令和４年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 座標平面において，原点を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．実数 t が $0<t<\pi$ の範囲で動くとき，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(2\cos t,\ 2\sin t)$，$\mathrm{Q}(2\cos(2t),\ 2\sin(2t))$，および C_2 上の点 $\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{3}+\cos t,\ \sin t\right)$ を考える．また，三角形 PQR の面積を $f(t)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t}$ を求めよ．

(3) 関数 $f(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{2}$ 三角形 ABC の辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ $1,\ 2,\ \sqrt{3}$ とする．点 P，Q，R がそれぞれ辺 AB，BC，CA 上を，$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\mathrm{RP}$ を満たしながら動くとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{APR}$ を θ とおく．ただし，点 P が点 A に一致するときは $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，点 R が点 A に一致するときは $\theta=0$ と定める．線分 PQ の長さを θ を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x}-\tan x=\dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ．

(2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ の値を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束，発散について調べ，収束する場合はその和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の整数 $1,\ 2,\ 3,\cdots$ を自然数と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) 次の不等式を満たす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$$0 < \left| \frac{1}{2} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^2}$$

(2) 次の不等式を満たす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{x^2}{y^2} \right| < \frac{2}{y^3}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3 つの部屋がある建物 A と，4 つの部屋がある建物 B があり，建物 A の各部屋には番号 1, 2, 3 が，建物 B の各部屋には番号 1, 2, 3, 4 がそれぞれ付いている．また，互いに区別できない荷物が 7 個用意されており，それぞれの荷物を建物 A または建物 B のいずれかの部屋に格納する．ただし，1 つの部屋に 7 個すべての荷物を格納する配置や，建物 A にまったく荷物が格納されない配置，建物 B にまったく荷物が格納されない配置もある．以下の問いに答えよ．

(1) 荷物の配置は何通りあるか．

(2) 建物 A の番号 2 の部屋に荷物が 3 個だけ格納される配置は何通りあるか．

(3) 建物 A に格納される荷物の総数よりも，建物 B に格納される荷物の総数が多い配置は何通りあるか．

(4) 建物 B の中に荷物がまったく格納されない配置が 1 つ以上ある配置は何通りあるか．

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $\mathrm{P}(2\cos t,\ 2\sin t)$，$\mathrm{Q}(2\cos 2t,\ 2\sin 2t)$，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{3}+\cos t,\ \sin t\right)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (2\cos 2t - 2\cos t,\ 2\sin 2t - 2\sin t),\\ \overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \left(-\frac{1}{3} - \cos t, -\sin t\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2}\left|(2\cos 2t - 2\cos t)(-\sin t) - (2\sin 2t - 2\sin t)\left(-\frac{1}{3} - \cos t\right)\right|\\ &= \left|\sin 2t\cos t - \cos 2t\sin t + \frac{1}{3}(\sin 2t - \sin t)\right|\\ &= \left|\sin(2t - t) + \frac{1}{3}(\sin 2t - \sin t)\right| = \frac{1}{3}|\sin 2t + 2\sin t|\end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ において

$$\sin 2t + 2\sin t = 2\sin t\cos t + 2\sin t = 2\sin t(\cos t + 1) \geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{3}(\sin 2t + 2\sin t)}$

(2) (1) の結果から

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{2}{3}\left(\frac{\sin 2t}{2t} + \frac{\sin t}{t}\right) = \frac{2}{3}(1+1) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(3) $f(t)$ を微分すると

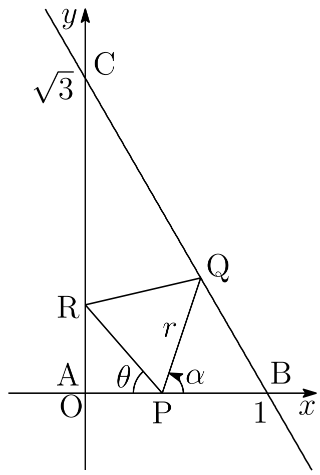
$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{2}{3}(\cos 2t + \cos t) = \frac{2}{3}(2\cos^2 t - 1 + \cos t)\\ &= \frac{2}{3}(\cos t + 1)(2\cos t - 1)\end{aligned}$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $r=\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\mathrm{RP}$ とし，3 点 A，B，C をそれぞれ座標平面上の点として



$$\mathrm{A}(0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ \sqrt{3})$$

とする．直線 PQ の偏角を α とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$

$\theta=\angle\mathrm{APR}$，$\mathrm{OP}=\mathrm{PR}\cos\theta=r\cos\theta$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r(\cos\theta,\ 0)$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=r(\cos\theta,\ 0)+r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\\&=(r(\cos\theta+\cos\alpha),\ r\sin\alpha)\end{aligned}$$

点 Q は直線 $x+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1$ 上の点であるから

$$r(\cos\theta+\cos\alpha)+\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{3}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{r}=\cos\theta+\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha$$

$\alpha=\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}&=\cos\theta+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\\&=\cos\theta+\cos\frac{2\pi}{3}\cos\theta+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{3}\sin\theta\right)\\&=\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\&=\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta)\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{r=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta}}$

(2) $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ とおくと $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad r=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cos(\theta-\varphi)}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\varphi$ のとき，PQ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 正接の 2 倍角の公式により

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{\tan 2x} = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x}$$

よって $$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$$

(2) $x = \dfrac{\pi}{8}$ を (1) の結果に代入し，$t = \tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ とおくと $(t > 0)$

$$\frac{1}{t} - t = \frac{2}{1} \quad \text{ゆえに} \quad t^2 + 2t - 1 = 0$$

$t > 0$ に注意して　$t = \sqrt{2} - 1$　よって　$\boldsymbol{\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}$

(3) (1) の結果から　$\tan x = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

上式に $x = \dfrac{\pi}{2^{n+3}}$ を代入すると

$$\tan\frac{\pi}{2^{n+3}} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

これから　$$a_n = \frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+3}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2^k}}{\tan\frac{\pi}{2^{k+3}}} - \frac{\frac{1}{2^{k-1}}}{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+3}}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \boldsymbol{\frac{8}{\pi} - \sqrt{2} - 1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0<\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{y}\right|<\dfrac{1}{y^2}$ より　$0<\left|x-\dfrac{y}{2}\right|<\dfrac{1}{y}$　$\cdots(*)$

(i) $y=1$ のとき，$(*)$ に代入すると

$$0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<1 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},\ \ x\neq\frac{1}{2}$$

これを満たす自然数 x は　$x=1$

(ii) $y=2n$ のとき (n は自然数)，$(*)$ に代入すると

$$0<|x-n|<\frac{1}{2n} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2n}<x-n<\frac{1}{2n},\ \ x-n\neq 0$$

これを満たす自然数 x は存在しない.

(iii) $y=2n+1$ のとき (n は自然数)，$(*)$ に代入すると

$$0<\left|x-\frac{2n+1}{2}\right|<\frac{1}{2n+1}$$

したがって

$$0<\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}<x-n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}<1,\ \ x\neq\frac{2n+1}{2}$$

これを満たす自然数 x は存在しない.

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1)}$

別解 $0<\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{y}\right|<\dfrac{1}{y^2}$ より　$0<y|y-2x|<2$　$\cdots$①

上式より，$|y-2x|$ は 0 でない自然数であるから

$$0<y<\frac{2}{|y-2x|}\leqq 2 \quad \text{すなわち} \quad y=1$$

$y=1$ を ① に代入すると　$0<|1-2x|<2$

これを解くと　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$

x は自然数であるから　$x=1$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1)}$

(2) $\left|\frac{1}{2}-\frac{x^2}{y^2}\right|<\frac{2}{y^3}$ より　$\left|x^2-\frac{y^2}{2}\right|<\frac{2}{y}$　$\cdots(**)$

(i) $y=1$ のとき，$(**)$ に代入すると

$$\left|x^2-\frac{1}{2}\right|<2 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{3}{2}<x^2<\frac{5}{2}$$

これを満たす自然数 x は　$x=1$

(ii) $y=3$ のとき，$(**)$ に代入すると

$$\left|x^2-\frac{9}{2}\right|<\frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad 3+\frac{5}{6}<x^2<5+\frac{1}{6}$$

これを満たす自然数 x は　$x=2$

(iii) $y=2n$ のとき (n は自然数)，$(**)$ に代入すると

$$\left|x^2-2n^2\right|<\frac{1}{n}$$

したがって

$$x^2-2n^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\sqrt{2}n$$

これを満たす自然数 x は存在しない．

(iv) $y=2n+3$ のとき (n は自然数)，$(**)$ に代入すると

$$\left|x^2-\frac{(2n+3)^2}{2}\right|<\frac{2}{2n+3}$$

したがって

$$0<\frac{1}{2}-\frac{2}{2n+3}<x^2-2n^2-6n-4<\frac{1}{2}+\frac{2}{2n+3}<1$$

x^2-2n^2-6n-4 は整数であり，これを満たす自然数 x は存在しない．

(i)〜(iv) より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)}$

別解

(3) $\left|\frac{1}{2}-\frac{x^2}{y^2}\right|<\frac{2}{y^3}$ より　$y|2x^2-y^2|<4$　$\cdots$②

$2x^2-y^2=0$ とすると　$\frac{y}{x}=\sqrt{2}$

これを満たす自然数 $x,\ y$ は存在しないので　$2x^2-y^2\neq 0$

$$y<\frac{4}{|2x^2-y^2|}\leqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad y=1,\ 2,\ 3$$

(a) $y=1$ を ② に代入すると

$$|2x^2-1|<4 \quad \text{ゆえに} \quad 0<x^2<\frac{5}{2} \quad \text{すなわち} \quad x=1$$

(b) $y=2$ を ② に代入すると

$$2|2x^2-4|<4 \quad \text{ゆえに} \quad 1<x^2<4 \quad \text{すなわち} \quad \text{自然数}\, x\, \text{はなし．}$$

(c) $y=3$ を ② に代入すると

$$3|2x^2-9|<4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{23}{6}<x^2<\frac{31}{6} \quad \text{すなわち} \quad x=2$$

(a)〜(c) より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 7 つの部屋に 7 個の荷物を格納する重複組合せの総数であるから

$${}_7\mathrm{H}_7={}_{7+7-1}\mathrm{C}_7={}_{13}\mathrm{C}_7={}_{13}\mathrm{C}_6=\mathbf{1716}\ \text{(通り)}$$

(2) 建物 A の番号 2 の部屋を除く残りの 6 部屋に残りの荷物 4 個を格納する重複組合せの総数であるから

$${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4=\mathbf{126}\ \text{(通り)}$$

(3) 条件を満たすとき，建物 A，B に格納される荷物の個数の組は

$$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(3,\ 4),\ (2,\ 5),\ (1,\ 6),\ (0,\ 7)$$

よって，求める場合の総数は

$$\begin{aligned}&{}_3\mathrm{H}_3\cdot{}_4\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_2\cdot{}_4\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_1\cdot{}_4\mathrm{H}_6+{}_4\mathrm{H}_7\\ =&{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_7\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_5+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_6+{}_{10}\mathrm{C}_7\\ =&10\times35+6\times56+3\times84+120\\ =&\mathbf{1058}\ \text{(通り)}\end{aligned}$$

(4) 建物 B の部屋に荷物をそれぞれ 1 個ずつ格納した上で，7 部屋に残りの荷物 3 個を格納する重複組合せの総数は

$${}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$$

これと (1) の結果から，求める場合の総数は

$$1716-84=\mathbf{1632}\ \text{(通り)}$$