令和６年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

1 xyz 空間内の点 A，B，C，D の座標をそれぞれ (2, 1, 0)，(9, 0, 0)，(6, 9, 0)，$(5,\ 8,\ 2\sqrt{2})$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A，B，C を通る円の半径を求めよ．

(2) (1) で求めた円の周上を移動する点を E とする．三角形 ABE の面積が 25 となるときの点 E の座標を求めよ．ただし，点 E の x 座標は y 座標より大きいとする．

(3) 点 A，B，D，および (2) で求めた点 E を通る球面上を移動する点を P とする．ただし，点 P の z 座標は正とする．四面体 ABEP の体積が最大となるときの体積 V を求めよ．また，四面体 ABEP の体積が $\dfrac{3}{5}V$ を保つように点 P が移動したときの，点 P が描く図形の方程式を求めよ．

2 x を実数として，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+2} = xa_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = x$$

(1) $x = 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $x = -2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) x を変数とみると，すべての自然数 $n = 1, 2, \cdots$ について，$a_n(x)$ が x に関する n 次式であること，および x^n の係数が 1 であることを示せ．

(4) すべての自然数 $n = 1, 2, \cdots$ について，x に関する n 次方程式 $a_n(x) = 0$ は，-2 より大きく 2 より小さい異なる n 個の実数解をもち，これらの解は $a_{n+1}(x) = 0$ の解と交互に並ぶことを示せ．ここで，解が交互に並ぶとは，$a_n(x) = 0$ の解を値が小さい順に $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ と記述し，$a_{n+1}(x) = 0$ の解を値が小さい順に $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n+1}$ と記述するとき，

$$c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < \cdots < c_n < b_n < c_{n+1}$$

となることを意味する．ただし，n 次方程式 $f(x) = 0$ は n 個の解 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ をもち，$f(x)$ はある実数 k を用いて

$$f(x) = k(x - d_1)(x - d_2)\cdots(x - d_n)$$

と表せるという事実を用いてよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n は自然数とし，$z_0 = 1$ とする．さいころを n 回投げて以下の規則により複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n を定める．

(a) さいころを投げて k 回目に奇数が出たとき $z_k = z_{k-1}$ とおく．

(b) さいころを投げて k 回目に偶数 $2m$ $(m = 1, 2, 3)$ が出たとき，$z_k = i^m z_{k-1}$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) z_n が正の実数となる確率を P_n とおき，z_n が負の実数となる確率を Q_n とおく．P_1，Q_1，P_2，Q_2 を求めよ．

(2) (1) で定めた P_n と Q_n を考える．すべての n について $P_n + 3Q_n = 1$ が成立することを示せ．

(3) (1) で定めた P_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $C : y = (1 - x^2)^2$ と，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(k,\ (1 - k^2)^2)$ を考える．ただし，k は正の実数とする．また点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $k \neq 1$ とする．点 P および点 P とは異なる 1 点でのみ曲線 C と接線 ℓ が交わるとき，k の値を求めよ．

(3) k が (2) で求めた値のとき，曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 x，y と虚数単位 i を用いて表される複素数 $z = x + yi$ に対して，z の絶対値を $|z|$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上の領域

$$E = \left\{ z \,\middle|\, \left| \frac{z-1-i}{z+1+i} \right| \leqq 1 \right\}$$

を複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 $\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}$ を極形式で表せ．

(3) 複素数平面上の領域

$$D_0 = \left\{ z \,\middle|\, \left| z - \sqrt{2} - \sqrt{6} \right| \leqq 2 \right\}$$

を考える．また，(2) の複素数 α と領域 D_0 を用いて領域 D_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を次式で定義する．

$$D_n = \{ z \,|\, z = \alpha^n w, \quad w \in D_0 \}$$

さらに領域 D_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と (1) の領域 E の共通領域の面積を s_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．s_1 を求めよ．

(4) (3) で求めた s_n に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(9,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(6,\ 9,\ 0)$ を通る円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \quad z=0 \qquad (*)$$

とおくと，これらの 3 点がこの円周上の点であるから

$$\begin{cases} 2a+b+c+5=0 & \cdots ① \\ 9a+c+81=0 & \cdots ② \\ 6a+9b+c+117=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ − ①，③ − ② を行い，それぞれ整理すると

$$a+2b+28=0, \quad -a+3b+12=0$$

上の 2 式から　$a=-12,\ \ b=-8$　これを ① に代入して　$c=27$
したがって　　$x^2+y^2-12x-8y+27=0, \quad z=0$

$$(x-6)^2+(y-4)^2=5^2, \quad z=0$$

よって，求める円の半径は　　**5**

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{(9-2)^2+(0-1)^2}=5\sqrt{2}$
$E=\angle\mathrm{AEB}$ とおくと，正弦定理により

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin E}=2\cdot 5 \qquad \text{ゆえに} \quad \sin E=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ④$$

$\alpha=\mathrm{BE}$，$\beta=\mathrm{AE}$ とおくと，条件および余弦定理により

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\sin E=50, \quad (5\sqrt{2})^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos E$$

したがって　　$\alpha\beta=50\sqrt{2}, \quad \alpha^2+\beta^2=50+100\sqrt{2}\cos E \quad \cdots ⑤$
④，⑤ より，$E=45^\circ$ であるから　$\alpha^2+\beta^2=150$
$\alpha^2,\ \beta^2$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-150t+(50\sqrt{2})^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-50)(t-100)=0$$

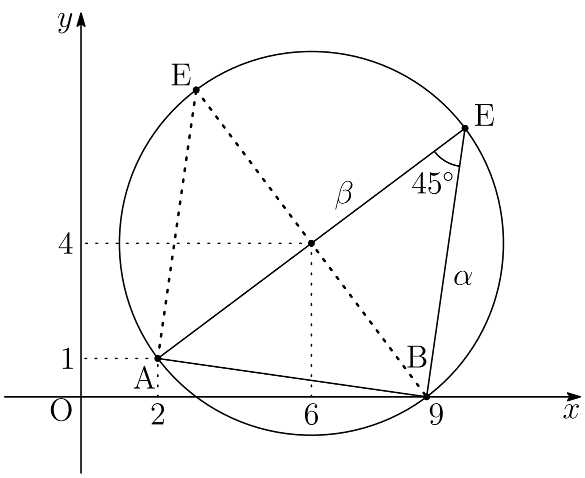
したがって　　$(\alpha,\ \beta)=(5\sqrt{2},\ 10),\ (10,\ 5\sqrt{2})$

(i) $(\alpha,\ \beta)=(5\sqrt{2},\ 10)$ のとき，△ABE は AB = BE の直角二等辺三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=(2,\ 1,\ 0)+(7,-1,\ 0)+(1,\ 7,\ 0)=(10,\ 7,\ 0)\end{aligned}$$

(ii) $(\alpha,\ \beta)=(10,\ 5\sqrt{2})$ のとき，△ABE は AB = AE の直角二等辺三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させたものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=(2,\ 1,\ 0)+(1,\ 7,\ 0)=(3,\ 8,\ 0)\end{aligned}$$



点 E の x 座標は y 座標より大きいから，(i)，(ii) より　**E(10, 7, 0)**

(3) 点 A，B，D，および (2) で求めた点 E を通る球面の方程式は，$(*)$ に注意して

$$x^2+y^2+z^2-12x-8y+dz+27=0$$

とおける．これが点 $\mathrm{E}(5,\ 8,\ 2\sqrt{2})$ を通るから

$$5^2+8^2+(2\sqrt{2})^2-12\cdot5-8\cdot8+2\sqrt{2}d+27=0\quad ゆえに\quad d=0$$

すなわち，球面の方程式は　$(x-6)^2+(y-4)^2+z^2=5^2$

点 P が (6, 4, 5) のとき，四面体 ABPE の体積は最大値 V をとる．よって，条件を満たすとき，点 P は球面および平面 $z=3$ の交線上にあるから

$$\boldsymbol{(x-6)^2+(y-4)^2=4^2,\quad z=3}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x=2$ より $\quad a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=2$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}-a_n=a_2-a_1=1$$

$n \geqq 1$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}$

$$a_n-a_0=n \quad \text{ゆえに} \quad a_n=n+1$$

$n=0$ のときも上式は成立するから $\quad \boldsymbol{a_n=n+1}$

(2) $x=-2$ より $\quad a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-2$

$$(-1)^{n+2}a_{n+2}-(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n$$

これから $\quad (-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=(-1)^1a_1-a_0=1$

$n \geqq 1$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1}-(-1)^k a_k\}=\sum_{k=0}^{n-1}$

$$(-1)^n a_n-a_0=n \quad \text{ゆえに} \quad (-1)^n a_n=n+1$$

上の第 2 式は，$n=0$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n=(-1)^n(n+1)}$

(3) $(*)\quad a_n(x)$ が x に関する n 次式であること，および x^n の係数が 1 である．

［1］$n=1$ のとき，$a_1=x$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n \leqq k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1}=xa_k+a_{k-1}$$

上式より，$n \leqq k+1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(4) (1)，(2) の結果から，$x=\pm 2$ は n 次方程式 $a_n(x)=0$ の解ではない．

$a_{n+2}-xa_{n+1}+a_n=0$ より，t に関する特性方程式

$$t^2-xt+1=0$$

$x \neq \pm 2$ のとき，特性方程式の異なる 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha\beta=1,\quad a_1=\alpha+\beta,\quad a_0=\alpha\beta$$

漸化式は　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これから　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

したがって　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n(a_1-\alpha a_0)=\beta^{n+1}$

同様に　$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n(a_1-\beta a_0)=\alpha^{n+1}$

上の 2 式から　$a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

$a_n=0$ とすると，$\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}=0$ であるから，$\alpha\beta=1$ より

$$\alpha^{2(n+1)}=1 \quad \text{これを解くと} \quad \alpha=\cos\frac{k\pi}{n+1}+i\sin\frac{k\pi}{n+1}$$

$\alpha\beta=1$ より　$\beta=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}-i\sin\dfrac{k\pi}{n+1}$

$\alpha\neq\beta$ に注意すると

$$x=\alpha+\beta=2\cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

このとき　$b_k=2\cos\dfrac{n+1-k}{n+1}\pi=-2\cos\dfrac{k\pi}{n+1} \quad (k=1,2,\cdots,n)$

同様に　$c_k=-2\cos\dfrac{k\pi}{n+2} \quad (k=1,2,\cdots,n+1)$

$(k+1)(n+1)-k(n+2)=n-k+1>0$ より　$\dfrac{k+1}{n+2}-\dfrac{k}{n+1}>0$

したがって　$0<\dfrac{k}{n+2}<\dfrac{k}{n+1}<\dfrac{k+1}{n+2}<1$

$$0<\frac{k}{n+2}\pi<\frac{k}{n+1}\pi<\frac{k+1}{n+2}\pi<\pi$$

ゆえに　$\cos\dfrac{k}{n+2}\pi>\cos\dfrac{k}{n+1}\pi>\cos\dfrac{k+1}{n+2}\pi$

$$-2\cos\frac{k}{n+2}\pi<-2\cos\frac{k}{n+1}\pi<-2\cos\frac{k+1}{n+2}\pi$$

$c_k<b_k<c_{k+1}$ であるから $(k=1,2,\cdots,n)$

$$c_1<b_1<c_2<b_2<\cdots<c_n<b_n<c_{n+1}$$

別解 $a_n(x)=0$ の解を値が小さい順に $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ と記述し，$a_{n+1}(x)=0$ の解を値が小さい順に $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n+1}$ と記述するとき，

$$-2<c_1<b_1<c_2<b_2<\cdots<c_n<b_n<c_{n+1}<2 \qquad \text{(A)}$$

とする．

［1］$n=1$ のとき，漸化式から

$$a_1(x)=x, \quad a_2(x)=xa_1(x)-a_0(x)=x\cdot x-1=x^2-1$$

このとき　$b_1=0,\ c_1=-1,\ c_2=1$　ゆえに　$c_1<b_1<c_2$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n \leqq k$ のとき，(A) が成立すると仮定する．このとき，(3) の結論に注意すると

$$a_k(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-b_j), \quad a_{k+1}=\prod_{j=1}^{k+1}(x-c_j)$$

とおける．これを漸化式に適用すると

$$a_{k+2}(x)=x\prod_{j=1}^{k+1}(x-c_j)-\prod_{j=1}^{k}(x-b_j)$$

上式に $x=c_i,\ c_{i+1}$ を代入すると $(i=1,2,\cdots,k)$

$$a_{k+2}(c_i)=-\prod_{j=1}^{k}(c_i-b_j)=-(-1)^{k-i+1}\prod_{j=1}^{k}|c_i-b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{i+1})=-\prod_{j=1}^{k}(c_{i+1}-b_j)=-(-1)^{k-i}\prod_{j=1}^{k}|c_{i+1}-b_j|$$

したがって　$a_{k+2}(c_i)a_{k+2}(c_{i+1})<0$

また，(1)，(2) の結果から

$$a_{k+2}(2)=k+3, \quad a_{k+2}(-2)=(-1)^{k+2}(k+3)$$

同様に，$a_{k+2}(c_1),\ a_{k+2}(c_{k+1})$ を求めると

$$a_{k+2}(c_1)=(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^{k}|c_1-b_j|$$

$$a_{k+2}(c_{k+1})=-\prod_{j=1}^{k}|c_{k+1}-b_j|$$

したがって　$a_{k+2}(-2)a_{k+2}(c_1) < 0,\quad a_{k+2}(c_{k+1})a_{k+2}(2) < 0$
$a_{k+2}(x)$ は $k+2$ 次式であるから，$k+2$ 個の開区間

$$(-2,\ c_1),\ (c_1,\ c_2),\ (c_2,\ c_3),\ \cdots(c_k,\ c_{k+1}),\ (c_{k+1},\ 2)$$

のそれぞれに $a_{k+2}(x)=0$ となる x が 1 個ずつ存在する．これらの解を小さい順に $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{k+2}$ とおくと

$$-2 < d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < \cdots < d_{n+1} < c_{n+1} < d_{n+2} < 2$$

よって，$n=k+2$ のとき，(A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について題意は成立する．

3 (1) z_n が $1, -1,\ i, -i$ になる確率をそれぞれ $P_n,\ Q_n,\ R_n,\ S_n$ とおくと，次の確率漸化式が成立する $(n = 0, 1, \cdots)$.

$$\begin{aligned}
P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ R_0 = 0,\ S_0 = 0 \\
P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots ① \\
Q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{6}S_n \quad \cdots ② \\
R_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{2}R_n + \frac{1}{6}S_n \\
S_{n+1} = \frac{1}{6}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n + \frac{1}{2}S_n
\end{aligned}$$

$P_n + Q_n + R_n + S_n = 1$ より，$R_n + S_n = 1 - P_n - Q_n$ を ①，② に代入して整理すると

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 0, \quad P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{6}, \quad Q_{n+1} = \frac{1}{3}Q_n + \frac{1}{6}$$

したがって

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{4}\right), \quad Q_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(Q_n - \frac{1}{4}\right)$$

$\left\{P_n - \frac{1}{4}\right\}$，$\left\{Q_n - \frac{1}{4}\right\}$ は，ともに公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}
P_n - \frac{1}{4} &= \left(P_0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
Q_n - \frac{1}{4} &= \left(Q_0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

よって　$P_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}, \quad Q_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} \quad \cdots (*)$

したがって　$\boldsymbol{P_1 = \frac{1}{2},\ Q_1 = \frac{1}{6},\ P_2 = \frac{1}{3},\ Q_2 = \frac{2}{9}}$

(2) $(*)$ より

$$P_n + 3Q_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} + 3 \times \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 1$$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=(1-x^2)^2$ とおくと　$f'(x)=4x(x^2-1)$　$\cdots$①

$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(k,\ f(k))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f(k)+f'(k)(x-k) \\ &= (1-k^2)^2+4k(k^2-1)(x-k) \\ &= (k^2-1)^3(4kx-3k^2-1) \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\ell : y=(k^2-1)(4kx-3k^2-1)}$

(2) ① を順次微分すると

$$f^{(2)}(x)=12x^2-4,\quad f^{(3)}(x)=24x,\quad f^{(4)}(x)=24$$

4 次関数 $f(x)$ を $x=k$ を極として展開すると

$$\begin{aligned} f(x)=f(k)+f'(k)(x-k)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x-k)^2 \\ +\frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x-k)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x-k)^4 \end{aligned}$$

C と ℓ の方程式に注意して

$$\begin{aligned} f(x)&-\{f(k)+f'(k)(x-k)\} \\ &= \frac{1}{2!}f^{(2)}(k)(x-k)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(k)(x-k)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(k)(x-k)^4 \\ &= \frac{1}{2}(12k^2-4)(x-k)^2+\frac{1}{6}\cdot 24k(x-k)^3+\frac{1}{24}\cdot 24(x-k)^4 \\ &= (x-k)^2\{(6k^2-2)+4k(x-k)+(x-k)^2\} \\ &= (x-k)^2\{(x-k)^2+4k(x-k)+6k^2-2\} \end{aligned}$$

C と ℓ の共有点が 2 個であるとき，2 次方程式

$$(x-k)^2+4k(x-k)+6k^2-2=0 \qquad (*)$$

が「k 以外の重解をもつ」または「k と k 以外の解をもつ」場合がある．

(i) $(*)$ が重解をもつとき，係数について

$$D/4 = (2k)^2 - (6k^2 - 2) = -2k^2 + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \pm 1$$

$k > 0, k \neq 1$ であるから，これを満たす k は存在しない．

(ii) $(*)$ が k を解にもつとき，$6k^2 - 2 = 0 \cdots$ ②

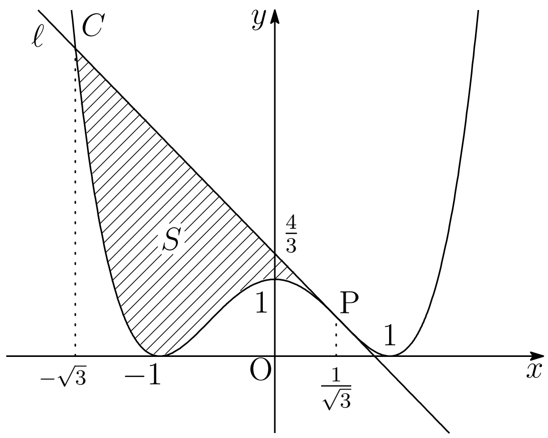
$$\begin{aligned} f(x) - \{f(k) + f'(k)(x-k)\} &= (x-k)^2\{(x-k)^2 + 4k(x-k)\} \\ &= (x-k)^3(x+3k) \qquad (**) \end{aligned}$$

② および $k > 0$ より，$k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) C と ℓ の位置関係に注意すると，$(**)$ より，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-3k}^{k} (x-k)^3(x+3k)\,dx = \int_{-3k}^{k} (x+3k)(k-x)^3\,dx \\ &= \frac{1!3!}{(1+3+1)!}\{k-(-3k)\}^{1+3+1} = \frac{3!}{5!}(4k)^5 \\ &= \frac{256}{5}k^5 = \frac{256}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{256}{45\sqrt{3}}} \end{aligned}$$



補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\beta=1+i$ とおくと，$\left|\dfrac{z-\beta}{z+\beta}\right| \leqq 1$ より

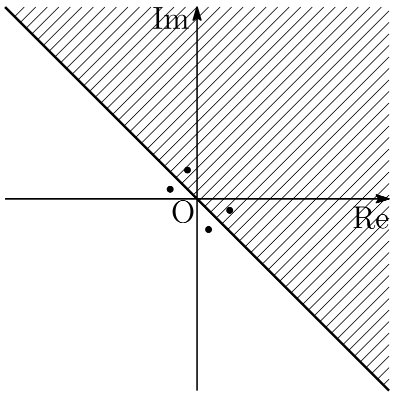
$$|z-\beta|^2 \leqq |z+\beta|^2 \quad \text{整理すると} \quad \overline{\beta}z+\beta\overline{z} \geqq 0$$

したがって　　$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{\beta}\right)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{z}{\beta}+\overline{\left(\dfrac{z}{\beta}\right)}\right\} \geqq 0$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \arg\dfrac{z}{\beta} \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\arg\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\arg\beta-\frac{\pi}{2} \leqq z \leqq \arg\beta+\frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad -\frac{\pi}{4} \leqq z \leqq \frac{3}{4}\pi$$

よって，領域 E は図の斜線部分で境界線を含む.



別解 $\overline{\beta}z+\beta\overline{z} \geqq 0$ に $z=x+yi$，$\beta=1+i$ を代入すると

$$(1-i)(x+yi)+(1+i)(x-yi) \geqq 1 \quad \text{整理すると} \quad x+y \geqq 0$$

(2) $\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)}$

(3) 領域 $D_0,\ E,\ D_n$ をそれぞれ $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた領域を $\tilde{D}_0,\ \tilde{E},\ \tilde{D}_n$ とする．

$\tilde{D}_n$ の中心を a_n，半径を r_n とすると $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned}
a_n &= (\sqrt{2}+\sqrt{6})\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha^n \\
&= (1+\sqrt{3})(1-i)\cdot 2^{-\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right) \\
r_n &= 2|\alpha|^n = 2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^n = 2\cdot 2^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

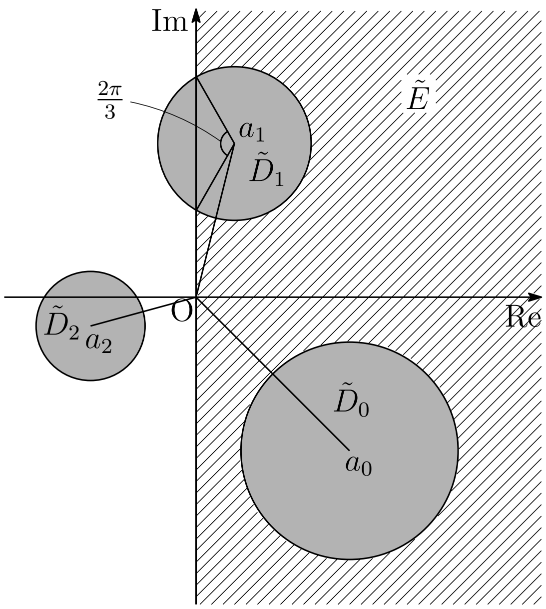
したがって

$$a_1 = (1+\sqrt{3})(1-i)\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left\{1 + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}i\right\}2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{Re}(a_1) = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad r_1 = 2\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

s_1 は $\tilde{D}_1$ と $\tilde{E}$ の共通領域の面積に等しいから

$$s_1 = \frac{1}{2}r_1^2\left(\frac{4}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(4) a_n と r_n について

$$\frac{a_n}{r_n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1-i)\left(\cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)$$

(i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) > 1$$

したがって，$\tilde{D}_n$ は $\tilde{E}$ に含まれる．s_n は D_n の面積に等しい．s_0 と s_n の相似比は $1 : 2^{-\frac{n}{2}}$ であるから

$$s_0 = 4\pi, \quad s_n = s_0\left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2 = s_0{\cdot}2^{-n}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，(3) の結果に注意して

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) = \frac{1}{2}$$

s_1 と s_n の相似比は $1 : 2^{\frac{1}{2}(1-n)}$ であるから

$$s_n = s_1{\cdot}2^{1-n}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{r_n} &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1-i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{r_n}\right) = -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} = -\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < -1$$

このとき，$\tilde{E}$ は $\tilde{D}_n$ を含まない．

(i)〜(iii) より，s_n は $\tilde{D}_n$ と $\tilde{E}$ の共通領域の面積に等しいから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} s_n &= (s_0+s_1) \times \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}\\ &= \left(4\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{8}{7}\\ &= \boldsymbol{\frac{128\pi + 12\sqrt{3}}{21}}\end{aligned}$$