平成31年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B

1 曲線 $y = 3e^{-2x}$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ がある．ただし，$t > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y = 3e^{-2x}$ と (1) で求めた接線，および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ．

(3) (1) で求めた接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 が最大となる t，およびそのときの S_2 の値を求めよ．

(4) (2) と (3) で定義した S_1，S_2 に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1 + S_2)$ を求めよ．

2 赤りんごが a 個，青りんごが b 個入っている袋と，赤りんごが c 個，青りんごが d 個入っているかごがある．袋からりんごを1個取り出し，取り出したりんごを袋に戻した上で，そのりんごと同じ色のりんごをかごから袋に1個移動させる試行を何回か繰り返す．以下の問いに答えよ．

(1) $a = 2$，$b = 3$，$c = 2$，$d = 3$ とする．2回目の試行において，袋から取り出したりんごが赤りんごである確率を求めよ．

(2) $a = 2$，$b = 3$，$c = 2$，$d = 3$ とする．2回目の試行において，袋から取り出したりんごが赤りんごであったとき，1回目の試行で袋から取り出したりんごが青りんごである確率を求めよ．

(3) $a > 0$，$b > 0$，$c = 2$，$d = 3$ とする．何回目かの試行後に，かごに赤りんごと青りんごが1個ずつ残る確率を a，b を用いて表せ．

(4) $a = 1$，$b = 1$，$c > 1$，$d > 1$ とする．何回目かの試行後に，かごに赤りんごと青りんごが1個ずつ残る確率を c，d を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 平面上の 2 点 P，Q の座標をそれぞれ $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ とし，O を原点とする．また，複素数 α，β を $\alpha = a + ib$，$\beta = c + id$ と定める．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\dfrac{\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta}{2}$ に等しいことを示せ．ただし，i は虚数単位，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ は，それぞれ α，β の共役な複素数である．

(2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円**という．単位円に内接する正 n 角形 $(n \geqq 3)$ の頂点を $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ とする．このとき，単位円上の点 A に対して，

$$S_p = (\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}})^p + (\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}})^p + \cdots + (\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}})^p$$

とする．ただし，p は $0 < p < n$ を満たす整数とする．

(a) $S_1 = 0$ が成り立つことを示せ．

(b) $S_2 = \dfrac{n}{2}$ が成り立つことを示せ．

(c) S_p の値は点 A によらないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を自然数とする．

(1) すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1) = \frac{1}{a+1} n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2) $a \geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ．

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)} + \frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)} = \frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3) 級数の極限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ c を正の実数として，点 $(-1,\ 1,\ c)$ を通りベクトル $(7,\ 4,\ 2)$ に平行な直線を考える．

(1) この直線上に中心をもち，xy 平面，yz 平面，zx 平面すべてに接する球が存在するような c の値が二つあることを示せ．さらに，それぞれの c について，このような球が一つずつあることを示せ．

(2) (1) で求めた二つの球の中心を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ に垂直で原点を通る平面を α とする．直線 ℓ と平面 α を，それぞれ式で表せ．

(3) (1) で求めた二つの球のうち，半径の大きな方の球を S，もう一方の球を S' とする．球 S は平面 α と交わらないことを示せ．

(4) 球 S を，その中心が直線 ℓ 上を動くように平面 α に向かって移動させる．球 S が平面 α に初めて接するまでの中心の移動距離を求めよ．

(5) (4) の移動前の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を P とし，移動後の球 S と球 S' が内接する円錐の頂点を Q とするとき，P と Q の距離を求めよ．

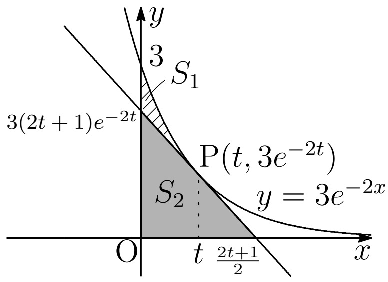
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=3e^{-2x}$ より　$y'=-6e^{-2x}$

曲線 $y=3e^{-2x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ における接線は

$$y-3e^{-2t}=-6e^{-2t}(x-t)$$

よって　$\boldsymbol{y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}}$



(2) (1) の結果から，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^t 3e^{-2x}\,dx-\frac{1}{2}\{3(2t+1)e^{-2t}+3e^{-2t}\}t\\&=-\frac{3}{2}\Big[\ e^{-2x}\ \Big]_0^t-3t(t+1)e^{-2t}=-\frac{3}{2}(e^{-2t}-1)-3t(t+1)e^{-2t}\\&=\boldsymbol{-\frac{3}{2}(2t^2+2t+1)e^{-2t}+\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(3) (1) で求めた直線の x 切片，y 切片は，それぞれ $\dfrac{2t+1}{2}$，$3(2t+1)e^{-2t}$ であるから，$t>0$ に注意して

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+1}{2}\cdot 3(2t+1)e^{-2t}=\frac{3}{4}(2t+1)^2e^{-2t},\\\frac{dS_2}{dt}&=\frac{3}{4}\{4(2t+1)e^{-2t}-2(2t+1)^2e^{-2t}\}\\&=-\frac{3}{2}(2t+1)(2t-1)e^{-2t}\end{aligned}$$

したがって，$t>0$ における S_2 の増減は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$\frac{dS_2}{dt}$		$+$	0	$-$
S_2		$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$

よって，S_2 は，$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{e}}$ をとる．

(4) (2)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=-\frac{3}{2}(2t^2+2t+1)e^{-2t}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}(2t+1)^2e^{-2t}\\&=-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)=\frac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 最初に赤りんご2個と青りんご3個が袋の中にあるから，1回目の試行で赤りんご，青りんごを取り出す確率はそれぞれ $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3}{5}$ である．

① 1回目に赤りんご，2回目に赤りんごを袋から取り出す確率を p_1 とすると，2回目の試行において袋の中には赤りんご3個と青りんご3個があるから

$$p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

② 1回目に青りんご，2回目に赤りんごを袋から取り出す確率を p_2 とすると，2回目の試行において袋の中には赤りんご2個と青りんご4個があるから

$$p_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

よって，2回目の試行で赤りんごを取り出す確率を p とすると

$$p = p_1 + p_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

(2) (1) の結果から，求める条件付き確率は $\quad \dfrac{p_2}{p} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) 3回の試行で赤りんごを1回，青りんごを2回取り出す確率である．

(i) 1回目に赤りんごを取り出す確率を q_1 とすると

$$q_1 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+1} \cdot \frac{b+1}{a+b+2} = \frac{ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

(ii) 2回目に赤りんごを取り出す確率を q_2 とすると

$$q_2 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b+1}{a+b+2} = \frac{ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

(iii) 3回目に赤りんごを取り出す確率を q_3 とすると

$$q_3 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b+2} = \frac{ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

(i)〜(iii) から，求める確率は

$$q_1 + q_2 + q_3 = \boldsymbol{\frac{3ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}}$$

別解　取り出す場合の総数は，1回目が $a+b$ 通り，2回目が $a+b+1$ 通り，3回目が $a+b+2$ 通りあるから

$$(a+b)(a+b+1)(a+b+1)\quad\text{通り}$$

3回の試行において，赤りんごは1度だけ取り出される a 通り，青りんごは2度取り出され，最初が b 通りで，2度目が $b+1$ 通り．これら3回の試行において取り出されるりんごの順序は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り．よって，求める確率は

$$\frac{ab(b+1)\times{}_3\mathrm{C}_1}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}=\boldsymbol{\frac{3ab(b+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}}$$

(4) 赤りんごを $c-1$ 回，青りんごを $d-1$ 回の合わせて $c+d-2$ 回取り出す．取り出す場合の総数は，k 回目が $k+1$ 通りであるから $(k=1,2,\ldots,c+d-2)$

$$2\cdot3\cdots(c+d-1)=(c+d-1)!\quad(\text{通り})$$

赤りんごを $c-1$ 回取り出す中で j 回目 $(j=1,2,\ldots,c-1)$ に取り出す場合が j 通り，青りんごを $d-1$ 回取り出す中で i 回目 $(i=1,2,\ldots,d-1)$ に取り出す場合が i 通りであるから，その取り出し方は

$$(c-1)!(d-1)!\quad(\text{通り})$$

これら $c+d-2$ 回の試行において取り出されるりんごの順序は

$$\frac{(c+d-2)!}{(c-1)!(d-1)!}\quad(\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{(c-1)!(d-1)!}{(c+d-1)!}\times\frac{(c+d-2)!}{(c-1)!(d-1)!}=\boldsymbol{\frac{1}{c+d-1}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 平面上の 2 点 P$(a,\ b)$，Q$(c,\ d)$ と原点 O により $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = ac + bd$

$\alpha = a + ib$，$\overline{\beta} = c - id$ であるから

$$\frac{\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta}{2} = \mathrm{Re}(\alpha\overline{\beta}) = ac + bd \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta}{2}$$

(2) $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\mathrm{P}_l(w^l)$ とおく $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$.
$w^l(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ は方程式 $z^n - 1 = 0$，すなわち

$$(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$$

の解で，とくに，w^l, $\overline{w^l}$ $(l \not\equiv 0 \pmod{n})$ は，次の方程式の解である.

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \quad \cdots(*)$$

(a) A(α) とすると

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^k\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(w^k\overline{\alpha} + \overline{w^k}\alpha) = 0$$

よって $$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}_k\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{w^k\overline{\alpha} + \overline{w^k}\alpha}{2} = 0$$

(b) $\alpha\overline{\alpha} = 1$ および w^2，$\overline{w^2}$ が方程式 $(*)$ の解であることに注意して

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}_k\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{w^k\overline{\alpha} + \overline{w^k}\alpha}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\overline{\alpha}^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(w^2)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{w^2})^k = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

(c) $w\overline{w}=1$ および $\alpha\overline{\alpha}=1$ に注意して

$$\begin{aligned}S_p &= \sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}_k\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{w^k\overline{\alpha}+\overline{w^k}\alpha}{2}\right)^p \\ &= \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_j(w^k\overline{\alpha})^{p-j}(\overline{w^k}\alpha)^j = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_j(w^k\overline{\alpha})^{p-2j} \\ &= \frac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_j\overline{\alpha}^{\,p-2j}\sum_{k=0}^{n-1}(w^{p-2j})^k\end{aligned}$$

$p-2j\not\equiv 0\pmod{n}$ のとき，w^{p-2j} は $(*)$ の解であるから

$$\sum_{k=0}^{n-1}(w^{p-2j})^k = \begin{cases} 0 & (j\neq\frac{p}{2}) \\ n & (j=\frac{p}{2})\end{cases}$$

よって　p が奇数のとき　$S_p=0$,　p が偶数のとき　$S_p=\dfrac{n}{2^p}\cdot{}_p\mathrm{C}_{\frac{p}{2}}$

以上より，S_p は点 A によらない.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) a は自然数であるから

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+a-1) \\ &= \frac{1}{a+1}\sum_{k=1}^{n}\{(k+a)-(k-1)\}k(k+1)\cdots(k+a-1) \\ &= \frac{1}{a+1}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)\cdots(k+a)-(k-1)k\cdots(k+a-1)\} \\ &= \frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)\end{aligned}$$

(2) 与えられた等式

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)} = \frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

の両辺に $n(n+1)\cdots(n+a-1)$ を掛けると

$b(n+a-1)+cn=a-1$　ゆえに　$(b+c)n+(a-1)(b-1)=0$

上の第 2 式は，n に関する恒等式であるから

$$b+c=0,\quad (a-1)(b-1)=0$$

$a\geqq 2$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{b=1,\ c=-1}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+a-1)}$$
$$=\frac{a-1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

上式の両辺を k について 1 から n まで加えると

$$\frac{1}{(a-1)!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a-1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} \qquad \cdots(*)$$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=0$ であるから

$$\frac{1}{(a-1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a-1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

(ii) $a=1$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{k}>\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}$ より $(k=1,2,\ldots,n)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\ \log x\ \Big]_{1}^{n+1}=\log(n+1)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$

(i)，(ii) の結果から

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}}$$
$$\boldsymbol{=\begin{cases}\dfrac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!} & (a>1)\\ \infty & (a=1)\end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 点 $(-1,\ 1,\ c)$ を通りベクトル $(7,\ 4,\ 2)$ に平行な直線上の点 $(x,\ y,\ z)$ は

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (-1,\ 1,\ c) + t(7,\ 4,\ 2) \qquad (t \text{ は媒介変数})\\ &= (-1+7t,\ 1+4t,\ c+2t)\end{aligned}$$

この直線上に中心をもち，xy 平面，yz 平面，zx 平面すべて接する球の半径を r とすると

$$r = |-1+7t| = |1+4t| = |c+2t| \quad \cdots ①$$

$|-1+7t| = |1+4t|$ より

$$(-1+7t)^2 = (1+4t)^2 \quad \text{これを解いて} \quad t = 0,\ \frac{2}{3}$$

$t = 0$ のとき，① より

$$r = 1 = |c| \quad c > 0 \text{ に注意して} \quad c = 1$$

$t = \dfrac{2}{3}$ のとき，① より

$$r = \frac{11}{3} = \left|c + \frac{4}{3}\right| \quad c > 0 \text{ に注意して} \quad c = \frac{7}{3}$$

したがって，条件を満たす c は 2 つあり，それぞれの c について

$$c = 1 \text{ のとき} \quad \text{中心 } (-1,\ 1,\ 1),\ \text{半径 } 1 \text{ の球},$$

$$c = \frac{7}{3} \text{のとき} \quad \text{中心} \left(\frac{11}{3},\ \frac{11}{3},\ \frac{11}{3}\right),\ \text{半径} \frac{11}{3} \text{の球}$$

(2) (1) で求めた 2 つの球の中心を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\frac{14}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}(7,\ 4,\ 4)$$

直線 ℓ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$ を通り，ベクトル $(7,\ 4,\ 4)$ に平行であるから，その方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{4}}$$

平面 α は原点を通り，ベクトル $(7,\ 4,\ 4)$ に垂直であるから，その方程式は

$$\boldsymbol{7x + 4y + 4z = 0}$$

(3) (1)，(2) の結果により，S の中心 $\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ から $\alpha : 7x+4y+4z=0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|7\cdot\frac{11}{3}+4\cdot\frac{11}{3}+4\cdot\frac{11}{3}|}{\sqrt{7^2+4^2+4^2}} = \frac{55}{9}$$

S の半径を r とすると，$r=\dfrac{11}{3}$ であるから　$d>r$

よって，球 S は平面 α とは交わらない．

(4) 求める移動距離は，(3) の結果から　$d-r=\dfrac{55}{9}-\dfrac{11}{3}=\boldsymbol{\dfrac{22}{9}}$

補足 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面 $\alpha : ax+by+cx+d=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

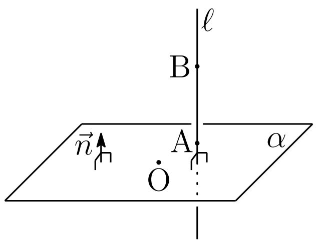
$f(x,\ y,\ z)=\dfrac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ とおくと，$f(x,\ y,\ z)$ の符号が等しい点は，平面 $\alpha : ax+by+cz+d=0$ に関して同じ側にある．また，$f(x,\ y,\ z)$ の絶対値は点 $(x,\ y,\ z)$ から α までの距離を表す．

$\alpha : 7x+4y+4z=0$ に対して

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{7x+4y+4z}{\sqrt{7^2+4^2+4^2}}=\frac{1}{9}(7x+4y+4z)$$

とおくと，$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ について

$$f(\mathrm{A})=\frac{1}{9},\quad f(\mathrm{B})=\frac{55}{9}$$



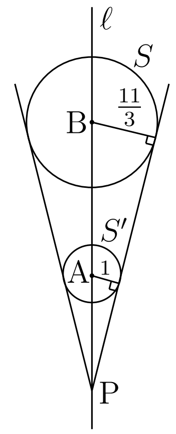
したがって，2 点 A，B は α に関して同じ側にあるから，AB 間の距離は

$$\mathrm{AB}=f(\mathrm{B})-f(\mathrm{A})=\frac{55}{9}-\frac{1}{9}=6$$

実際，α の単位法ベクトルを $\vec{n}=\left(\dfrac{7}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{4}{9}\right)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\frac{11}{3},\ \frac{11}{3},\ \frac{11}{3}\right)-(-1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{14}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)=6\vec{n}$$

(5) $\vec{n}=\left(\frac{7}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9}\right)$ とし，(2) の結果から $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{a}+6\vec{n})$，$\mathrm{P}(\vec{a}+p\vec{n})$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-p\vec{n},\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(6-p)\vec{n}$$

右の図から，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{11}{3}\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ であるから

$$6-p=\frac{11}{3}(-p)\quad これを解いて\quad p=-\frac{9}{4}$$

ゆえに　　$\mathrm{P}\left(\vec{a}-\frac{9}{4}\vec{n}\right)$

S が (4) の移動により，球 S の中心 B が移動した点を C とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{22}{9}\vec{n}=\vec{a}+6\vec{n}-\frac{22}{9}\vec{n}=\vec{a}+\frac{32}{9}\vec{n}$$

$\mathrm{C}\left(\vec{a}+\frac{32}{9}\vec{n}\right)$，$\mathrm{Q}(\vec{a}+q\vec{n})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=-q\vec{n},\quad \overrightarrow{\mathrm{QC}}=\left(\frac{32}{9}-q\right)\vec{n}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\frac{11}{3}\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ であるから

$$\frac{32}{9}-q=\frac{11}{3}(-q)\quad これを解いて\quad q=-\frac{4}{3}$$

ゆえに　　$\mathrm{Q}\left(\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{n}\right)$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{n}\right)-\left(\vec{a}-\frac{9}{4}\vec{n}\right)=\frac{11}{12}\vec{n}$$

よって　　$\mathbf{PQ}=\mathbf{\frac{11}{12}}$