

## 令和6年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分

工学部 3月12日 数学I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5

1  $xyz$ 空間内の点  $A, B, C, D$  の座標をそれぞれ  $(2, 1, 0), (9, 0, 0), (6, 9, 0), (5, 8, 2\sqrt{2})$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $A, B, C$  を通る円の半径を求めよ.
- (2) (1) で求めた円の周上を移動する点を  $E$  とする. 三角形  $ABE$  の面積が 25 となるときの点  $E$  の座標を求めよ. ただし, 点  $E$  の  $x$  座標は  $y$  座標より大きいとする.
- (3) 点  $A, B, D$ , および (2) で求めた点  $E$  を通る球面上を移動する点を  $P$  とする. ただし, 点  $P$  の  $z$  座標は正とする. 四面体  $ABEP$  の体積が最大となるときの体積  $V$  を求めよ. また, 四面体  $ABEP$  の体積が  $\frac{3}{5}V$  を保つように点  $P$  が移動したときの, 点  $P$  が描く図形の方程式を求めよ.

2  $x$  を実数として, 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  を考える.

$$a_{n+2} = xa_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = x$$

- (1)  $x = 2$  のとき, 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2)  $x = -2$  のとき, 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (3)  $x$  を変数とみると, すべての自然数  $n = 1, 2, \dots$  について,  $a_n(x)$  が  $x$  に関する  $n$  次式であること, および  $x^n$  の係数が 1 であることを示せ.
- (4) すべての自然数  $n = 1, 2, \dots$  について,  $x$  に関する  $n$  次方程式  $a_n(x) = 0$  は,  $-2$  より大きく  $2$  より小さい異なる  $n$  個の実数解をもち, これらの解は  $a_{n+1}(x) = 0$  の解と交互に並ぶことを示せ. ここで, 解が交互に並ぶとは,  $a_n(x) = 0$  の解を値が小さい順に  $b_1, b_2, \dots, b_n$  と記述し,  $a_{n+1}(x) = 0$  の解を値が小さい順に  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  と記述するとき,

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \dots < c_n < b_n < c_{n+1}$$

となることを意味する. ただし,  $n$  次方程式  $f(x) = 0$  は  $n$  個の解  $d_1, d_2, \dots, d_n$  をもち,  $f(x)$  はある実数  $k$  を用いて

$$f(x) = k(x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_n)$$

と表せるという事実を用いてよい.

3  $n$  は自然数とし,  $z_0 = 1$  とする. さいころを  $n$  回投げて以下の規則により複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を定める.

- (a) さいころを投げて  $k$  回目に奇数が出たとき  $z_k = z_{k-1}$  とおく.
- (b) さいころを投げて  $k$  回目に偶数  $2m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) が出たとき,  $z_k = i^m z_{k-1}$  とおく. ただし,  $i$  は虚数単位とする.

以下の問いに答えよ.

- (1)  $z_n$  が正の実数となる確率を  $P_n$  とおき,  $z_n$  が負の実数となる確率を  $Q_n$  とおく.  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  を求めよ.
- (2) (1) で定めた  $P_n$  と  $Q_n$  を考える. すべての  $n$  について  $P_n + 3Q_n = 1$  が成立することを示せ.
- (3) (1) で定めた  $P_n$  を求めよ.

4 曲線  $C: y = (1 - x^2)^2$  と, 曲線  $C$  上の点  $P(k, (1 - k^2)^2)$  を考える. ただし,  $k$  は正の実数とする. また点  $P$  における曲線  $C$  の接線を  $l$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 接線  $l$  の方程式を求めよ.
- (2)  $k \neq 1$  とする. 点  $P$  および点  $P$  とは異なる 1 点でのみ曲線  $C$  と接線  $l$  が交わる時,  $k$  の値を求めよ.
- (3)  $k$  が (2) で求めた値のとき, 曲線  $C$  と接線  $l$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ.

5 実数  $x, y$  と虚数単位  $i$  を用いて表される複素数  $z = x + yi$  に対して,  $z$  の絶対値を  $|z|$  で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上の領域

$$E = \left\{ z \mid \left| \frac{z - 1 - i}{z + 1 + i} \right| \leq 1 \right\}$$

を複素数平面上に図示せよ.

(2) 複素数  $\alpha = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{4}$  を極形式で表せ.

(3) 複素数平面上の領域

$$D_0 = \left\{ z \mid \left| z - \sqrt{2} - \sqrt{6}i \right| \leq 2 \right\}$$

を考える. また, (2) の複素数  $\alpha$  と領域  $D_0$  を用いて領域  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を次式で定義する.

$$D_n = \{ z \mid z = \alpha^n w, w \in D_0 \}$$

さらに領域  $D_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) と (1) の領域  $E$  の共通領域の面積を  $s_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とする.  $s_1$  を求めよ.

(4) (3) で求めた  $s_n$  に対して  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$  を求めよ.

## 解答例

- 1 (1) 3点 A(2, 1, 0), B(9, 0, 0), C(6, 9, 0) を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad z = 0 \quad (*)$$

とおくと, これらの3点がこの円周上の点であるから

$$\begin{cases} 2a + b + c + 5 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 9a + c + 81 = 0 & \dots \textcircled{2} \\ 6a + 9b + c + 117 = 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

③ - ①, ③ - ② を行い, それぞれ整理すると

$$a + 2b + 28 = 0, \quad -a + 3b + 12 = 0$$

上の2式から  $a = -12, b = -8$  これを ① に代入して  $c = 27$   
したがって  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0, \quad z = 0$

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2, \quad z = 0$$

よって, 求める円の半径は **5**

(2)  $AB = \sqrt{(9-2)^2 + (0-1)^2} = 5\sqrt{2}$

$E = \angle AEB$  とおくと, 正弦定理により

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin E} = 2 \cdot 5 \quad \text{ゆえに} \quad \sin E = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{4}$$

$\alpha = BE, \beta = AE$  とおくと, 条件および余弦定理により

$$\frac{1}{2}\alpha\beta \sin E = 50, \quad (5\sqrt{2})^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos E$$

したがって  $\alpha\beta = 50\sqrt{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 50 + 100\sqrt{2} \cos E \quad \dots \textcircled{5}$

④, ⑤ より,  $E = 45^\circ$  であるから  $\alpha^2 + \beta^2 = 150$

$\alpha^2, \beta^2$  を解とする2次方程式は

$$t^2 - 150t + (50\sqrt{2})^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 50)(t - 100) = 0$$

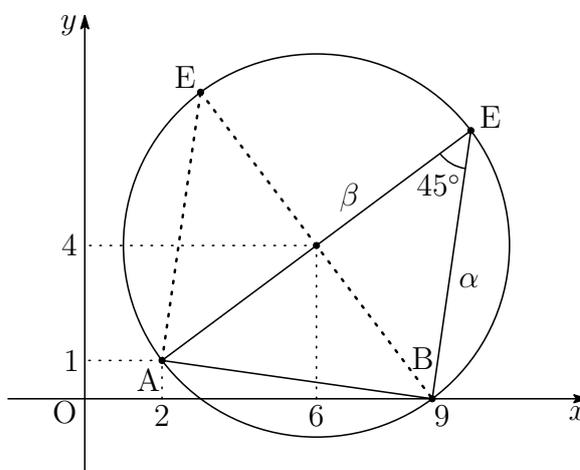
したがって  $(\alpha, \beta) = (5\sqrt{2}, 10), (10, 5\sqrt{2})$

- (i)  $(\alpha, \beta) = (5\sqrt{2}, 10)$  のとき,  $\triangle ABE$  は  $AB = BE$  の直角二等辺三角形であるから,  $\vec{BE}$  は  $\vec{AB}$  を  $90^\circ$  回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BE} \\ &= (2, 1, 0) + (7, -1, 0) + (1, 7, 0) = (10, 7, 0)\end{aligned}$$

- (ii)  $(\alpha, \beta) = (10, 5\sqrt{2})$  のとき,  $\triangle ABE$  は  $AB = AE$  の直角二等辺三角形であるから,  $\vec{AE}$  は  $\vec{AB}$  を  $90^\circ$  回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \vec{OA} + \vec{AE} \\ &= (2, 1, 0) + (1, 7, 0) = (3, 8, 0)\end{aligned}$$



点 E の  $x$  座標は  $y$  座標より大きいから, (i), (ii) より  $E(10, 7, 0)$

- (3) 点 A, B, D, および (2) で求めた点 E を通る球面の方程式は, (\*) に注意して

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 8y + dz + 27 = 0$$

とおける. これが点  $D(5, 8, 2\sqrt{2})$  を通るから

$$5^2 + 8^2 + (2\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 5 - 8 \cdot 8 + 2\sqrt{2}d + 27 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad d = 0$$

すなわち, 球面の方程式は  $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 5^2$

点 P が  $(6, 4, 5)$  のとき, 四面体 ABPE の体積は最大値

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABE \times 5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot 5 = \frac{1}{6} (5\sqrt{2})^2 \cdot 5 = \frac{125}{3}$$

をとる. よって, 条件を満たすとき, 点 P は球面および平面  $z = 3$  の交線上にあるから, P の描く図形の方程式は

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 4^2, \quad z = 3$$



**2** (1)  $x = 2$  より  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 = 1$$

$$n \geq 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$a_n - a_0 = n \quad \text{ゆえに} \quad a_n = n + 1$$

$$n = 0 \text{ のときも上式は成立するから} \quad a_n = n + 1$$

(2)  $x = -2$  より  $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$

$$(-1)^{n+2} a_{n+2} - (-1)^{n+1} a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_{n+1} - (-1)^n a_n$$

$$\text{これから} \quad (-1)^{n+1} a_{n+1} - (-1)^n a_n = (-1)^1 a_1 - a_0 = 1$$

$$n \geq 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \{(-1)^{k+1} a_{k+1} - (-1)^k a_k\} = \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$(-1)^n a_n - a_0 = n \quad \text{ゆえに} \quad (-1)^n a_n = n + 1$$

$$\text{上の第2式は, } n = 0 \text{ のときも成立するから} \quad a_n = (-1)^n (n + 1)$$

(3) (\*)  $a_n(x)$  が  $x$  に関する  $n$  次式であること, および  $x^n$  の係数が 1 である.

[1]  $n = 1$  のとき,  $a_1 = x$  より, (\*) は成立する.

[2]  $n \leq k$  のとき, (\*) が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = xa_k + a_{k-1}$$

上式より,  $n \leq k + 1$  のとき, (\*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数  $n$  について, (\*) が成立する.

(4) (1), (2) の結果から,  $x = \pm 2$  は  $n$  次方程式  $a_n(x) = 0$  の解ではない.

$a_{n+2} - xa_{n+1} + a_n = 0$  より,  $t$  に関する特性方程式

$$t^2 - xt + 1 = 0$$

$x \neq \pm 2$  のとき, 特性方程式の異なる 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とすると, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha\beta = 1, \quad a_1 = \alpha + \beta, \quad a_0 = \alpha\beta$$

漸化式は  $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

これから  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

したがって  $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n(a_1 - \alpha a_0) = \beta^{n+1}$

同様に  $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n(a_1 - \beta a_0) = \alpha^{n+1}$

上の2式から  $a_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

$a_n = 0$  とすると,  $\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} = 0$  であるから,  $\alpha\beta = 1$  より

$$\alpha^{2(n+1)} = 1 \quad \text{これを解くと} \quad \alpha = \cos \frac{k\pi}{n+1} + i \sin \frac{k\pi}{n+1}$$

$\alpha\beta = 1$  より  $\beta = \cos \frac{k\pi}{n+1} - i \sin \frac{k\pi}{n+1}$

$\alpha \neq \beta$  に注意すると

$$x = \alpha + \beta = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

このとき  $b_k = 2 \cos \frac{n+1-k}{n+1}\pi = -2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$

同様に  $c_k = -2 \cos \frac{k\pi}{n+2} \quad (k = 1, 2, \dots, n+1)$

$(k+1)(n+1) - k(n+2) = n - k + 1 > 0$  より  $\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1} > 0$

したがって  $0 < \frac{k}{n+2} < \frac{k}{n+1} < \frac{k+1}{n+2} < 1$

$$0 < \frac{k}{n+2}\pi < \frac{k}{n+1}\pi < \frac{k+1}{n+2}\pi < \pi$$

ゆえに  $\cos \frac{k}{n+2}\pi > \cos \frac{k}{n+1}\pi > \cos \frac{k+1}{n+2}\pi$

$$-2 \cos \frac{k}{n+2}\pi < -2 \cos \frac{k}{n+1}\pi < -2 \cos \frac{k+1}{n+2}\pi$$

$c_k < b_k < c_{k+1}$  であるから ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \dots < c_n < b_n < c_{n+1}$$

別解  $a_n(x) = 0$  の解を値が小さい順に  $b_1, b_2, \dots, b_n$  と記述し,  $a_{n+1}(x) = 0$  の解を値が小さい順に  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  と記述するとき,

$$-2 < c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \dots < c_n < b_n < c_{n+1} < 2 \quad (\text{A})$$

とする.

[1]  $n = 1$  のとき, 漸化式から

$$a_1(x) = x, \quad a_2(x) = xa_1(x) - a_0(x) = x \cdot x - 1 = x^2 - 1$$

このとき  $b_1 = 0, c_1 = -1, c_2 = 1$  ゆえに  $c_1 < b_1 < c_2$

よって,  $n = 1$  のとき, (A) は成立する.

[2]  $n \leq k$  のとき, (A) が成立すると仮定する. このとき, (3) の結論に注意すると

$$a_k(x) = \prod_{j=1}^k (x - b_j), \quad a_{k+1} = \prod_{j=1}^{k+1} (x - c_j)$$

とおける. これを漸化式に適用すると

$$a_{k+2}(x) = x \prod_{j=1}^{k+1} (x - c_j) - \prod_{j=1}^k (x - b_j)$$

上式に  $x = c_i, c_{i+1}$  を代入すると ( $i = 1, 2, \dots, k$ )

$$a_{k+2}(c_i) = - \prod_{j=1}^k (c_i - b_j) = -(-1)^{k-i+1} \prod_{j=1}^k |c_i - b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{i+1}) = - \prod_{j=1}^k (c_{i+1} - b_j) = -(-1)^{k-i} \prod_{j=1}^k |c_{i+1} - b_j|$$

したがって  $a_{k+2}(c_i)a_{k+2}(c_{i+1}) < 0$

また, (1), (2) の結果から

$$a_{k+2}(2) = k + 3, \quad a_{k+2}(-2) = (-1)^{k+2}(k + 3)$$

同様に,  $a_{k+2}(c_1), a_{k+2}(c_{k+1})$  を求めると

$$a_{k+2}(c_1) = (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^k |c_1 - b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{k+1}) = - \prod_{j=1}^k |c_{k+1} - b_j|$$

したがって  $a_{k+2}(-2)a_{k+2}(c_1) < 0$ ,  $a_{k+2}(c_{k+1})a_{k+2}(2) < 0$   
 $a_{k+2}(x)$  は  $k+2$  次式であるから,  $k+2$  個の开区間

$$(-2, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_k, c_{k+1}), (c_{k+1}, 2)$$

のそれぞれに  $a_{k+2}(x) = 0$  となる  $x$  が 1 個ずつ存在する. これらの解  
を小さい順に  $d_1, d_2, \dots, d_{k+2}$  とおくと

$$-2 < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \dots < d_{n+1} < c_{n+1} < d_{n+2} < 2$$

よって,  $n = k+2$  のとき, (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数  $n$  について題意は成立する. ■

- 3** (1)  $z_n$  が  $1, -1, i, -i$  になる確率をそれぞれ  $P_n, Q_n, R_n, S_n$  とおくと, 次の確率漸化式が成立する ( $n = 0, 1, \dots$ ).

$$P_0 = 1, Q_0 = 0, R_0 = 0, S_0 = 0$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{2}R_n + \frac{1}{6}S_n$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{2}S_n$$

$P_n + Q_n + R_n + S_n = 1$  より,  $R_n + S_n = 1 - P_n - Q_n$  を  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  に代入して整理すると

$$P_0 = 1, Q_0 = 0, P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{6}, Q_{n+1} = \frac{1}{3}Q_n + \frac{1}{6}$$

したがって

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left( P_n - \frac{1}{4} \right), \quad Q_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left( Q_n - \frac{1}{4} \right)$$

$\left\{ P_n - \frac{1}{4} \right\}, \left\{ Q_n - \frac{1}{4} \right\}$  は, とともに公比  $\frac{1}{3}$  の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{4} = \left( P_0 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^n = \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$Q_n - \frac{1}{4} = \left( Q_0 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^n = \left( 0 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^n = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

よって 
$$P_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}, \quad Q_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad \cdots (*)$$

したがって 
$$P_1 = \frac{1}{2}, \quad Q_1 = \frac{1}{6}, \quad P_2 = \frac{1}{3}, \quad Q_2 = \frac{2}{9}$$

(2) (\*) より

$$P_n + 3Q_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} + 3 \times \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right\} = 1$$

(3) (\*) より 
$$P_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$$

■

- 4 (1)  $f(x) = (1 - x^2)^2$  とおくと  $f'(x) = 4x(x^2 - 1) \dots \textcircled{1}$   
 $C : y = f(x)$  上の点  $P(k, f(k))$  における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f(k) + f'(k)(x - k) \\ &= (1 - k^2)^2 + 4k(k^2 - 1)(x - k) \\ &= (k^2 - 1)^3(4kx - 3k^2 - 1) \end{aligned}$$

よって  $\ell : y = (k^2 - 1)(4kx - 3k^2 - 1)$

- (2)  $\textcircled{1}$  を順次微分すると

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 4, \quad f^{(3)}(x) = 24x, \quad f^{(4)}(x) = 24$$

4次関数  $f(x)$  を  $x = k$  を極として展開すると

$$\begin{aligned} f(x) &= f(k) + f'(k)(x - k) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x - k)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x - k)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x - k)^4 \end{aligned}$$

$C$  と  $\ell$  の方程式に注意して

$$\begin{aligned} f(x) - \{f(k) + f'(k)(x - k)\} &= \frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x - k)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x - k)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x - k)^4 \\ &= \frac{1}{2}(12k^2 - 4)(x - k)^2 + \frac{1}{6} \cdot 24k(x - k)^3 + \frac{1}{24} \cdot 24(x - k)^4 \\ &= (x - k)^2 \{(6k^2 - 2) + 4k(x - k) + (x - k)^2\} \\ &= (x - k)^2 \{(x - k)^2 + 4k(x - k) + 6k^2 - 2\} \end{aligned}$$

$C$  と  $\ell$  の共有点が2個であるとき、2次方程式

$$(x - k)^2 + 4k(x - k) + 6k^2 - 2 = 0 \quad (*)$$

が「 $k$ 以外の重解をもつ」または「 $k$ と $k$ 以外の解をもつ」場合がある。

(i) (\*) が重解をもつとき, 係数について

$$D/4 = (2k)^2 - (6k^2 - 2) = -2k^2 + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \pm 1$$

$k > 0, k \neq 1$  であるから, これを満たす  $k$  は存在しない.

(ii) (\*) が  $k$  を解にもつとき,  $6k^2 - 2 = 0 \dots \textcircled{2}$

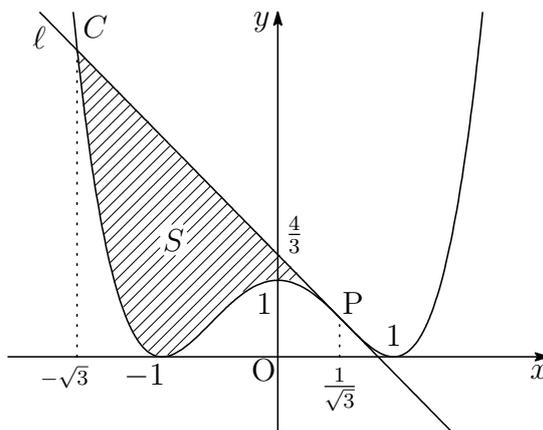
$$\begin{aligned} f(x) - \{f(k) + f'(k)(x - k)\} &= (x - k)^2 \{(x - k)^2 + 4k(x - k)\} \\ &= (x - k)^3(x + 3k) \end{aligned} \quad (**)$$

$$\textcircled{2} \text{ および } k > 0 \text{ より, } k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(i), (ii) \text{ より} \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3)  $C$  と  $\ell$  の位置関係に注意すると, (\*\*) より, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-3k}^k (x - k)^3(x + 3k) dx = \int_{-3k}^k (x + 3k)(k - x)^3 dx \\ &= \frac{1!3!}{(1 + 3 + 1)!} \{k - (-3k)\}^{1+3+1} = \frac{3!}{5!} (4k)^5 \\ &= \frac{256}{5} k^5 = \frac{256}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = \frac{256}{45\sqrt{3}} \end{aligned}$$



補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_tech\\_2010\\_kouki.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf) [1]

5 (1)  $\beta = 1 + i$  とおくと,  $\left| \frac{z - \beta}{z + \beta} \right| \leq 1$  より

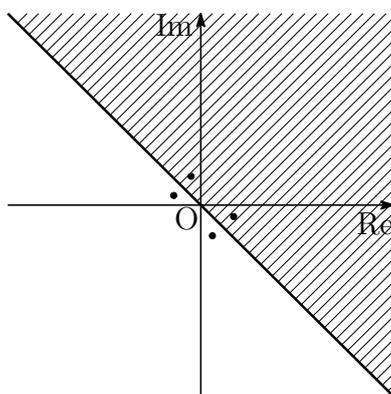
$$|z - \beta|^2 \leq |z + \beta|^2 \quad \text{整理すると} \quad \bar{\beta}z + \beta\bar{z} \geq 0$$

したがって  $\operatorname{Re} \left( \frac{z}{\beta} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z}{\beta} + \overline{\left( \frac{z}{\beta} \right)} \right\} \geq 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg \frac{z}{\beta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \arg \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{であるから}$$

$$\arg \beta - \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \arg \beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$$

よって, 領域  $E$  は図の斜線部分で境界線を含む.



別解  $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} \geq 0$  に  $z = x + yi$ ,  $\beta = 1 + i$  を代入すると

$$(1 - i)(x + yi) + (1 + i)(x - yi) \geq 0 \quad \text{整理すると} \quad x + y \geq 0$$

$$(2) \alpha = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

(3) 領域  $D_0, E, D_n$  をそれぞれ  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転させた領域を  $\tilde{D}_0, \tilde{E}, \tilde{D}_n$  とする.  
 $\tilde{D}_n$  の中心を  $a_n$ , 半径を  $r_n$  とすると ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \left\{ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right\} \alpha^n \\ &= (1 + \sqrt{3})(1 - i) \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{2n}{3}\pi + i \sin \frac{2n}{3}\pi \right) \\ r_n &= 2|\alpha|^n = 2 \left( 2^{-\frac{1}{2}} \right)^n = 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

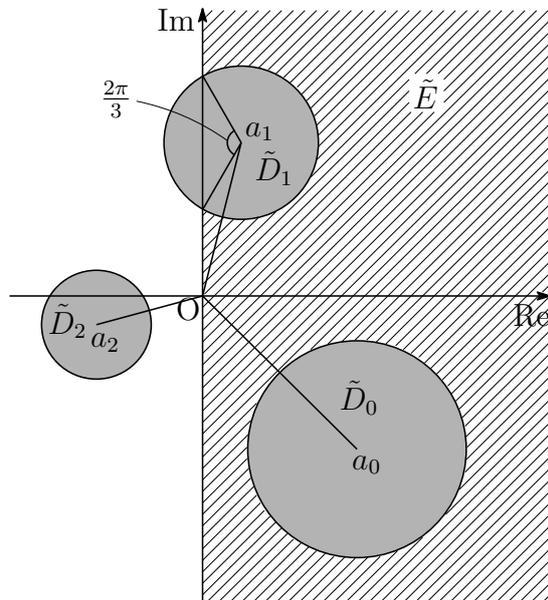
したがって

$$a_1 = (1 + \sqrt{3})(1 - i) \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \left\{ 1 + \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}i \right\} 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{Re}(a_1) = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad r_1 = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$s_1$  は  $\tilde{D}_1$  と  $\tilde{E}$  の共通領域の面積に等しいから

$$s_1 = \frac{1}{2} r_1^2 \left( \frac{4}{3}\pi + \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(4)  $a_n$  と  $r_n$  について

$$\frac{a_n}{r_n} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(1 - i) \left( \cos \frac{2n}{3}\pi + i \sin \frac{2n}{3}\pi \right)$$

(i)  $n \equiv 0 \pmod{3}$  のとき

$$\operatorname{Re} \left( \frac{a_n}{r_n} \right) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) > 1$$

したがって,  $\tilde{D}_n$  は  $\tilde{E}$  に含まれる.  $s_n$  は  $D_n$  の面積に等しい.  $s_0$  と  $s_n$  の相似比は  $1 : 2^{-\frac{n}{2}}$  であるから

$$s_0 = 4\pi, \quad s_n = s_0 \left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2 = s_0 \cdot 2^{-n}$$

(ii)  $n \equiv 1 \pmod{3}$  のとき, (3) の結果に注意して

$$\operatorname{Re} \left( \frac{a_n}{r_n} \right) = \frac{1}{2}$$

$s_1$  と  $s_n$  の相似比は  $1 : 2^{\frac{1}{2}(1-n)}$  であるから

$$s_n = s_1 \cdot 2^{1-n}$$

(iii)  $n \equiv 2 \pmod{3}$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{r_n} &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(1 - i) \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4} - \frac{1}{2}i \\ \operatorname{Re} \left( \frac{a_n}{r_n} \right) &= -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4} = -\left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) < -1 \end{aligned}$$

このとき,  $\tilde{E}$  は  $\tilde{D}_n$  を含まない.

(i)~(iii) より,  $s_n$  は  $\tilde{D}_n$  と  $\tilde{E}$  の共通領域の面積に等しいから

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s_n &= (s_0 + s_1) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \left( 4\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{8}{7} \\ &= \frac{128\pi + 12\sqrt{3}}{21} \end{aligned}$$

■