令和５年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \geqq 0$ で定義される 2 つの曲線 $y = x^a$ と $y = e^{bx}$ が点 P において接している．a, b は正の実数とし，$a \leqq e$ である．e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を a のみを用いて表せ．また，点 P が取り得る範囲を xy 平面に図示せよ．

(2) $y = e^{bx}$ が $y = \sqrt{2x}$ と点 Q において接している．このとき，a の値と点 Q の座標を求めよ．

(3) a が (2) で求めた値のとき，$y = x^a$ と $y = e^{bx}$ と $y = \sqrt{2x}$ に囲まれた領域の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ が発散することを示せ．

(2) 任意の自然数 N に対して，次の等式が成り立つことを示せ．ただし，x を実数とする．

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1}x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}$$

(3) 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 個のさいころを 3 回投げるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 出る目すべての和が 5 になる確率を求めよ．

(2) 出る目の最小値が 4 になる確率を求めよ．

(3) 出る目すべての積が 6 の倍数になる確率を求めよ．

(4) 出る目を順に a, b, c とする．x についての 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が重解を持つ確率を求めよ．

4 座標平面上の点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(c,\ d)$ を頂点とする三角形 ABC を考える．ただし $a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数とし，三角形 ABC は ∠ACB が直角で $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面の原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする．このとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 三角形 ABC の内接円の中心の座標を $a,\ b$ を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC の内接円の中心と三角形 ABO の内接円の中心との距離 s を $a,\ b$ を用いて表せ．また，正の定数 ℓ に対して，常に $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \ell$ となるように点 A，B をそれぞれ動かしたとき，s を最小にする a を ℓ を用いて表せ．

5 n を 3 以上の自然数，i を虚数単位として，複素数 z_k は以下の式を満たすとする．

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

また，n 以下の自然数 ℓ に対して，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_\ell(a_\ell)$ があり，複素数 a_ℓ は次の式を満たすとする．

$$a_\ell = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{\ell-1}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $a_\ell = \dfrac{z_\ell - 1}{z_1 - 1}$ となることを示せ．

(2) $\ell \geqq 3$ のとき，三角形 $\mathrm{P}_\ell\mathrm{P}_{\ell-1}\mathrm{P}_{\ell-2}$ の面積を求めよ．

(3) $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots, \mathrm{P}_n$ を頂点とする n 角形に外接する円の方程式と n 角形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x \geqq 0$ とし，$f(x) = x^a,\ g(x) = e^{bx}$ とおくと $(0 < a \leqq e,\ b > 0)$

$$f'(x) = ax^{a-1}, \quad g'(x) = be^{bx}$$

2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の接点 P の x 座標を p とすると

$$f(p) = g(p), \quad f'(p) = g'(p)$$

したがって　$p^a = e^{bp} \quad \cdots ①,\qquad ap^{p-1} = be^{bp} \quad \cdots ②$

①, ② から e^{bp} を消去すると

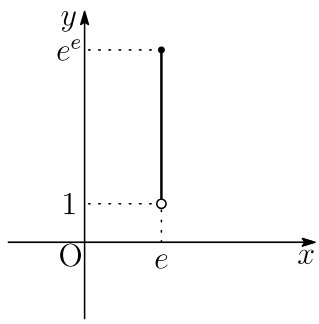
$$ap^{p-1} = bp^a \quad \text{ゆえに} \quad a = bp \quad \cdots ③$$

①, ③ から bp を消去すると

$$p^a = e^a \quad \text{ゆえに} \quad p = e$$

よって，点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ の座標は　$\boldsymbol{(e,\ e^a)}$

$0 < a \leqq e$ より，点 P が取り得る範囲は，右の図の線分で，点 $(e,\ 1)$ を含まず，点 $(e,\ e^e)$ を含む.



(2) $h(x) = \sqrt{2x}$ とすると　$h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

2 曲線 $y = g(x)$ と $y = h(x)$ の接点 Q の x 座標を q とすると

$$g(q) = h(q) \quad g'(q) = h'(q)$$

したがって　$e^{bq} = \sqrt{2q} \quad \cdots ④,\qquad be^{bq} = \dfrac{1}{\sqrt{2q}} \quad \cdots ⑤$

④, ⑤ から e^{bq} を消去すると

$$b\sqrt{2q} = \frac{1}{\sqrt{2q}} \quad \text{ゆえに} \quad bq = \frac{1}{2} \quad \cdots ⑥$$

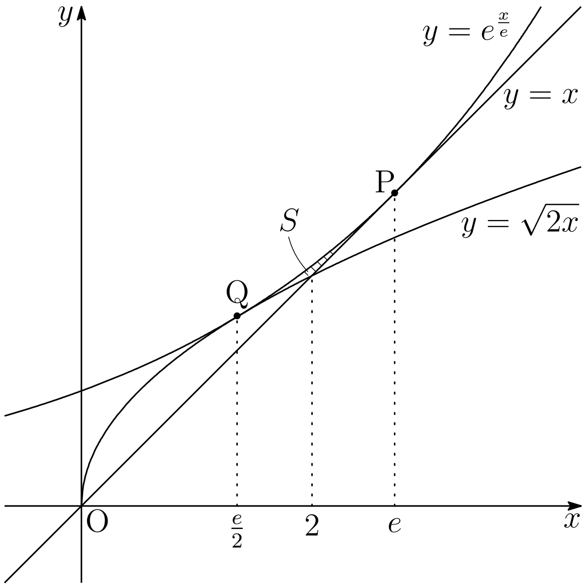
④, ⑥ を解くと　$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2q}$　すなわち　$q = \dfrac{e}{2},\ b = \dfrac{1}{e}$

よって，点 $\mathrm{Q}(q,\ h(q))$ の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{e}{2},\ \sqrt{e}\right)}$

$b = \dfrac{1}{e}$ および $p = e$ を ③ に代入すると　$\boldsymbol{a = 1}$

(3) 求める面積は，下の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{e}{2}}^{e} e^{\frac{x}{e}}\,dx - \int_{\frac{e}{2}}^{2} \sqrt{2x}\,dx - \int_{2}^{e} x\,dx \\
&= e\Big[\, e^{\frac{x}{e}} \,\Big]_{\frac{e}{2}}^{e} - \frac{1}{3}\Big[\, 2x\sqrt{2x} \,\Big]_{\frac{e}{2}}^{2} - \frac{1}{2}\Big[\, x^2 \,\Big]_{2}^{e} \\
&= e(e-\sqrt{e}\,) - \frac{1}{3}(8-e\sqrt{e}\,) - \frac{1}{2}(e^2-4) \\
&= \boldsymbol{\frac{e^2}{2} - \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$



2 (1) n が自然数のとき，$2 \times \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{n}$ であるから

$$
\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{aligned}
$$

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots$ は，正の無限大に発散するから，上式より

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty
$$

(2) 初項1，公比 r $(r \neq 1)$，末項 l の等比数列の和は　$1+r+r^2+\cdots+l = \dfrac{1-rl}{1-r}$

したがって　$\dfrac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + l + \dfrac{rl}{1-r}$

これに $r = -x^2$, $l = (-x^2)^{N-1}$ を代入すると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1}x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}$$

証終

(3) $S_N(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1}x^{2N-2}$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{1}{1+x^2} - S_N(x) = \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2}$$

これから　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 S_N(x)\,dx = (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{2N}}{1+x^2}\,dx$

このとき　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_N(x)\,dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}x^{2n-2}\,dx \\ &= \left[\ \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\ \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| &= \int_0^1 \frac{x^{2N}}{1+x^2}\,dx \\ &\leqq \int_0^1 x^{2N}\,dx = \frac{1}{2N+1}\left[\ \frac{x^{2N+1}}{2N+1}\ \right]_0^1 = \frac{1}{2N+1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} = 0$ であるから

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right\} = 0 \quad \text{よって} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 出た目の和が 5 になる出方は　$\{1,\ 1,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 2\}$

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{2!1!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \times 2 = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) 出る目がすべて 4 以上の確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \dfrac{27}{216}$

出る目がすべて 5 以上の確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{216}$

よって，求める確率は　$\dfrac{27}{216} - \dfrac{8}{216} = \mathbf{\dfrac{19}{216}}$

(3) 出る目すべての積が 2 の倍数，3 の倍数となる事象をそれぞれ $A,\ B$ とすると，$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5\},\ \overline{B} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\},\ \overline{A} \cap \overline{B} = \{1,\ 5\}$ より

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8},\quad P(\overline{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27},$$
$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

したがって

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27},$$
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{7}{8} + \frac{19}{27} - \frac{26}{27} = \mathbf{\frac{133}{216}} \end{aligned}$$

(4) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が重解を持つから，係数について

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2\sqrt{ac}$$

b は偶数であるから，条件を満たすのは次の 5 通り．

- $b = 2$ のとき $ac = 1$　$(a,\ c) = (1,\ 1)$
- $b = 4$ のとき $ac = 4$　$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
- $b = 6$ のとき $ac = 9$　$(a,\ c) = (3,\ 3)$

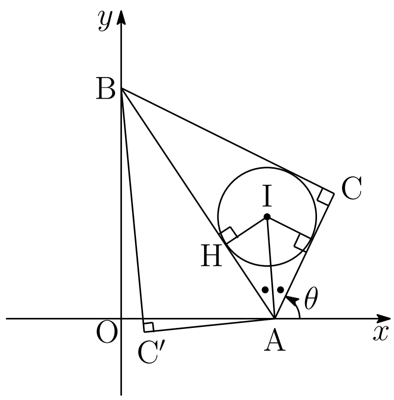
よって，求める確率は　$5 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\dfrac{5}{216}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0)$ のなす角を ϕ とすると

$$\cos\phi=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\angle\mathrm{ACB}$ が直角で，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より

$$\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$



2 点 O，C は AB を直径の両端とする円周上にあり，C が AB に関して O と同じ側にあるとき，C の x 座標と y 座標がともに正になることはないので，C は AB に関して O と反対側にある．したがって

$$\cos\theta=\cos\left(\phi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\phi\cos\frac{\pi}{3}+\sin\phi\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{-a+\sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2+b^2}}},$$
$$\sin\theta=\sin\left(\phi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\phi\cos\frac{\pi}{3}-\cos\phi\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{b+\sqrt{3}a}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

(2) $\ell=\mathrm{AB}$，$A=\angle\mathrm{BAC}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を I とし，I から直線 AB に垂線 IH を引き，$r=\mathrm{IH}$ とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積により

$$\frac{1}{2}(\ell\sin A+\ell\cos A+\ell)r=\frac{1}{2}\ell\sin A\cdot\ell\cos A$$

r について解くと

$$\mathrm{IH}=r=\frac{\ell\sin A\cos A}{\sin A+\cos A+1}=\frac{\ell\{(\sin A+\cos A)^2-1\}}{2(\sin A+\cos A+1)}$$
$$=\frac{\ell}{2}(\sin A+\cos A-1)\qquad(\#)$$

$\mathrm{AI}\sin\dfrac{A}{2}=r$ より

$$\mathrm{AI}=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\ell(\sin A+\cos A-1)}{2\sin\frac{A}{2}}=\ell\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\qquad(*)$$
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AI}\cos\frac{A}{2}=\frac{\ell}{2}(\cos A-\sin A+1)\qquad(**)$$

$\ell = \sqrt{a^2+b^2}$，$A = \dfrac{\pi}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{AI} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{a^2+b^2}$$

AI の偏角は $\phi - \dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\begin{aligned}
\cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\phi\cos\frac{\pi}{6} + \sin\phi\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}, \\
\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\phi\cos\frac{\pi}{6} - \cos\phi\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}b+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

したがって

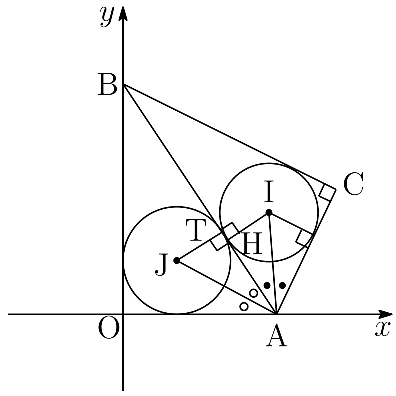
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}} = (a,\ 0) + \mathrm{AI}\left(\cos\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right),\ \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= (a,\ 0) + \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\left(-\sqrt{3}a+b,\ \sqrt{3}b+a\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}a + \frac{\sqrt{3}-1}{4}b,\ \frac{\sqrt{3}-1}{4}a + \frac{3-\sqrt{3}}{4}b\right)
\end{aligned}$$

よって，三角形 ABC の内接円の中心の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}a + \frac{\sqrt{3}-1}{4}b,\ \frac{\sqrt{3}-1}{4}a + \frac{3-\sqrt{3}}{4}b\right)}$$

(3) $\varphi=\angle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OAB}$ の内心を J とし，J から直線 AB に垂線 JT を引くと，(#)，(**) と同様に

$$\mathrm{JT}=\frac{\ell}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi-1),\quad \mathrm{AT}=\frac{\ell}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi+1)$$



したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{IJ}^2&=(\mathrm{JT}+\mathrm{IH})^2+(\mathrm{AT}-\mathrm{AH})^2\\
&=\frac{\ell^2}{4}(\sin\varphi+\cos\varphi+\sin A+\cos A-2)^2\\
&\qquad\qquad+\frac{\ell^2}{4}(\cos\varphi-\sin\varphi-\cos A+\sin A)^2\\
&=\frac{\ell^2}{4}\left\{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right\}^2+\frac{\ell^2}{4}\left\{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}^2\\
&=\frac{\ell^2}{4}\left\{-(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+(\sqrt{3}-1)\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+5-2\sqrt{3}\right\}\\
&=\frac{\ell^2}{4}\left\{5-2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{12}\right)\right\}
\end{aligned}$$

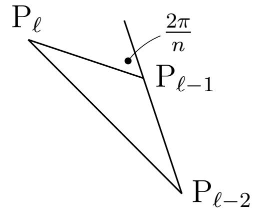
$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{12}<\varphi+\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{7}{12}\pi$ であるから，
$\varphi+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\varphi=\dfrac{5}{12}\pi$ のとき，s は最小となる．このとき

$$a=\ell\cos\varphi=\ell\cos\frac{5}{12}\pi=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ell}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおくと，$z_k=w^k$ より

$$\begin{aligned}a_\ell &= z_0+z_1+z_2+\cdots+z_{\ell-1}\\ &= 1+w+w^2+\cdots+w^{\ell-1}\\ &= \frac{w^\ell-1}{w-1}=\frac{z_\ell-1}{z_1-1}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}_\ell(a_\ell)$，$\mathrm{P}_{\ell-1}(a_{\ell-1})$，$\mathrm{P}_{\ell-2}(a_{\ell-2})$ について



$$a_{\ell-1}-a_{\ell-2}=z_{\ell-2},\quad a_\ell-a_{\ell-1}=z_{\ell-1}$$
$$|z_{\ell-2}|=|z_{\ell-1}|=1,\quad \arg\frac{z_{\ell-1}}{z_{\ell-2}}=\frac{\pi}{2n} \qquad (\#)$$

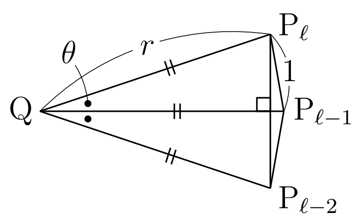
三角形 $\mathrm{P}_\ell\mathrm{P}_{\ell-1}\mathrm{P}_{\ell-2}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$$

(3) $a_1=1$，$a_n=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\dfrac{w^n-1}{w-1}=0$ より　$|a_1-a_n|=1$

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ とし，3 点 $\mathrm{P}_\ell,\mathrm{P}_{\ell-1},\mathrm{P}_{\ell-2}$ を通る円の中心を Q，半径を r とする．

$\triangle\mathrm{QP}_{\ell-1}\mathrm{P}_\ell$ に余弦定理を適用すると



$$1^2=r^2+r^2-2r^2\cos\theta$$

ゆえに　$r^2=\dfrac{1}{2(1-\cos\theta)}=\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

すなわち　$r=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$　$\cdots$①

次に，$\mathrm{P}_{\ell-2}\mathrm{P}_\ell$ の偏角を求める．

$$\begin{aligned}\arg(a_\ell-a_{\ell-2})&=\arg(w^{\ell-1}+w^{\ell-2})=\arg\left\{w^{\ell-\frac{3}{2}}(w^{\frac{1}{2}}+w^{-\frac{1}{2}})\right\}\\ &=\arg w^{\ell-\frac{3}{2}}+\arg(w^{\frac{1}{2}}+w^{-\frac{1}{2}})\\ &=\left(\ell-\frac{3}{2}\right)\theta+0=\left(\ell-\frac{3}{2}\right)\theta\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_{\ell-1}\mathrm{Q}$ の向きは $\mathrm{P}_{\ell-2}\mathrm{P}_\ell$ の向きを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもので，$\mathrm{Q}(q)$ とすると

$$q=a_{\ell-1}+riw^{\ell-\frac{3}{2}} \qquad (*)$$

ここで　$$\frac{1}{w-1}=\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}-w^{-\frac{1}{2}}}=\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}=-\frac{iw^{-\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$a_{\ell-1}=\frac{w^{\ell-1}-1}{w-1}=-\frac{iw^{-\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}(w^{\ell-1}-1)=-\frac{iw^{\ell-\frac{3}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{iw^{-\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

上式および ① を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} q &= -\frac{iw^{\ell-\frac{3}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{iw^{-\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot iw^{\ell-\frac{3}{2}}=\frac{iw^{-\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{i(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{\tan\frac{\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

以上の結果から，すべての ℓ $(\ell=1,2,\cdots,n)$ について，点 P_ℓ は，次の円周上にある．

$$\boldsymbol{\left|z-\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}}$$

次に $\triangle \mathrm{QP}_{\ell-1}\mathrm{P}_\ell$ の面積は

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\sin\theta=\frac{1}{4\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4\tan\frac{\pi}{n}}$$

よって，求める n 角形の面積は

$$n\times\frac{1}{4\tan\frac{\pi}{n}}=\boldsymbol{\frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n}}}$$

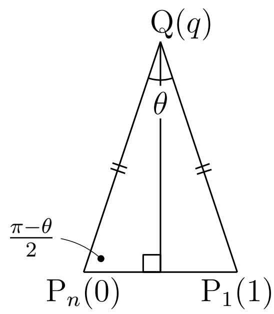
別解 $a_1=1$，$a_n=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\dfrac{w^n-1}{w-1}=0$ より

$\mathrm{P}_n(a_n)$，$\mathrm{P}_1(a_1)$ について，$a_n=0$，$a_1=1$ であるから

$$|a_1-a_n|=1,\quad \arg\frac{a_2-a_1}{a_1-a_n}=\arg\frac{\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}}{1}=\frac{2\pi}{n}$$

これと (#) から，n 角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_n$ は正 n 角形である．
これらの頂点を通る円の中心を $\mathrm{Q}(q)$，$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ とすると

$$q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\tan\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\tan\frac{\theta}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{i}{2\tan\frac{\pi}{n}}}$$



正 n 角形の外接円の半径を r とすると

$$r=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi-\theta}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{\left|z-\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}}$$

次に $\triangle\mathrm{QP}_{\ell-1}\mathrm{P}_\ell$ の面積は

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\sin\theta=\frac{1}{4\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4\tan\frac{\pi}{n}}$$

よって，求める n 角形の面積は

$$n\times\frac{1}{4\tan\frac{\pi}{n}}=\boldsymbol{\frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n}}}$$