平成 30 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 次で定義される数列 $\{I_n\}$ を考える.

$$I_n = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^{2n-1}x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 数列 $\{I_n\}$ が次の式を満たすことを証明せよ.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos x\sin^{n-1}x\right)$ を $\sin x$ と n を用いて表せ.

(4) 数列 $\{I_n\}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ.

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

(5) 数列 $\{I_n\}$ の一般項を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a，b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部といい $a = \mathrm{Re}\, z$ と書き表し，b を z の虚部といい $b = \mathrm{Im}\, z$ と書き表す．また z の絶対値を $|z|$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数 $u = \dfrac{5 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ を極形式で表せ．

(2) 条件 $\mathrm{Re}\, w \leqq 0$，$\mathrm{Im}\, w \geqq 0$，$40 \leqq |w| \leqq 135$ を満たす複素数 w 全体のなす領域

$$D = \{w \mid \mathrm{Re}\, w \leqq 0,\ \mathrm{Im}\, w \geqq 0,\ 40 \leqq |w| \leqq 135\}$$

を考える．このとき，z^3u が D に属するような複素数 z 全体のなす領域

$$A = \{z \mid z^3u \in D\}$$

を図示せよ．

(3) 複素数 z が領域 A 上を動くとき，z と -2 との距離が最小になるような z を求めよ．解答に極形式を用いてよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 5 人に「あなたの年齢は 20 代ですか」という質問をする．ただし，各回答者は,「はい」か「いいえ」と答える前にさいころを振り，1 または 2 の目が出たときは正直に答え，3 以上の目が出たときは，うその答えを言うものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 5 人のうち 20 代が 1 人もいないとき,「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ．

(2) 5 人のうち 20 代がちょうど 1 人のとき,「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ．

(3) 5 人の回答者は街頭調査で出会った人たちとする．ただし，同じ人と繰り返し出会うこともあるとする．街頭調査で出会う人が 20 代である確率が p のとき,「はい」と答える人数が 3 である確率を求めよ．

(4) (3) の確率が最大となる p を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ r を正の実数とする．半径がそれぞれ r，$2r$，$3r$ の 3 つの球 C_1，C_2，C_3 と，これらすべてに接する平面 α がある．ただし，3 つの球はすべて平面 α の同じ側で接しているものとする．すなわち，3 つの球のそれぞれの中心を結ぶ線分は，いずれも平面 α と交わらないものとする．3 つの球 C_1，C_2，C_3 と平面との接点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする．空間において，基点 O を定め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \vec{p} + \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \vec{p} + \vec{b}$ とすると，$|\vec{a}| = 3r$，$|\vec{b}| = 4r$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q を平面 α 上にある点とする．球 C_2 の中心と点 Q との距離を d_1，球 C_3 の中心と点 Q との距離を d_2 とする．このとき，$d_1 + d_2$ を最小にする点 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．

(2) 3 つの球 C_1，C_2，C_3 の中心を通る平面 β と，平面 α との交線を l とする．l を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ と媒介変数 t を用いて媒介変数表示せよ．

(3) 点 R を直線 l 上にある点とする．球 C_2 の中心と点 R との距離を最小にする点 R の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ $f(x) = (a+1)x$，$g(x) = ax^2$ とする．ただし，a は正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を座標平面上に図示せよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ．また，面積 S が最小となる a と，そのときの面積を求めよ．

(3) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S が最小となるとき，この図形を直線 $y = f(x)$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ について，$x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cdot(-dt)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle I_n = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^{2n-1} x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\begin{aligned}I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^{2n} x)'\,dx\\ &= -\Big[\ x\cos^{2n} x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(\cos x\sin^{n-1} x\Big) &= -\sin x\sin^{n-1} x + \cos x\left\{(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\right\}\\ &= -\sin^n x + (n-1)\sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\\ &= \boldsymbol{-n\sin^n x + (n-1)\sin^{n-2} x}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果を利用すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-n\sin^n x + (n-1)\sin^{n-2} x\}dx = \Big[\ \cos x\sin^{n-1} x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ において，n を $2n$ に置き換えると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx$$

よって $\displaystyle I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$

(5) (4) の結果から，n が 2 以上の自然数のとき

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=2}^{n} \frac{2k(2k-1)}{(2k)^2}$$

$$\frac{I_n}{I_1} = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{2^2k^2} = 2\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n-1}}$$

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ より

$$2I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad I_1 = \frac{\pi}{4}$$

したがって　$I_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n-1}} I_1 = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n-1}}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{I_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$

補足 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(∗) において，n を $2n-1$ に置き換えると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3} x\,dx$$

よって　$J_n = \dfrac{2n-2}{2n-1} J_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$

n が 2 以上の自然数のとき

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{J_k}{J_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-2}{2k-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(2k-2)^2}{(2k-1)(2k-2)}$$

$$\frac{J_n}{J_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{2^2(k-1)^2}{(2k-1)(2k-2)}$$

$$= \frac{2^{2n-2}\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!} = \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

$J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$ より，上式は $n=1$ のときも成立するから

$$J_n = \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{5+5\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}=\dfrac{5\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}=\dfrac{5(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{5\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

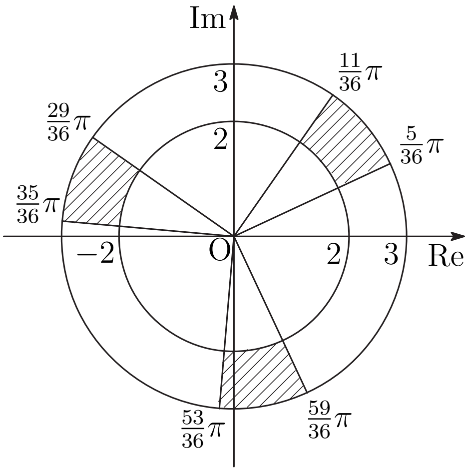
$$\begin{aligned} z^3u &= \{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^3\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ &= 5r^3\left\{\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right\} \end{aligned}$$

$z^3u\in D$ であるから，n を整数とすると

$$40\leqq 5r^3\leqq 135,\quad \frac{\pi}{2}+2n\pi\leqq 3\theta+\frac{\pi}{12}\leqq\pi+2n\pi$$

すなわち　$2\leqq r\leqq 3,\quad \dfrac{24n+5}{36}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{24n+11}{36}\pi\quad (n=0,1,2)$

よって，領域 $A=\{z\,|\,z^3u\in D\}$ は下の図の斜線部分で，境界線を含む.



(3) (2) の図から　$\boldsymbol{z=2\left(\cos\dfrac{35}{36}\pi+i\sin\dfrac{35}{36}\pi\right)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 正直に答える確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$,　　うその答えを言う確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

正直に答える者が 2 人でうその答えを言う者が 3 人であるから

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{80}{243}}$$

(2) (i) 20 代の 1 人が正直に答えるとき
他の 4 人について 2 人が正直に答え，2 人がうその答えを言うから

$$\frac{1}{3}\times {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{243}$$

(ii) 20 代の 1 人がうその答えを言うとき
他の 4 人について 1 人が正直に答え，3 人がうその答えを言うから

$$\frac{2}{3}\times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{64}{243}$$

(i),(ii) より，求める確率は $\dfrac{24}{243}+\dfrac{64}{243}=\boldsymbol{\dfrac{88}{243}}$

(3) 出会った 1 人が「はい」と答える確率は $p\times\dfrac{1}{3}+(1-p)\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2-p}{3}$

出会った 1 人が「いいえ」と答える確率は $p\times\dfrac{2}{3}+(1-p)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1+p}{3}$

したがって，出会った 5 人のうち 3 人が「はい」と答える確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2-p}{3}\right)^3\left(\frac{1+p}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{10}{243}(2-p)^3(1+p)^2}$$

(4) $f(p)=\dfrac{10}{243}(2-p)^3(1+p)^2$ とおくと $f'(p)=\dfrac{10}{243}(2-p)^2(1+p)(1-5p)$

$0\leqq p\leqq 1$ における $f(p)$ の増減は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

(3) の確率が最大となる p は $\boldsymbol{p=\dfrac{1}{5}}$

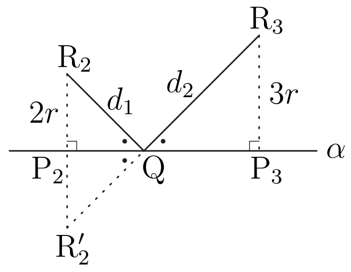
別解 3 個の正数 $\dfrac{2-p}{3}$ と 2 個の正数 $\dfrac{1+p}{2}$ の相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{5}\left\{3\cdot\frac{2-p}{3}+2\cdot\frac{1+p}{2}\right\}\geqq\sqrt[5]{\left(\frac{2-p}{3}\right)^3\left(\frac{1+p}{2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^5\geqq\frac{(2-p)^3(1+p)^2}{3^3\cdot 2^2}\quad ゆえに\quad \frac{10}{243}(2-p)^3(1+p)^2\leqq\frac{216}{625}$$

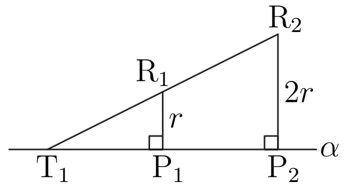
(3) の確率が最大になるとき $\dfrac{2-p}{3}=\dfrac{1+p}{2}$ これを解いて $p=\dfrac{1}{5}$

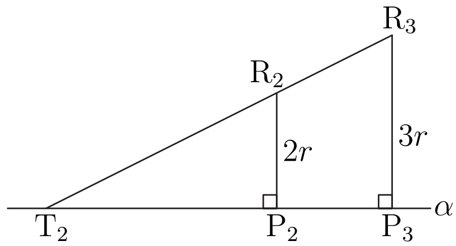
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C_i の中心を R_i とし $(i=1,2,3)$，α に関して R_2 と対称な点を R_2' とする．Q は線分 $\mathrm{R}_2'\mathrm{R}_3$ と α の交点であるから，Q は線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ を $2:3$ に内分する点である．



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3(\vec{p}+\vec{a})+2(\vec{p}+\vec{b})}{2+3}=\boldsymbol{\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}$$

(2) 2 直線 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$，$\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ と α との交点をそれぞれ T_1，T_2 とする．





T_1 は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $1:2$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}=\frac{-2\vec{p}+(\vec{p}+\vec{a})}{1-2}=\vec{p}-\vec{a}$$

T_2 は線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ を $2:3$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}_2}=\frac{-3(\vec{p}+\vec{a})+2(\vec{p}+\vec{b})}{2-3}=\vec{p}+3\vec{a}-2\vec{b}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2}=4\vec{a}-2\vec{b}=2(2\vec{a}-\vec{b})$

交線 l は直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$，すなわち，T_1 を通り，$2\vec{a}-\vec{b}$ に平行な直線である．
よって，l の方程式は，媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}_1}+t(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{p}-\vec{a}+t(2\vec{a}-\vec{b})=\boldsymbol{\vec{p}+(2t-1)\vec{a}-t\vec{b}}$$

(3) $\mathrm{R}_2\mathrm{R}^2=\mathrm{R}_2\mathrm{P}_2{}^2+\mathrm{P}_2\mathrm{R}^2=4r^2+\mathrm{P}_2\mathrm{R}^2$

R は $\mathrm{P}_2\mathrm{R}$ が最小となる，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{R}}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$ を満たす点である．

(3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{p}+(2t-1)\vec{a}-t\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{R}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=2(t-1)\vec{a}-t\vec{b}$$

$|\vec{a}|=3r$，$|\vec{b}|=4r$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=6r^2$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{R}}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$ より

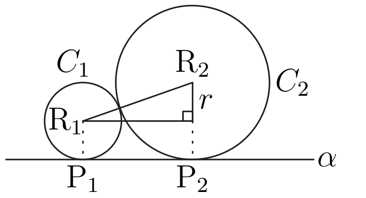
$$\{2(t-1)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$$

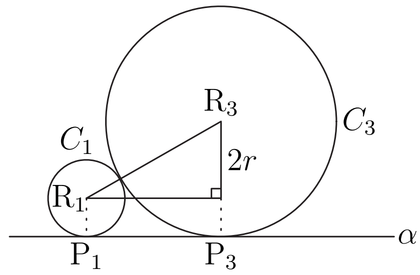
$$4(t-1)|\vec{a}|^2-2(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$$

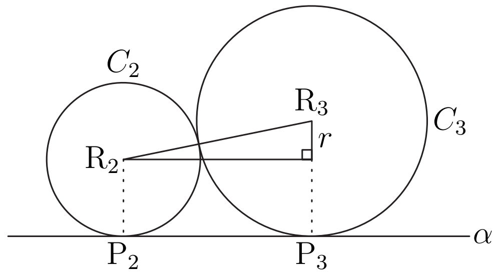
$$4\{9(t-1)-3(2t-1)+4t\}r^2=0$$

ゆえに　$t=\dfrac{6}{7}$　(3) の結果に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{p}+\frac{5}{7}\vec{a}-\frac{6}{7}\vec{b}}$

参考 本題において，C_1，C_2，C_3 が互いに外接しているとき，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求める．







$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \vec{p} + \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \vec{p} + \vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \vec{b} - \vec{a}$$

$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = 3r$，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3 = 4r$，$\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3 = 5r$ であるから，上の図から

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = 2\sqrt{3}r, \\ |\vec{b} - \vec{a}| &= \sqrt{(5r)^2 - r^2} = 2\sqrt{6}r \end{aligned}$$

$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$ より

$$24r^2 = 12r^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 8r^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -2r^2$$

このとき，本題の (1),(2) の答は変わらないが，(3) においては上の結果を

$$4(t-1)|\vec{a}|^2 - 2(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

に代入すると

$$4\{8(t-1) + (2t-1) + 3t\}r^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{9}{13}$$

このとき $\qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{p} + \dfrac{5}{13}\vec{a} - \dfrac{9}{13}\vec{b}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $l : y = f(x)$, $C : y = g(x)$ とする.

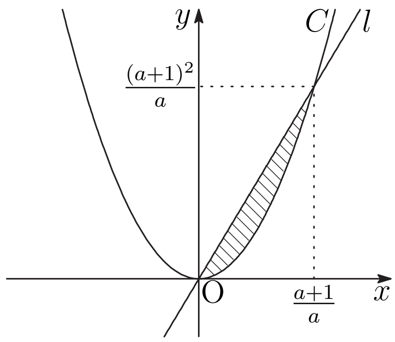
l と C の方程式から y を消去すると

$$(a+1)x = ax^2$$

ゆえに　$ax\left(x - \dfrac{a+1}{a}\right) = 0$

交点は　$(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{a+1}{a},\ \dfrac{(a+1)^2}{a}\right)$

l と C で囲まれた図形は右の図の斜線部分.



(2) (1) の結果から

$$S = \int_0^{\frac{a+1}{a}} \left\{(a+1)x - ax^2\right\} dx$$
$$= a\int_0^{\frac{a+1}{a}} x\left(\frac{a+1}{a} - x\right) dx = \frac{a}{6}\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{(a+1)^3}{6a^2}}$$

$S = \dfrac{1}{6}a^{-2}(a+1)^3$ を a について微分すると

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{6}\{-2a^{-3}(a+1)^3 + 3a^{-2}(a+1)^2\}$$
$$= \frac{1}{6}a^{-3}(a+1)^2\{-2(a+1) + 3a\} = \frac{1}{6a^3}(a+1)^2(a-2)$$

したがって，S の増減表は次のようになる.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\nearrow$

よって，S は $\boldsymbol{a = 2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$ をとる.

(3) (2) の結果より $a=2$ であるから，これを(1) に適用すると

$$l: y=3x, \quad C: y=2x^2$$

これらの交点の座標は　$(0,\ 0),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$

l に平行な単位ベクトルと垂直な単位ベクトルを，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

とし，この向きに X 軸，Y 軸を定め，次の直交変換を行う．

$$\frac{X}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

すなわち　$\dfrac{X+3Y}{\sqrt{10}}=x, \quad \dfrac{3X-Y}{\sqrt{10}}=y$

ゆえに　$X=\dfrac{x+3y}{\sqrt{10}}, \quad Y=\dfrac{3x-y}{\sqrt{10}}$

$C: y=2x^2\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right)$ はこの直交変換により

$$X=\frac{x+6x^2}{\sqrt{10}}, \quad Y=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{10}}$$

x	$0 \longrightarrow \frac{3}{2}$
X	$0 \longrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2}$

求める回転体の体積 V は，$\dfrac{dX}{dx}=\dfrac{1+12x}{\sqrt{10}}$ により

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{3\sqrt{10}}{2}} Y^2\,dX = \pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3x-2x^2}{\sqrt{10}}\right)^2\frac{1+12x}{\sqrt{10}}dx \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}}\int_0^{\frac{3}{2}} x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)^2(1+12x)\,dx \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}}\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+12x^3\left(\frac{3}{2}-x\right)^2\right\}dx \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}}\left\{\frac{2!2!}{5!}\left(\frac{3}{2}\right)^5+12\cdot\frac{3!2!}{6!}\left(\frac{3}{2}\right)^6\right\} = \boldsymbol{\frac{81\pi}{80\sqrt{10}}}
\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$ を利用[1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

発展 $l: y=3x$，$C: y=2x^2$ で囲まれた図形を x 軸および y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_x，V_y とすると

$$V_x = \pi\int_0^{\frac{3}{2}} \left\{(3x)^2-(2x^2)^2\right\}dx = \pi\Big[\ 3x^3-\frac{4}{5}x^5\ \Big]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{81}{20}\pi,$$

$$V_y = 2\pi\int_0^{\frac{3}{2}} x(3x-2x^2)\,dx = 4\pi\int_0^{\frac{3}{2}} x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)dx$$

$$= 4\pi\cdot\frac{2!1!}{4!}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{16}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理[2]により，図形の重心 G は

$$\left(\frac{V_y}{2\pi S},\ \frac{V_x}{2\pi S}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{4},\ \frac{9}{5}\right)$$

G と $l: 3x-y=0$ の距離 h は $\quad h = \dfrac{\left|3\cdot\frac{3}{4}-\frac{9}{5}\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \dfrac{9}{20\sqrt{10}}$

よって $\qquad V = 2\pi hS = 2\pi\cdot\dfrac{9}{20\sqrt{10}}\cdot\dfrac{9}{8} = \dfrac{81\pi}{80\sqrt{10}}$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の 6 ページを参照.