|x-2|=(-x+4)+(x-2)=2$$

このとき，与えられた方程式を満たさない．

［3］$4\leqq x$ のとき　$(x-4)+(x-2)=4$

これを解いて　$x=5$

これは，$4\leqq x$ を満たすから，解である．

よって，求める方程式の解は　$\boldsymbol{x=1,\ 5}$

(14) 2 次方程式 $x^2+kx-k+3=0$ について

$$D=k^2-4\cdot1\cdot(-k+3)=k^2+4k-12=(k+6)(k-2)$$

とする．この方程式が実数解をもたない条件は，$D<0$ であるから

$$(k+6)(k-2)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-6<k<2}$$

(15) 2 次不等式の係数について

$$D=\{-2(k-1)\}^2-4\cdot2\cdot(k+3)=4(k^2-4k-5)=4(k+1)(k-5)$$

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ であればよいので

$$(k+1)(k-5)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-1<k<5}$$

(16) $y=x^2-x+k$ と $y=2x-3$ から y を消去して整理すると

$$x^2-3x+k+3=0$$

これらが共有点をもたないとき，上の 2 次方程式について $D<0$ であるから

$$(-3)^2-4\cdot1\cdot(k+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k>-\frac{3}{4}}$$

(17)
$$\begin{aligned}&\sin20^\circ\cos70^\circ+\cos20^\circ\sin70^\circ\\&=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=\mathbf{1}\end{aligned}$$

(18) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{16}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}$

したがって　$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}}$

(19) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の両辺を 2 乗して整理すると　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\sin\theta$，$-\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$(x-\sin\theta)(x+\cos\theta)=0$$

すなわち　$x^2-(\sin\theta-\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta=0$

ゆえに　$x^2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\dfrac{1}{3}=0$

これを解いて　$x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ であるから　$\sin\theta>0$，$-\cos\theta<0$

したがって　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$，$-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$

よって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\div\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

(20) $5^2+12^2=13^2$ であるから　**直角三角形**

(21) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

したがって　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$　$\cdots$①

余弦定理により　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$　$\cdots$②

①，② を $\sin A\cos B=\sin C$ に代入すると

$$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$$

したがって　$c^2+a^2-b^2=2c^2$

ゆえに　$a^2=b^2+c^2$

よって，△ABC は $A=90^\circ$ の**直角三角形**である．

(22) $b=2$，$c=\sqrt{6}$ より，$b<c$ であるから　$B<C=60^\circ$　$\cdots$①

正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

① に注意して　$\boldsymbol{B=45^\circ}$

(23) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A$ であるから

$$15 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot \mathrm{AB}\sin 60^\circ \quad \text{よって} \quad \mathbf{AB = 4\sqrt{3}}$$

(24) $\mathrm{AD} = x$ とおく．

$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\sin 60^\circ$$

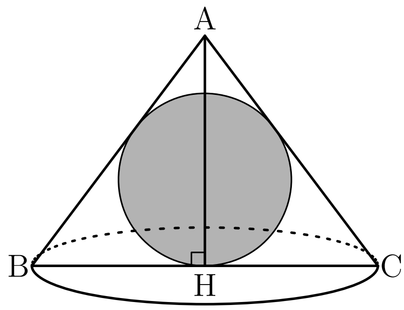
式を整理すると　$15 = 3x + 5x$

よって　$x = \mathbf{\dfrac{15}{8}}$

(25) 円錐に内接する球の半径を r とする．

右の図において，BC を底面の直径とし，

A から BC に垂線 AH を引くと



$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$$

$2s = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 5 + 6 + 5$ より　$s = 8$

これらを $S = rs$ に代入すると　$12 = r\cdot 8$　よって　$r = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	③	①	③
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	②	②	②	③
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
④	③	④	②	③
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
②	④	②	④	③
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
③	②	②	①	②