平成 29 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

1 座標平面上の曲線 $C : y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ を考える．C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ $(p > 0,\ q > 0)$ における，それぞれの法線 ℓ_1，ℓ_2 を考える．法線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を p と q で表せ．

(2) q が p に限りなく近づくとき，線分 RP の長さの極限値を p で表せ．

2 1 個のさいころを 4 回投げ，1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c，4 回目に出た目の数を d とする．d が，a と b と c の最大公約数の倍数となる確率を求めよ．

3 座標空間内に点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，点 $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 0)$，点 $\mathrm{C}(0,\ 0, -2)$，点 $\mathrm{D}(0, -2,\ 0)$ がある．線分 AC を $1 : 3$ に内分する点を E とし，線分 AD を $1 : 3$ に内分する点を F とする．直線 BC と平面 $x = \dfrac{3}{2}$ の交点を G とする．直線 BD と平面 EFG の交点を H とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 E，F，G，H の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 三角形 FGH の面積を求めよ．

4 k を $k \geqq 0$，$k \neq 1$ を満たす実数として，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \{1 - (1 - k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

で定める．ただし，関数 $f(x)$ の定義域は，$0 \leqq k < 1$ のとき $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{1-k}$ であり，$k > 1$ のとき $x \geqq 0$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $k = 0$ のとき，$0 < k < 1$ のとき，$1 < k$ のときのそれぞれの場合について，関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸，座標軸との交点を調べてグラフをかけ．

(3) $x \geqq 0$ であるとき，

$$\lim_{k \to 1+0} \{1 - (1 - k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

を求めよ．ここで，自然対数の底 e が $e = \displaystyle\lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ を満たすことを用いてよい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2} > 2a_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k \geqq 2)$ の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ．

(3) (2) における項の個数 k は，$k < 2\log_2 m + 2$ を満たすことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと　　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p})$ における法線 ℓ_1 の方程式は，$-\dfrac{1}{f'(p)}=-2\sqrt{p}$ より

$y-\sqrt{p}=-2\sqrt{p}(x-p)$　すなわち　$y=-2\sqrt{p}\,x+(2p+1)\sqrt{p}$　$\cdots$①

同様に，C 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{q})$ における法線 ℓ_2 の方程式は

$$y=-2\sqrt{q}\,x+(2q+1)\sqrt{q}\quad\cdots②$$

①，② から y を消去すると

$$\begin{aligned}2(\sqrt{p}-\sqrt{q})x&=(2p+1)\sqrt{p}-(2q+1)\sqrt{q}\\&=2(p\sqrt{p}-q\sqrt{q})+\sqrt{p}-\sqrt{q}\end{aligned}$$

2 点 P，Q は異なるので，$\sqrt{p}-\sqrt{q}\neq 0$ であるから

$$x=\frac{p\sqrt{p}-q\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}+\frac{1}{2}=p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}y&=-2\sqrt{p}\left(p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2}\right)+(2p+1)\sqrt{p}\\&=(-2\sqrt{pq}-2q)\sqrt{p}=-2\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})\end{aligned}$$

よって，点 R の座標は

$$\boldsymbol{\left(p+\sqrt{pq}+q+\frac{1}{2},-2\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})\right)}$$

(2) q が p に限りなく近づいたとき，点 R の極限の位置は，(1) の結果から

$$\left(3p+\frac{1}{2},\ -4p\sqrt{p}\right)$$

このとき，RP の長さは

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(3p+\frac{1}{2}-p\right)^2+(-4p\sqrt{p}-\sqrt{p})^2}\\=&\sqrt{\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2+4p\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2}\\=&\left(2p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+4p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

解説 q が p に限りなく近づくとき，点 R の極限の位置は，C 上の点 P における曲率中心である．このとき線分 RP の長さは曲率円 (接触円) の半径に等しい．

一般に，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲率中心 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad y=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

となる[1]．したがって

$$\mathrm{RP}=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}\qquad\cdots(*)$$

実際，本題の関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$(*)$ より，(2) の RP の長さ，すなわち，$x=p$ における曲率半径は

$$\mathrm{RP}=\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times 4p\sqrt{p}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\times(4p)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}$$

あるいは，$g(x)=f^{-1}(x)=x^2\ (x\geqq 0)$ とおくと

$$g'(x)=2x,\quad g''(x)=2$$

であるから，$g(x)$ の $x=\sqrt{p}$ における曲率半径は

$$\frac{(1+\{g'(\sqrt{p})^2\})^{\frac{3}{2}}}{|g''(\sqrt{p})|}=\frac{\{1+(2\sqrt{p})^2\}^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{1}{2}(1+4p)^{\frac{3}{2}}\qquad\cdots(**)$$

一般に，$g(x)=f^{-1}(x)$ のとき，$f(g(x))=x$ であるから

$$f'(g(x))g'(x)=1,\quad f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=0$$

上の 2 式から $\qquad f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)},\qquad f''(g(x))=-\dfrac{g''(x)}{\{g'(x)\}^3}$

これらを $(*)$ に適用すると，$x=\sqrt{p}$ における $g(x)$ の曲率半径 $(**)$ を得る．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，b，c の最大公約数を G とする．

(i) $G=2$ のとき，a，b，c は $\{2,\ 4,\ 6\}$ からなり，4 だけの場合と 6 だけの場合を除くので，その場合の総数は

$$3^3-2=25 \quad (\text{通り})$$

このとき，d の出方は $\{2,\ 4,\ 6\}$ の 3 通りであるから，その確率は

$$\frac{25}{6^3}\times\frac{3}{6}=\frac{75}{6^4}$$

(ii) $G=3$ のとき，a，b，c は $\{3,\ 6\}$ からなり，6 だけの場合を除くので，その場合の数は

$$2^3-1=7 \quad (\text{通り})$$

このとき，d の出方は $\{3,\ 6\}$ の 2 通りであるから，その確率は

$$\frac{7}{6^3}\times\frac{2}{6}=\frac{14}{6^4}$$

(iii) $G=k$ $(k=4,5,6)$ のとき，a，b，c は $\{k\}$ だけからなるので，その場合の数は 1 通りである．このとき，d の出方は $\{k\}$ の 1 通りであるから，その確率は

$$\frac{1}{6^3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6^4}$$

(iv) $G=1$ のとき，その場合の数は，(i)〜(iii) から

$$6^3-(25+7+1\times3)=181 \quad (\text{通り})$$

このとき，d の出方は $\{1,2,3,4,5,6\}$ の 6 通りであるから，その確率は

$$\frac{181}{6^3}\times\frac{6}{6}=\frac{1086}{6^4}$$

(i)〜(iv) から，求める確率は

$$\frac{75}{6^4}+\frac{14}{6^4}+\frac{1}{6^4}\times3+\frac{1086}{6^4}=\frac{1178}{6^4}=\mathbf{\frac{589}{648}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 H は 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，C$(0,\ 0,-2)$ を $1:3$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}=(0,\ 0,\ 1)\quad \text{よって}\quad \mathbf{E(0,\ 0,\ 1)}$$

点 F は 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，D$(0,-2,\ 0)$ を $1:3$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{4}=\left(0,-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{F}\left(\mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$$

点 G は 2 点 B$(2,\ 0,\ 0)$，C$(0,0,-2)$ を通る直線上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2-2s,\ 0,-2s)\quad (s\ \text{は実数})$$

また，点 G は，平面 $x=\dfrac{3}{2}$ 上にあるから

$$2-2s=\frac{3}{2}\quad \text{ゆえに}\quad s=\frac{1}{4}\quad \text{よって}\quad \mathbf{G}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{2}(0,-1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\dfrac{3}{2}(1,\ 0,-1)\quad \cdots(*)$

ベクトル $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ は平面 EFG の法線ベクトルであるから

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EH}}=0\quad \cdots ①$$

また，点 H は 2 点 B$(2,\ 0,\ 0)$，D$(0,-2,\ 0)$ を通る直線上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad (t\ \text{は実数})\\&=(2-2t,-2t,\ 0)\quad \cdots ②\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(2-2t,-2t,\ 0)-(0,\ 0,\ 1)\\&=(2-2t,-2t,-1)\quad \cdots ③\end{aligned}$$

③ を ① に代入すると

$$(1,\ 1,\ 1)\cdot(2-2t,-2t,-1)=0\quad \text{すなわち}\quad t=\frac{1}{4}$$

これを ② に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\ 0\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}, -2\right) = \dfrac{1}{2}(3,\ 1, -4)$, $\overrightarrow{\mathrm{FH}} = \left(\dfrac{3}{2},\ 0, -\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}(1,\ 0, -1)$

ここで，$\vec{a} = (3,\ 1, -4)$，$\vec{b} = (1,\ 0, -1)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{FH}} = \frac{3}{2}\vec{b}$$

このとき，$|\vec{a}|^2 = 26$, $|\vec{b}|^2 = 2$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{FGH} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{FH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{FG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \frac{3}{8}\sqrt{26\cdot 2 - 7^2} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$

解説 2つのベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に垂直なベクトルの1つは, 次のベクトル積 (外積) の計算をを用いることで求めることもできる[2]. $\vec{u} = (0, -1,\ 1)$，$\vec{v} = (1,\ 0, -1)$ とおくと

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1,\ 1,\ 1)$$

また，$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}$ は，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の張る平行四辺形の面積を表す.

一般に，次式が成り立つ.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

ただし高校数学の範囲外であるから，ベクトル積の演算記号を使用せず，答案を作成しなければならない.

例えば，(1) の $(*)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \dfrac{3}{2}\vec{v}$ であるから

$$\triangle\mathrm{EFG} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{EF}} \times \overrightarrow{\mathrm{EG}}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

として計算したとしても，答案には次のように書くとよい.

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{EFG} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf $\boxed{4}$ (ベクトル積) を参照

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-k}\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}-1}\{1-(1-k)x\}' \\ &= \frac{1}{1-k}\{1-(1-k)x\}^{\frac{k}{1-k}}(k-1) \\ &= \boldsymbol{-\{1-(1-k)x\}^{\frac{k}{1-k}}} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

(2) (1) の結果をさらに微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{k}{1-k}\{1-(1-k)x\}^{\frac{k}{1-k}-1}\{1-(1-k)x\}' \\ &= \frac{k}{k-1}\{1-(1-k)x\}^{\frac{2k-1}{1-k}}(k-1) \\ &= k\{1-(1-k)x\}^{\frac{2k-1}{1-k}} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

(i) $k=0$ のとき　$f(x)=1-x$

(ii) $0<k<1$ のとき，①，② より，$0<x<\dfrac{1}{1-k}$ において

$f'(x)<0,\quad f''(x)>0$　ゆえに　$y=f(x)$ は単調減少で下に凸

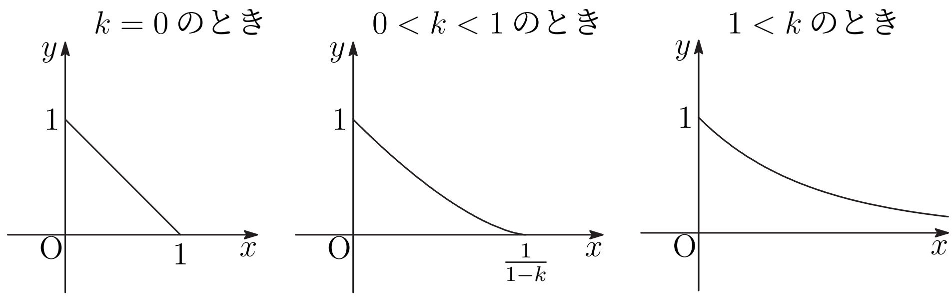
また　$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{1-k}\right)=0$

(iii) $1<k$ のとき，①，② より，$x>0$ において

$f'(x)<0,\quad f''(x)>0$　ゆえに　$y=f(x)$ は単調減少で下に凸

また　$f(0)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

(i)〜(iii) から，k の値により，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



(3) $x>0$ のとき，$h=(k-1)x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{k\to1+0}h=0$ であるから

$$\lim_{k\to1+0}\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{x}{h}}=\lim_{h\to0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-x}=e^{-x}$$

$x=0$ のとき　　$\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}=1$

よって，$x\geqq0$ のとき　$\displaystyle\lim_{k\to1+0}\{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}=\boldsymbol{e^{-x}}$

補足 n を自然数とするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (e\text{ はネイピア数})$$

について述べる．

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ の相加・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+1}\left\{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} > \sqrt[n+1]{1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

両辺を $n+1$ 乗すると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加列である．

また，1 と $n+1$ 個の $\dfrac{n}{n+1}$ の相加・相乗平均の関係により

$$\frac{1}{n+2}\left\{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}\right\} > \sqrt[n+2]{1\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

両辺を $n+2$ 乗すると

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

上式の逆数をとると

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は単調減少列である．したがって

$$2=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1=4$$

また，$b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ であるから

$$0<b_n-a_n=\frac{a_n}{n}<\frac{4}{n}$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=e$

前ページの 2 つの数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の極限は，離散型の極限である．
次にこの連続型の極限を考える．

まず，$a, b, p, q > 0$ $(p+q=1)$ のとき，次式が成り立つ (等号は $a=b$ のとき)[3].

$$pa + qb \geqq a^p b^q \quad \cdots (*)$$

$x > 0$，$h > 0$ とする．2 つの関数を

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

とおき，$(*)$ に $a = 1$，$b = 1 + \dfrac{1}{x}$，$p = \dfrac{h}{x+h}$，$q = \dfrac{x}{x+h}$ を代入すると

$$\frac{h}{x+h} \cdot 1 + \frac{x}{x+h}\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1^{\frac{h}{x+h}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x+h}}$$

$$1 + \frac{1}{x+h} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x+h}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x+h}\right)^{x+h} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$f(x+h) > f(x)$$

また，$(*)$ に $a = 1$，$b = \dfrac{x}{x+1}$，$p = \dfrac{h}{x+h+1}$，$q = \dfrac{x+1}{x+h+1}$ を代入すると

$$\frac{h}{x+h+1} \cdot 1 + \frac{x+1}{x+h+1}\left(\frac{x}{x+1}\right) > 1^{\frac{h}{x+h+1}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+h+1}}$$

$$\frac{x+h}{x+h+1} > \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+h+1}}$$

$$1 + \frac{1}{x+h} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x+h+1}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x+h}\right)^{x+h+1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$g(x+h) < g(x)$$

したがって，$f(x)$ は単調増加，$g(x)$ は単調減少．$g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) f(x)$ より

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = e \quad \text{ゆえに} \quad f(x) < e < g(x)$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(-x-1) = e$ および $f(x) = g(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(-x-1) = e \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $n \geqq 2$ のとき　$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = (a_n + a_{n-1}) + a_n$

$$= 2a_n + a_{n-1} > 2a_n$$

(2) まず，次を示す．

(A)「自然数 $m \geqq 2$ は，$\{a_n\}$ の相異なる数列の項の和で表される」

i) $m = 2$ のとき，$a_1 = 1$，$a_2 = 1$ より，$2 = a_1 + a_2$ (または $2 = a_3$)
よって，(A) は成立する．

ii) $2 \leqq m \leqq k$ のとき，(A) が成立すると仮定する．

$k + 1 = a_i$ のとき，(A) は成立する．

$a_i < k + 1 < a_{i+1}$ のとき　$0 < k + 1 - a_i < a_{i+1} - a_i = a_{i-1}$

$a = k + 1 - a_i$ とおくと　$a < a_{i-1}$

このとき，$k + 1 = a_i + a$ $(a < a_{i-1})$ により，$a \leqq k$ であるから，
a は，a_{i-2} 以下の相異なる項の和で表される．

よって，$m = k + 1$ のとき，(A) は成立する．

i), ii) より，自然数 $m \geqq 2$ について，(A) は成立する．

特に，数列の項の和が 1 項からなる $m = a_j$ の場合は，$a_j = a_{j-1} + a_{j-2}$ とすることにより，題意は示される．　**証終**

(3) (1) の結果から　n が奇数のとき　$a_n > 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 = 2^{\frac{n-1}{2}}$

n が偶数のとき　$a_n > 2^{\frac{n-2}{2}} a_2 = 2^{\frac{n-2}{2}}$

したがって，自然数 n について　$a_n > 2^{\frac{n-2}{2}}$

$a_k \leqq m < a_{k+1}$ とすると

$$\log_2 m \geqq \log_2 a_k > \log_2 2^{\frac{k-2}{2}} = \frac{k-2}{2}$$

よって　$k < 2\log_2 m + 2$

解説

補題 本題のフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ について，次が成り立つ．

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$

(2) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$

(3) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

証明 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+2} - a_{k+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_{2k} - a_{2k-2}) = 1 + (a_{2n} - 1) = a_{2n}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k-1}) = a_{2n+1} - a_1 = a_{2n+1} - 1$

本題は，次のゼッケンドルフの定理に因んだ出題である．

ゼッケンドルフ (Zeckendorf) の定理

任意の自然数 n は，連続するフィボナッチ数を含まず，相異なるフィボナッチ数の和として一意に表される．

導入 フィボナッチ数

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ \cdots$$

を用いて，例えば

$$2017 = 1597 + 377 + 34 + 8 + 1 \quad \cdots ①$$

とかけ，これらの 5 つのフィボナッチ数は連続していない．連続が許されるなら

$$\begin{aligned}
2017 &= 1597 + 233 + 144 + 34 + 8 + 1, \\
2017 &= 1597 + 233 + 89 + 55 + 21 + 13 + 8 + 1, \\
2017 &= 987 + 610 + 233 + 89 + 55 + 21 + 13 + 8 + 1, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

このように複数の表現あり，このことは本題の (A) で示している (存在)．ただし，連続していないものは ① に限る (一意性)．このような不連続フィボナッチ数の和による表現をゼッケンドルフ表現とよぶ．

なお，① を構成するには，まず，2017 以下の最大のフィボナッチ数 1597 をとり，420(= 2017 − 1597) 以下の最大のフィボナッチ数 377 とり，以下繰り返すとよい．

存在の証明

i) $n=1$ のとき，$1=a_1$ より，ゼッケンドルフ表現が可能である．

ii) $n \leqq k$ のとき，ゼッケンドルフ表現が可能であると仮定する．

$k+1$ がフィボナッチ数のとき，$k+1$ はゼッケンドルフ表現が可能である．

$k+1$ がフィボナッチ数でないとき

$$a_j < k+1 < a_{j+1} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < k+1-a_j < a_{j+1}-a_j = a_{j-1}$$

$a=k+1-a_j$ とおくと　　$k+1=a_j+a \ \ (a<a_{j-1})$

$a \leqq k$ であるから，a は a_{j-2} 以下のフィボナッチ数からなるゼッケンドルフ表現が可能である．よって，$k+1$ は，a_j およびこれを含めたゼッケンドルフ表現が可能である．

i)，ii) より，任意の自然数 n について成立する．**証終**

注意 補題 (2) で示した

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$$

により，この両辺がともに不連続なフィボナッチ数の和であるが，ゼッケンドルフ表現は，最大のフィボナッチ数を用いて表現するものであるから，右辺をゼッケンドルフ表現とする．これと (3) で示した

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$$

により，不連続なフィボナッチ数の最大項を a_k とすると，その和は a_{k+1} より小さい ($a_{k+1}-1$ 以下)．

一意性の証明

ある自然数 n について，異なる 2 つのゼッケンドルフ表現が可能であると仮定すると，異なる 2 つの集合 P，Q を用いて

$$n=\sum_{i\in P} a_i = \sum_{j\in Q} a_j$$

P および Q から $P\cap Q$ を除いた 2 つの集合 $P'=P\cap\overline{Q}$，$Q'=Q\cap\overline{P}$ について

$$\sum_{i\in P'} a_i = \sum_{j\in Q'} a_j \quad \cdots(*)$$

P'，Q' の要素の最大値をそれぞれ i'，j'，一般性を失うことなく，$i'<j'$ とすると

$$\sum_{i\in P'} a_i < a_{i'+1} \leqq a_{j'} \leqq \sum_{j\in Q'} a_j$$

上式から，$(*)$ が成立するのは，$P'=Q'=\phi$，すなわち，$P=Q$ となり矛盾．**証終**