

令和7年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分

工学部 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 xyz 空間内において, 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0, 4\right)$ とし, 3点 $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(0, 1, 3)$ を通る平面を α とする. また, 点 $P(s, t, u)$ は平面 α 上の点とし, $s+t \neq 2$ のとき, 2点 A, P を通る直線と平面 $z=0$ との交点を Q とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) u を s と t を用いて表せ.
- (2) 点 Q の x 座標, y 座標のそれぞれを s と t を用いて表せ.
- (3) s と t が $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 点 Q が平面 $z=0$ に描く軌跡を求めよ.

- 2 連続関数 $g(x)$, $h(x)$ はともに $0 \leq 3x \leq 1$ の範囲に定義され, $0 < 3x < 1$ 上で何回でも微分可能であると定義する. さらに

$$\sin(g(x)) = \cos(h(x)) = 3x$$

$$g(0) = 0, \quad h(0) = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq h(x) \leq \pi$$

の条件を満たす. $0 < 3x < 1$ 上の関数 f を $f(x) = g(x)h(x)$ とおき, f の n 次導関数を $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ と表すとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $0 < 3x < 1$ 上で $(9x^2 - 1)f^{(2)}(x) + 9xf^{(1)}(x)$ はある定数となる. その値を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \lim_{x \rightarrow +0} f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める. $a_{n+2} = y_n a_n$ を満たす n の多項式 y_n を求めよ.

- 3 1番から10番までの番号が付けられた10個のボールを袋の中から無作為に1つ取り出して, 番号を記録し戻すという操作を k 回繰り返す. このとき, 取り出したボールに1番から6番までの番号は1回も含まれず, 7番の番号が n 回含まれている確率を P_n とする. ただし, $k > n$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) P_n を k と n を用いて表せ.
- (2) $k = 100$ のとき, P_n が最大となる n を求めよ.
- (3) P_n が最大となる n が2つ存在するための k の条件を求めよ.

- 4 xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 θ を用いて次のように定める.

$$x = -\cos \theta - \theta \sin \theta, \quad y = \sin \theta - \theta \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{dx}{d\theta}$ および $\frac{dy}{d\theta}$ を計算して θ に関する x, y の増減と極値を調べ、曲線 C の概形を図示せよ. ただし、曲線 C と y 軸に平行な直線が接するときの接点の座標も求めること.
- (2) $\theta = 0$ の位置から曲線 C 上を動く点 P を考える. 点 P の軌跡の長さが $\frac{2}{9}\pi^2$ に達するときの θ を θ_1 と定める. θ_1 を求めよ.
- (3) (2) で定めた θ_1 に対応する点 P を点 P_1 とする. 点 P_1 から y 軸に垂線を引くとき、この垂線、曲線 C , x 軸, y 軸で囲まれる面積を求めよ.

- 5 $\sqrt{3}(i-1)z \neq -(7+i)$ となる複素数 z に対し、複素数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{(5+3i)z + \sqrt{3}(i-1)}{\sqrt{3}(i-1)z + 7+i}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt{3}(i-1)z \neq -(7+i)$ となるすべての複素数 z に対し、

$$f(z) = \frac{(1+3\lambda)z + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z + 3+\lambda}$$

となる複素数 λ を λ_1 と定める. λ_1 を求めよ.

- (2) 複素数 λ_1 を (1) で定めたものとする. $|z| = |\lambda_1|$ となるすべての複素数 z に対し $|3+z^m| > |\sqrt{3}(z^m-1)|$ が成立する最小の自然数 m を求めよ.
- (3) $|z| = 1$ となる複素数 z に対し、複素数の列 $z_0, z_1, z_2, \dots$ を次のように定める. $z_0 = z$ とし、自然数 n に対し z_{n-1} まで定まったとき $z_n = f(z_{n-1})$ とする. このとき、 z_2 を z を用いて表し z_n を推測せよ. また、その結果を数学的帰納法で証明せよ.
- (4) $|z| = 1$ となる複素数 z に対し、複素数 z_n を (3) で定めたものとする. r_n を z_n の実部とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ を求めよ.

解答例

- 1** (1) $B(0, 0, 2)$, $C(1, 0, 3)$, $D(0, 1, 3)$ とすると

$$\overrightarrow{BC} = (1, 0, 1), \overrightarrow{BD} = (0, 1, 1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (s, t, u-2) \text{ について, } (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \text{ であるから}$$

$$-s - t + (u - 2) = 0 \quad \text{よって} \quad u = s + t + 2$$

- (2) (1)の結果より, $P(s, t, s+t+2)$ であるから $\overrightarrow{AP} = \left(s - \frac{1}{2}, t, s+t-2\right)$

$$Q(x, y, 0) \text{ について定数 } k \text{ を用いて, } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \text{ とすると}$$

$$(x, y, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 4\right) + k \left(s - \frac{1}{2}, t, s+t-2\right)$$

上式の z 成分について, $s+t-2 \neq 0$ に注意して

$$0 = 4 + k(s+t-2) \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{4}{s+t-2}$$

したがって, 点 Q の x, y 座標は, それぞれ

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{s+t-2} \left(s - \frac{1}{2}\right) = \frac{-7s+t+2}{2(s+t-2)},$$

$$y = -\frac{4}{s+t-2} \cdot t = -\frac{4t}{s+t-2}$$

- (3) (2)の結果から

$$2(s+t-2)x = -7s+t, \quad (s+t-2)t = -4t$$

上の2式をそれぞれ s, t について整理すると

$$\begin{cases} (2x+7)s + (2x-1)t = 4x+2 & \cdots \textcircled{1} \\ ys + (y+4)t = 2y & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① $\times (y+4) -$ ② $\times (2x-1)$ および ② $\times (2x+7) -$ ① $\times y$ を整理すると

$$(*) \begin{cases} (2x+2y+7)s = 4x+y+2 \\ (2x+2y+7)t = 3y \end{cases}$$

(*) の 2 式の辺々の和と差をとると

$$(2x + 2y + 7)(s + t) = (4x + 4y + 2)$$

$$(2x + 2y + 7)(s - t) = (4x - 2y + 2)$$

上の 2 式をそれぞれ平方し, その辺々の和をとると

$$(2x + 2y + 7)^2 \{(s + t)^2 + (s - t)^2\} = (4x + 4y + 2)^2 + (4x - 2y + 2)^2$$

$s^2 + t^2 = 1$ を代入して整理すると

$$4x^2 + 2y^2 - 4x - 8y - 15 = 0$$

したがって 楕円 $\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{6} + \frac{(y - 2)^2}{12} = 1$



2 (1) $f(x) = g(x)h(x)$ の第 1 次, 第 2 次導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x), \\ f''(x) &= g''(x)h(x) + 2g'(x)h'(x) + g(x)h''(x) \end{aligned}$$

また, $\sin(g(x)) = \cos(h(x)) = 3x$ を微分すると

$$g'(x) \cos(g(x)) = -h'(x) \sin(h(x)) = 3$$

これをさらに微分すると

$$\begin{aligned} g''(x) \cos(g(x)) - g'(x)^2 \sin(g(x)) \\ = -h''(x) \sin(h(x)) - h'(x)^2 \cos(h(x)) = 0 \end{aligned}$$

上の諸式について $x \rightarrow +0$ とすると, $g(x)$, $h(x)$ がともに $0 \leq 3x \leq 1$ の範囲で連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = g(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} h(x) = h(0) = \frac{\pi}{2}$$

となること注意して

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\}, \\ \lim_{x \rightarrow +0} f''(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \{g''(x)h(x) + 2g'(x)h'(x) + g(x)h''(x)\}, \\ \lim_{x \rightarrow +0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \{-h'(x)\} = 3, \\ \lim_{x \rightarrow +0} g''(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \{-h''(x)\} = 0 \end{aligned}$$

上の第 3 式と第 4 式を第 1 式および第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f'(x) &= 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \cdot (-3) = \frac{3}{2}\pi, \\ \lim_{x \rightarrow +0} f''(x) &= 2 \cdot 3 \cdot (-3) = -18 \end{aligned}$$

$0 < 3x < 1$ の範囲で, $(9x^2 - 1)f''(x) + 9xf'(x)$ は定数であるから

$$(9x^2 - 1)f''(x) + 9xf'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \{(9x^2 - 1)f''(x) + 9xf'(x)\} = \mathbf{18}$$

(2) $(9x^2 - 1)f^{(2)}(x) + 9xf^{(1)}(x) = 18$ の両辺を n 回微分すると (n は自然数)

$$\begin{aligned} {}_nC_2(9x^2 - 1)''f^{(n)}(x) + {}_nC_1(9x^2 - 1)'f^{(n+1)}(x) + (9x^2 - 1)f^{(n+2)}(x) \\ + {}_nC_1(9x)'f^{(n)}(x) + 9xf^{(n+1)}(x) = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 9n(n-1)f^{(n)}(x) + 18nxf^{(n+1)}(x) + (9x^2 - 1)f^{(n+2)}(x) \\ + 9nf^{(n)}(x) + 9xf^{(n+1)}(x) = 0 \end{aligned}$$

上式において $x \rightarrow +0$ とすると, $a_n = \lim_{x \rightarrow +0} f^{(n)}(x)$ より

$$9n(n-1)a_n - a_{n+2} + 9na_n = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+2} = 9n^2a_n$$

よって $\mathbf{y_n = 9n^2}$

補足 ライブニッツの公式 (Leibniz formula)¹

$$\{g(x)h(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)$$



¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2020.pdf 6

- 3** (1) ボールを袋から1個取り出すとき、1番から6番のボール、7番のボール、8番から10番のボールである確率はそれぞれ

$$\frac{6}{10}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{3}{10}$$

であるから、求める確率 P_n は

$$P_n = \frac{k!}{n!(k-n)!} \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(\frac{3}{10}\right)^{k-n} = \frac{k! \cdot 3^{k-n}}{n!(k-n)! \cdot 10^k}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 &= \frac{k! \cdot 3^{k-(n+1)}}{(n+1)!(k-n-1)! \cdot 10^k} \bigg/ \frac{k! \cdot 3^{k-n}}{n!(k-n)! \cdot 10^k} - 1 \\ &= \frac{k-n}{3(n+1)} - 1 = \frac{k-3-4n}{3(n+1)} \end{aligned} \quad (*)$$

$$k=100 \text{ のとき, } (*) \text{ は } \frac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \frac{97-4n}{3(n+1)}$$

したがって $P_1 < P_2 < \cdots < P_{24} < P_{25} > P_{26} > \cdots > P_n$

よって、求める n は $n = 25$

- (3) (*) より、最大となる n が2つあるとき

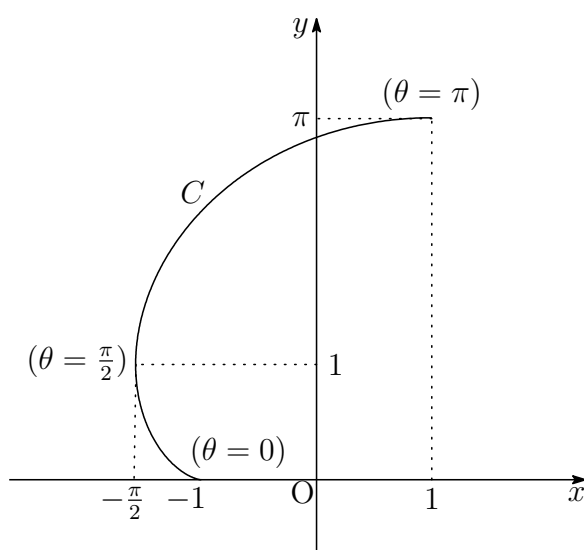
$$P_1 < P_2 < \cdots < P_n = P_{n+1} > P_{n+2} > \cdots$$

したがって $k-3 \equiv 0 \pmod{4}$ すなわち $k \equiv 3 \pmod{4}$ ■

- 4 (1) $C : x = -\cos \theta - \theta \sin \theta, \quad y = \sin \theta - \theta \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -\theta \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \theta \sin \theta$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	0	+	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	+	+	
$(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta})$		$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	
(x, y)	$(-1, 0)$	...	$(-\frac{\pi}{2}, 1)$	...	$(1, \pi)$



- (2) $\theta = 0$ から $\theta = \theta_1$ までの C の弧長を l とすると $(0 \leq \theta_1 \leq \pi)$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \sqrt{(-\theta \cos \theta)^2 + (\theta \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^{\theta_1} = \frac{\theta_1^2}{2} \end{aligned}$$

$$l = \frac{2}{9}\pi^2 \text{ のとき } \quad \frac{\theta_1^2}{2} = \frac{2}{9}\pi^2 \quad \text{これを解いて} \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{3}$$

(3) (2) の結果から, P_1 の x 座標を x_1 とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= -\cos \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 0 \end{aligned}$$

これと (1) の結果から, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ における C 上の x 座標は $x < 0$

$f(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta$ とし, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{2\pi}{3})} (-x) dy = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos \theta + \theta \sin \theta) f'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos \theta + \theta \sin \theta) \theta \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2} \sin 2\theta - \frac{\theta^2}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta^3}{6} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\theta}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right)' d\theta + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(-\frac{\theta^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)' d\theta \\ &= \frac{4}{81} \pi^3 + \left[\frac{\theta}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &\quad + \left[\left(-\frac{\theta^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) - (-\theta) \left(-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right) + (-1) \left(-\frac{1}{8} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{81} \pi^3 + \left[\left(-\frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \sin 2\theta - \frac{\theta}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{81} \pi^3 + \frac{\sqrt{3}}{18} \pi^2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

補足 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

は漸化式である． $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで， n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが， $f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) dx \end{aligned}$$

が成立する．同様に，次式も成立する．

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x) dx \end{aligned}$$

別解 点 P_1 の座標は $\left(-\cos \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}\right)$

すなわち $P_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

点 P_1 から y 軸に垂線 P_1H を引くと

$$\begin{aligned}\triangle OP_1H &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

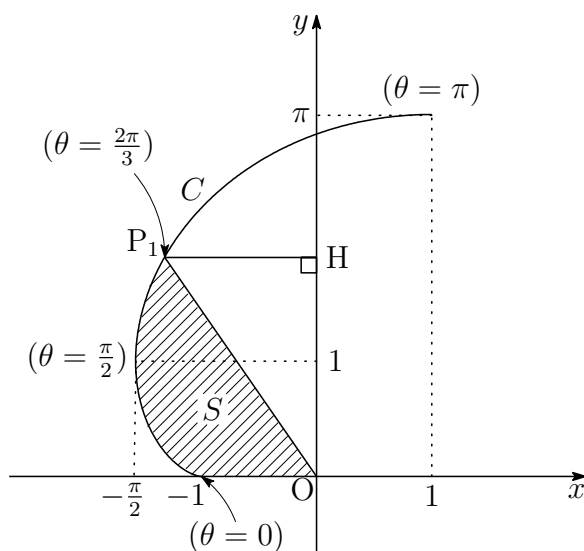
$C: x = -\cos \theta - \theta \sin \theta, \quad y = \sin \theta - \theta \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ より

$$\begin{aligned}x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y &= (-\cos \theta - \theta \sin \theta) \theta \sin \theta - (-\theta \cos \theta)(\sin \theta - \theta \cos \theta) \\ &= -\theta^2\end{aligned}$$

下の図の斜線部分の面積を S とすると、ガウス・グリーンの定理により
(積分区間は回転角の正の向きにとる)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 \left(x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 (-\theta^2) d\theta = \left[-\frac{\theta^3}{6} \right]_{\frac{2\pi}{3}}^0 = \frac{4}{81}\pi^3$$

求める面積は $S + \triangle OP_1H = \frac{4}{81}\pi^3 + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$



5 (1) $\sqrt{3}(i-1)z \neq -(7+i)$ となるすべての複素数 z に対し,

$$f(z) = \frac{(5+3i)z + \sqrt{3}(i-1)}{\sqrt{3}(i-1)z + 7+i} = \frac{-\frac{1+4i}{\sqrt{3}}z + 1}{z - \frac{3+4i}{\sqrt{3}}} \quad (\text{A})$$

次式の $f(z)$ について, $\lambda = 1$ とすると, $f(z) = z$ となり, 上式と一致しない. したがって, $\lambda - 1 \neq 0$ に注意して

$$f(z) = \frac{(1+3\lambda)z + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z + 3+\lambda} = \frac{\frac{1+3\lambda}{\sqrt{3}(\lambda-1)}z + 1}{z + \frac{3+\lambda}{\sqrt{3}(\lambda-1)}} \quad (\text{B})$$

(A) と (B) が一致するとき

$$\begin{aligned} \frac{3+\lambda}{\sqrt{3}(\lambda-1)} &= -\frac{3+4i}{\sqrt{3}}, & \frac{1+3\lambda}{\sqrt{3}(\lambda-1)} &= -\frac{1+4i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+\lambda}{\lambda-1} &= -3-4i, & \frac{1+3\lambda}{\lambda-1} &= -1-4i \\ 1 + \frac{4}{\lambda-1} &= -3-4i, & 3 + \frac{4}{\lambda-1} &= -1-4i \end{aligned}$$

上の2式から $\frac{1}{\lambda-1} = -1-i$ これを解いて $\lambda = \frac{1+i}{2}$

よって $\lambda_1 = \frac{1+i}{2}$

$$(2) \text{ (1) の結果から } |z| = |\lambda_1| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|3 + z^m| > |\sqrt{3}(z^m - 1)| \text{ より } |3 + z^m|^2 > 3|z^m - 1|^2$$

$$\begin{aligned} (3 + z^m)(3 + \bar{z}^m) &> 3(z^m - 1)(\bar{z}^m - 1) \\ 9 + 3(z^m + \bar{z}^m) + |z|^{2m} &> 3(|z|^{2m} - z^m - \bar{z}^m + 1) \end{aligned}$$

$$\text{整理すると } |z|^{2m} - 3(z^m + \bar{z}^m) < 3$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{2^m} - 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \cos m\theta < 3$$

任意の θ に対して

$$\frac{1}{2^m} - 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \cos m\theta \leq \frac{1}{2^m} + 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m$$

$$\text{ここで, } g(m) = \frac{1}{2^m} + 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \text{ とおくと}$$

$$g(m) < 3$$

を満たす最小の自然数 m を求めればよい.

$$g(1) = \frac{1}{2} + 3\sqrt{2},$$

$$g(2) = \frac{1}{4} + 3,$$

$$g(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\sqrt{2} < \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19}{8} < 3$$

よって $\mathbf{m = 3}$

$$(3) \quad f(z) = \frac{(1+3\lambda)z + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z + 3 + \lambda} \text{ について } \left(\lambda_1 = \frac{1+i}{2} \right),$$

$$z_1 = f(z), \quad z_2 = f(z_1) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+3\lambda)f(z_1) + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)f(z_1) + 3 + \lambda} \\ &= \frac{(1+3\lambda)\frac{(1+3\lambda)z + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z + 3 + \lambda} + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)\frac{(1+3\lambda)z + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z + 3 + \lambda} + 3 + \lambda} \\ &= \frac{(1+3\lambda^2)z + \sqrt{3}(\lambda^2-1)}{\sqrt{3}(\lambda^2-1)z + 3 + \lambda^2} \end{aligned}$$

上の結果から

$$z_n = \frac{(1+3\lambda^n)z + \sqrt{3}(\lambda^n-1)}{\sqrt{3}(\lambda^n-1)z + 3 + \lambda^n} \quad (*)$$

と推測される.

[1] $n = 1$ のとき, 自明.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} z_{k+1} = f(z_k) &= \frac{(1+3\lambda)z_k + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)z_k + 3 + \lambda} \\ &= \frac{(1+3\lambda)\frac{(1+3\lambda^k)z + \sqrt{3}(\lambda^k-1)}{\sqrt{3}(\lambda^k-1)z + 3 + \lambda^k} + \sqrt{3}(\lambda-1)}{\sqrt{3}(\lambda-1)\frac{(1+3\lambda^k)z + \sqrt{3}(\lambda^k-1)}{\sqrt{3}(\lambda^k-1)z + 3 + \lambda^k} + 3 + \lambda} \\ &= \frac{(1+3\lambda^{k+1})z + \sqrt{3}(\lambda^{k+1}-1)}{\sqrt{3}(\lambda^{k+1}-1)z + 3 + \lambda^{k+1}} \end{aligned}$$

したがって, $n = k+1$ のときも, $(*)$ が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ は成立する.

(4) $|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ であるから, (3) の結論から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{z - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}z + 3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

補足 $z_{n+1} = f(z_n)$ より, 漸化式

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{(5+3i)z_n + \sqrt{3}(i-1)}{\sqrt{3}(i-1)z_n + 7+i} = \frac{-(1+4i)z_n + \sqrt{3}}{\sqrt{3}z_n - 3 - 4i}$$

の特性方程式

$$z = \frac{-(1+4i)z + \sqrt{3}}{\sqrt{3}z - 3 - 4i} \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{3}z^2 - 2z - \sqrt{3} = 0$$

の解が $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} &= -4i \left(z_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ z_{n+1} - \sqrt{3} &= -\frac{(4+4i)(z_n - \sqrt{3})}{\sqrt{3}z_n - 3 - 4i} \end{aligned}$$

$$\text{上の2式から} \quad \frac{z_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{z_{n+1} - \sqrt{3}} = \lambda \cdot \frac{z_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}{z_n - \sqrt{3}}$$

$$z_0 = z \text{ であるから} \quad \frac{z_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}{z_n - \sqrt{3}} = \lambda^n \cdot \frac{z + \frac{1}{\sqrt{3}}}{z - \sqrt{3}}$$

$$\text{したがって} \quad z_n = \frac{(1+3\lambda^n)z + \sqrt{3}(\lambda^n - 1)}{\sqrt{3}(\lambda^n - 1)z + 3 + \lambda^n}$$

■