令和２年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上の曲線 C_1 と C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^n \ (x > 0)$$
$$C_2 : y = \log x \ (x > 0)$$

とする．ただし，n を 2 以上の整数，a を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，$\log x < x$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 曲線 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a の条件を n を使って表せ．

(3) a が (2) で求めた条件を満たすとする．曲線 C_1 と C_2 の異なる 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とする．ただし $p < q$ とする．このとき，

$$p < \frac{q-p}{a(q^n - p^n)} < q$$

が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 自然数 n に対して定まる関数

$$f_n(x) = 1 - \sqrt{5}|\sin(2n\pi x)|$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 x に対して $f_n(x) = f_n\left(x + \dfrac{k}{2n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ が成り立つことを示せ．

(2) 区間 $\left(\dfrac{k-1}{2n},\ \dfrac{k}{2n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ において $f_n(x) = 0$ は相異なる 2 つの解を持つことを示せ．

(3) 区間 $[0,\ 1]$ における方程式 $f_n(x) = 0$ のすべての解の和を S_n とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正の定数 r に対して座標空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(r,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ r,\ 0)$ を定める．また，平面 $y=\dfrac{1}{2}r$ 上の点 C に対して，線分 AC の中点を P とする．ただし，点 C の z 座標は正である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q は線分 OB 上の点とする．定数 a，c に対し，点 C を位置 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}r,\ c\right)$ に固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を最小とする点 Q の座標を求めよ．また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ．

(2) (1) で求めた点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が 90° であることを示せ．

(3) 点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を満たしながら動くとする．(1) で求めた点 Q と 3 点 O，C，P を頂点とする四面体の体積が最大となる点 C の座標と，そのときの四面体 OCPQ の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 直交座標で表された次の 2 つの方程式

$$|x|+|y|=c_1 \tag{A}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=c_2 \tag{B}$$

を定義する．ただし c_1，c_2 は正の定数である．

(1) xy 平面上に式 (A) を満たす $(x,\ y)$ を図示せよ．

(2) 極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて，式 (A)，(B) をそれぞれ極方程式で表せ．

(3) 原点を除く $(x,\ y)$ に対して $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の最大値および最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の規則にしたがって数直線上を移動する点 A を考える．

(規則) 点 A が座標 x にあるとき，表が出る確率が α $(0<\alpha<1)$ のコインを投げて，表が出たら x から $\dfrac{x}{2}$ へ移動し，裏が出たら x から $1-\dfrac{x}{2}$ へ移動する．

点 A がはじめに座標 0 にあるとして，事象「上記の規則を適用する操作を n 回 $(n\geqq 1)$ 繰り返した直後に点 A が座標 y にある」の確率を $P_n(y)$ で表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $P_1(y)>0$ となる y $(0\leqq y\leqq 1)$ とその確率 $P_1(y)$ の組をすべて答えよ．

(2) $y<0$ または $y>1$ のとき，$P_n(y)=0$ であることを示せ．

(3) $P_n(1)$ を求めよ．

(4) k を自然数とするとき，以下のそれぞれの条件で $P_n(2^{-k})$ を求めよ．

① $n\leqq k$ のとき

② $n>k$ のとき

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x - \log x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(x) \geqq 1$ であるから　$x - \log x > 0$　よって　$x > \log x$

(2) $a \leqq 0$ のとき，$x > 0$ において，C_1 と C_2 は 1 点のみを共有．
$a > 0$ とし，$g(x) = ax^n - \log x$ とおくと

$$g'(x) = anx^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{anx^n - 1}{x}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[n]{an}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき

$$g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{an}}\right) = a\left(\frac{1}{\sqrt[n]{an}}\right)^n - \log\frac{1}{\sqrt[n]{an}}$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\log an = \frac{1}{n}(1 + \log an) = \frac{1}{n}\log ane < 0$$

したがっのて　$ane < 1$　よって　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{ne}}$

(3) $h(x) = \log x$ とおくと　$h'(x) = \dfrac{1}{x}$

C_1，C_2 の 2 つの交点 P，Q について

$$h(p) = \log p = ap^n, \quad h(q) = \log q = aq^n$$

平均値の定理により

$$\frac{h(q) - h(p)}{q - p} = h'(c) \quad (p < c < q)$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．このとき，$h'(c) = \dfrac{1}{c}$ であるから

$$\frac{1}{q} < h'(c) < \frac{1}{p}$$

したがって　$\dfrac{1}{q} < \dfrac{aq^n - ap^n}{q - p} < \dfrac{1}{p}$　よって　$p < \dfrac{q - p}{a(q^n - p^n)} < q$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f_n(x) = 1 - \sqrt{5}|\sin(2n\pi x)| \cdots (*)$ より

$$\begin{aligned} f_n\left(x + \frac{k}{2n}\right) &= 1 - \sqrt{5}\left|\sin 2n\pi\left(x + \frac{k}{2n}\right)\right| \\ &= 1 - \sqrt{5}|\sin(2n\pi x + k\pi)| \\ &= 1 - \sqrt{5}|\sin(2n\pi x)| = f_n(x) \end{aligned}$$

(2) $(*)$ より

$$f\left(\frac{k-1}{2n}\right) = f\left(\frac{k}{2n}\right) = 1, \quad f\left(\frac{2k-1}{4n}\right) = 1 - \sqrt{5} < 0$$

このとき $\dfrac{k-1}{2n} \leqq x \leqq \dfrac{2k-1}{4n}$ で $f_n(x)$ は単調減少，

$\dfrac{2k-1}{4n} \leqq x \leqq \dfrac{k}{2n}$ で $f_n(x)$ は単調増加.

よって，区間 $\left(\dfrac{k-1}{2n}, \dfrac{k}{2n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ において，$f_n(x) = 0$ は相異なる 2 つの解をもつ.

(3) 区間 $\left(\dfrac{k-1}{2n}, \dfrac{2k-1}{4n}\right)$ にある解を x_{2k-1}，区間 $\left(\dfrac{2k-1}{4n}, \dfrac{k}{2n}\right)$ にある解を x_{2k} とすると $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$

$$\frac{k-1}{2n} + \frac{2k-1}{4n} < x_{2k-1} + x_{2k} < \frac{2k-1}{4n} + \frac{k}{2n}$$

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{4k-3}{4n} < S_n < \sum_{k=1}^{2n} \frac{4k-1}{4n}$

ここで

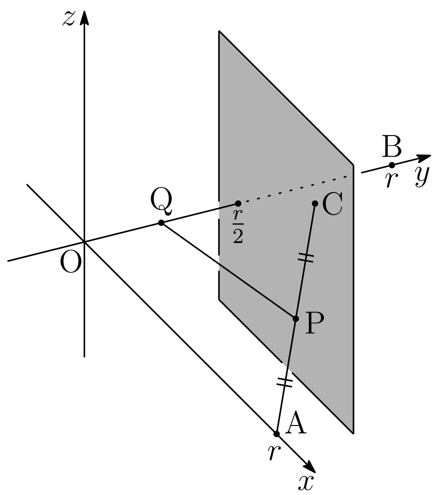
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{4k-3}{4n} &= \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2n\{1 + (8n-3)\} = \frac{4n-1}{2} \\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{4k-1}{4n} &= \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2n\{3 + (8n-1)\} = \frac{4n+1}{2} \end{aligned}$$

上の諸式から $\dfrac{4n-1}{2n} < \dfrac{S_n}{n} < \dfrac{4n+1}{2n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{2n} = 2$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{2}$$

3 (1) 点 P は 2 点 $\mathrm{A}(r,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{1}{2}r,\ c\right)$ の中点であるから



$$\mathrm{P}\left(\frac{r+a}{2},\ \frac{1}{4}r,\ \frac{1}{2}c\right)$$

OB 上の点 Q を $(0,\ q,\ 0)$ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left(\frac{r+a}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}r\right)^2+\frac{1}{4}c^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を最小にするのは，$q=\dfrac{1}{4}r$ のとき

であるから，点 $\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{4}r,\ 0\right)}$ で，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{(r+a)^2+c^2}}$

(2) (1) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(-\dfrac{r+a}{2},\ 0, -\dfrac{c}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(0,\ \dfrac{r}{4},\ 0\right)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0 \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\text{のなす角は}\ 90^\circ$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(r,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(a, -\dfrac{1}{2}r,\ c\right)$ について，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$ であるから

$$r^2=a^2+\frac{1}{4}r^2+c^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2+c^2=\frac{3}{4}r^2 \quad \cdots(*)$$

P，Q からそれぞれ平面 $y=\dfrac{1}{2}r$ に垂線 PP'，QQ' を引くと

$$\mathrm{P}'\left(\frac{r+a}{2},\ \frac{1}{2}r,\ \frac{1}{2}c\right),\quad \mathrm{Q}'\left(0,\ \frac{1}{2}r,\ 0\right),$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}'}=\left(\dfrac{r-a}{2},\ 0, -\dfrac{1}{2}c\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}'}=(-a,\ 0, -c)$ であるから $(c>0)$

$$\triangle\mathrm{CP}'\mathrm{Q}'=\frac{1}{2}\left|\frac{r-a}{2}\cdot(-c)-\left(-\frac{1}{2}c\right)(-a)\right|=\frac{1}{4}rc$$

四面体 OCPQ の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{CP}'\mathrm{Q}'\cdot\mathrm{OQ}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}rc\cdot\frac{1}{4}r=\frac{1}{48}r^2c$$

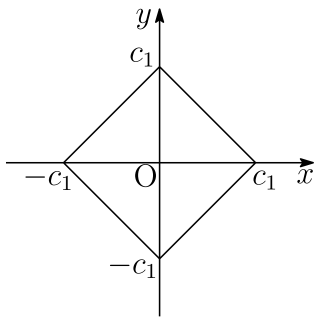
$(*)$ より，V は $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$，$a=0$，すなわち，$\mathrm{C}\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{1}{2}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)}$ のとき，

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{96}r^3}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点 $(x_1,\ y_1)$ が，方程式 $|x|+|y|=c_1 \cdots$ (A) を満たすとき，点 $(\pm x_1, \pm y_1)$ も (A) を満たす (複号任意).
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，(A) は

$$x+y=c_1$$

これは 2 点 $(0,\ c_1)$，$(c_1,\ 0)$ の両端を含む線分であるから，対称性により，(A) の表す図形は，右の図のようになる.



(2) (A) に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると $(r \geqq 0,\ 0 \geqq \theta < 2\pi)$

$$r|\cos\theta|+r|\sin\theta|=c_1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=\frac{c_1}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}}$$

(B) に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=c_2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=c_2}$$

(3) $(x,\ y) \neq 0$ に対して，$f(x,\ y)=\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおくと

$$f(x,\ y)=f(\pm x, \pm y) \quad (\text{複号任意})$$

であるから，$f(x,\ y)$ の最大値・最小値は $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ について，調べればよい．したがって，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと $\left(r>0,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(x,\ y)=\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r}=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$1 \leqq f(x,\ y) \leqq \sqrt{2}$
よって　最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，最小値 $\mathbf{1}$

別解 $\vec{u}=(1,\ 1)$，$\vec{v}=(|x|,\ |y|)$ のなす角を φ とすると，$0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos\varphi \leqq 1$$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$　ゆえに　$1 \leqq \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq \sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 与えられた規則により　$\boldsymbol{P_1(0) = \alpha}$，　$\boldsymbol{P_1(1) = 1 - \alpha}$

(2) 操作を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した直後の点 A の座標を x_n とする．

「すべての自然数 n について　$0 \leqq x_n \leqq 1$」　$\cdots(*)$

［1］(1) の結果から，$x_1 = 0$ または $x_1 = 1$ である．
したがって，$n = 1$ のとき $(*)$ は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$0 \leqq x_k \leqq 1$ であると仮定すると

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} \quad \text{または} \quad x_{k+1} = 1 - \frac{x_k}{2}$$

上の 2 式から　$0 \leqq \dfrac{x_k}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leqq x_{k+1} \leqq 1$　ゆえに　$0 \leqq x_{k+1} \leqq 1$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成立する．

$(*)$ より，$y < 0$ または $y > 1$ のとき　$P_n(y) = 0$

(3) $x_n = 1$ のとき，$x_{n-1} = 0$ である．さらに

$$x_{n-2} = 0 \ \rightarrow\ x_{n-3} = 0 \ \rightarrow\ \cdots \ \rightarrow\ x_2 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0$$

最初の $n - 1$ 回はすべて表，n 回目に裏が出る確率であるから

$$\boldsymbol{P_n(1) = \alpha^{n-1}(1 - \alpha)}$$

(4) $x_n = 2^{-k}$ のとき

$$x_{n-1} = 2^{-k+1} \ \rightarrow\ x_{n-2} = 2^{-k+2} \ \rightarrow\ \cdots \ \rightarrow\ x_{n-k+1} = 2^{-1} \ \rightarrow\ x_{n-k} = 1$$

したがって，$x_{n-k} = 1$ となった後，表裏に関係なく $x_{n-k+1} = 2^{-1}$ となり，
その後，連続して表が $k - 1$ 回出る確率である．

① $n \leqq k$ のとき，$x_{n-k} = 1$ となることはないから　$\boldsymbol{P_n(2^{-k}) = 0}$

② $n > k$ のとき，(3) の結果を利用して

$$\begin{aligned} P_n(2^{-k}) &= P_{n-k}(1)\cdot\alpha^{k-1} \\ &= \alpha^{n-k-1}(1 - \alpha)\cdot\alpha^{k-1} \\ &= \boldsymbol{\alpha^{n-2}(1 - \alpha)} \end{aligned}$$