平成28年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B

$\boxed{1}$ 等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるときの m，n の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

$\boxed{2}$ 箱の中に，白色の球が n 個，青色の球が n 個，赤色の球が n 個入っている．それぞれの色の球には1から n までの番号が重複なく書かれている．ただし $n=1$ のときは，それぞれ番号1が書かれた白球，青球，赤球が1個ずつ入っているとする．箱から球を1個取り出して箱に戻すことを3回行う．以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 3$ とする．取り出された球のうち少なくとも1個の番号が3であるとき，取り出された3個の球の番号の合計値が9である条件付確率を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ とする．取り出された球のうち少なくとも1個は1が書かれた赤玉であるとき，取り出された3個の球がすべて赤球である条件つき確率 $P(n)$ を n の式で表せ．

(3) $n \geqq 1$ とする．(2) で求めた $p(n)$ の最小値を求めよ．

(4) $n \geqq 1$ とする．(2) で求めた $p(n)$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p(n)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標空間内に点 $\mathrm{A}(-2,\ 3,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(2, -1,\ 0)$，点 $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 4)$ がある．また，ベクトル $\overrightarrow{m}=(-1,\ 1,\ 3)$ に平行で点 $\mathrm{D}(1,\ 2,\ 0)$ を通る直線 l，ベクトル $\vec{n}=(b,\ 1,\ c)$ に垂直で点 $\mathrm{E}(0,\ a,\ 0)$ を通る平面 π がある．平面 π は直線 l を含んでいる．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(2) a と b をそれぞれ c の式で表せ．

(3) 平面 π が線分 AC と線分 BC の両方と共有点をもち，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を2等分するときの c の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の実数 a，b に対して $A(a,\ b) = \dfrac{a+b}{2}$，$G(a,\ b) = \sqrt{ab}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\min(a,\ b) \geqq G(a,\ b) \leqq A(a,\ b) \leqq \max(a,\ b)$ が成り立つことを示せ．ただし，$\min(a,\ b)$ は a，b のうち最小の数を表し，$\max(a,\ b)$ は a，b のうちの最大の数を表す ($a = b$ の場合は a，b のうちのどちらかの数を表すとする)．

(2) $a > b$，$a_0 = a$，$b_0 = b$ として，以下の数列を定義する．

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値 (α とする) に収束することを示せ

(3) a_{n+2} を a_n と b_n を用いて表せ．ただし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は (2) で定義した数列とする．

(4) c_{n+2} と c_{n+1} の間に以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，$\{c_n\}$ と α はそれぞれ (2) で定義した数列と極限値とする．

$$c_{n+2} < \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} c_{n+1} \right)^2$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 媒介変数 $x = \sin t,\ y = t^2$ (ただし $-2\pi \leqq t \leqq 2\pi$) で表された曲線で囲まれた領域の面積を求めよ．なお領域が複数ある場合は，その総和を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $i-\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$，$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$(i-\sqrt{3})^m=2^m\left(\cos\frac{5m}{6}\pi+i\sin\frac{5m}{6}\pi\right)$$
$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

$(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ であるとき

$$m=\frac{n}{2},\quad \frac{5m}{6}\pi-\frac{n}{4}\pi=2k\pi\quad(k\text{ は整数})$$

したがって　$m=6k,\ \ n=12k$

m が最小の自然数となるとき　$k=1$　よって　$\boldsymbol{m=6,\ \ n=12}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 少なくとも1個の番号が3である事象を A，取り出された3個の番号の合計値が9である事象を B とする．

番号3を取り出さない確率は　$\left(\frac{3n-3}{3n}\right)^3$

したがって　$P(A)=1-\left(\frac{3n-3}{3n}\right)^3=\frac{3n^2-3n+1}{n^3}$

(i) $n=3$ のとき　$A\cap B$ の組合せは　$\{3,\ 3,\ 3\}$

したがって　$P(A\cap B)=\left(\frac{3}{3n}\right)^3=\frac{1}{n^3}$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{n^3}\div\frac{3n^2-3n+1}{n^3}=\frac{1}{3n^2-3n+1}=\boldsymbol{\frac{1}{19}}$$

(ii) $n=4$ のとき　$A\cap B$ の組合せは　$\{3,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$

したがって　$P(A\cap B)=\left(\frac{3}{3n}\right)^3+3!\left(\frac{3}{3n}\right)^3=\frac{7}{n^3}$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{7}{n^3}\div\frac{3n^2-3n+1}{n^3}=\frac{7}{3n^2-3n+1}=\boldsymbol{\frac{7}{37}}$$

(iii) $n\geqq 5$ のとき　$A\cap B$ の組合せは　$\{3,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 5\}$

したがって　$P(A\cap B)=\left(\frac{3}{3n}\right)^3+2\times 3!\left(\frac{3}{3n}\right)^3=\frac{13}{n^3}$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{13}{n^3}\div\frac{3n^2-3n+1}{n^3}=\boldsymbol{\frac{13}{3n^2-3n+1}}$$

(2) 少なくとも 1 個は 1 が書かれた赤玉である事象を C，取り出された 3 個の球がすべて赤玉である事象を D とする．

1 が書かれた赤玉が取り出されない確率は $\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^3$

1 が書かれた赤玉以外の赤玉が取り出される確率は $\left(\dfrac{n-1}{3n}\right)^3$

したがって $P(C) = 1 - \left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^3 = \dfrac{27n^2-9n+1}{27n^3}$

$$P(C \cap D) = \left(\frac{n}{3n}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{3n}\right)^3 = \frac{3n^2-3n+1}{27n^3}$$

よって $p(n) = P_C(D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)}$

$$= \frac{3n^2-3n+1}{27n^3} \div \frac{27n^2-9n+1}{27n^3} = \boldsymbol{\frac{3n^2-3n+1}{27n^2-9n+1}}$$

(3) (2) の結果から $\dfrac{1}{p(n)} = \dfrac{27n^2-9n+1}{3n^2-3n+1} = 9 + \dfrac{18n+1}{3n^2-3n+1}$

上式から $\dfrac{1}{p(n+1)} = 9 + \dfrac{18n+19}{3n^2+3n+1}$

ここで，$a_n = 3n^2-3n+1$，$b_n = 18n+1$ とおくと ($a_n > 0$，$b_n > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(n)} - \frac{1}{p(n+1)} &= \frac{18n+1}{3n^2-3n+1} - \frac{18n+19}{3n^2+3n+1} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_n+18}{a_n+6n} \\ &= \frac{b_n(a_n+6n) - a_n(b_n+18)}{a_n(a_n+6n)} = \frac{6(nb_n - 3a_n)}{a_n(a_n+6n)} \\ &= \frac{6\{n(18n+1) - 3(3n^2-3n+1)\}}{a_n(a_n+6n)} \\ &= \frac{6(9n^2+10n-3)}{a_n(a_n+6n)} > 0\end{aligned}$$

したがって $\dfrac{1}{p(n)} > \dfrac{1}{p(n+1)}$ すなわち $p(n) < p(n+1)$

よって，最小値は $p(1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{19}}$

(4) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-3n+1}{27n^2-9n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{27 - \dfrac{9}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{A}(-2,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(2, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(2,\ 3,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (-4,\ 0, -4),\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, -4, -4)$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{32\cdot 32 - 16^2} = \boldsymbol{8\sqrt{3}}$

(2) $\vec{n} = (b,\ 1,\ c)$ は平面 π に垂直で，$\overrightarrow{m} = (-1,\ 1,\ 3)$ は π に平行であるから

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{m} \qquad \text{ゆえに}\quad -b+1+3c = 0 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{D}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ a,\ 0)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (-1,\ a-2,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は平面 π 上のベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\vec{n} \qquad \text{ゆえに}\quad -b+a-2 = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から　$\boldsymbol{a = 3c+3,\ b = 3c+1}$

(3) 平面 π は，点 $\mathrm{E}(0,\ a,\ 0)$ を通り，$\vec{n} = (b,\ 1,\ c)$ に垂直であるから

$$bx + y - a + cz = 0$$

(2) の結果から　$\pi : (3c+1)x + y + cz - 3c - 3 = 0$

平面 π と線分 AC および線分 BC の共有点をそれぞれ A'，B' とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}'} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ 3,\ 4) + s(-4,\ 0, -4)\\ &= (2-4s,\ 3,\ 4-4s) \qquad (0 \leqq s \leqq 1)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}'} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (2,\ 3,\ 4) + t(0, -4, -4)\\ &= (2,\ 3-4t,\ 4-4t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)\end{aligned}$$

A'，B' は π 上の点であるから

$$\begin{aligned}&(3c+1)(2-4s) + 3 + c(4-4s) - 3c - 3 = 0,\\ &(3c+1)\cdot 2 + 3 - 4t + c(4-4t) - 3c - 3 = 0\end{aligned}$$

ゆえに　$s = \dfrac{7c+2}{4(4c+1)},\quad t = \dfrac{7c+2}{4(c+1)} \quad \left(c \neq -\dfrac{1}{4}, -1\right)$

$\triangle\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ のとき，$st = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{7c+2}{4(4c+1)}\cdot\frac{7c+2}{4(c+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに}\quad 17c^2 - 12c - 4 = 0$$

したがって　$c = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{26}}{17},\quad s = \dfrac{6 \mp \sqrt{26}}{2},\quad t = \dfrac{6 \pm \sqrt{26}}{10}$　(複号同順)

これらは，s，t の条件に反するので，**$\boldsymbol{c}$ の値は存在しない．**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a \geqq b > 0$ とすると，$\min(a,\ b) = b$，$\max(a,\ b) = a$ であるから

$$G(a,\ b) - \min(a,\ b) = \sqrt{ab} - b = \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geqq 0$$

$$A(a,\ b) - G(a,\ b) = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$$

$$\max(a,\ b) - A(a,\ b) = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \geqq 0$$

よって　$\min(a,\ b) \leqq G(a,\ b) \leqq A(a,\ b) \leqq \max(a,\ b) \quad \cdots (*)$

また，$b \geqq a > 0$ のときも，a と b の交代性により $(*)$ は成立する．

(2) $c_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} \quad \cdots$①

$$c_{n+2} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \quad \cdots ②$$

上の 2 式から　$\dfrac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \dfrac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2(a_n - b_n)} = \dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})} < \dfrac{1}{2}$

したがって　$c_{n+2} < \dfrac{1}{2} c_{n+1}$

ゆえに　$0 < c_{n+1} < c_1 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{a-b}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_{n+1} = 0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

(3) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}$

(4) $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = c_n > 0$

$\{a_n\}$ は単調減少列であるから，①，② および (2)，(3) の結果により

$$\frac{c_{n+2}}{{c_{n+1}}^2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{(a_n - b_n)^2} = \frac{1}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{4a_{n+2}} < \frac{1}{4\alpha}$$

よって　$c_{n+2} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}} c_{n+1}\right)^2$

補足 $c_n>0$ より，$a_n>b_n$ であるから

$$b_{n+1}-b_n=\sqrt{a_nb_n}-b_n=\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})>0$$

ゆえに，$\{b_n\}$ は単調増加列．また，$\sqrt{a_nb_n}<\dfrac{a_n+b_n}{2}$ であるから

$$b<b_1<b_2<\cdots<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n<\cdots<a_2<a_1<a$$

このとき，$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，$\{a_n\}$ は収束し，その極限値を α とする．また，$\{b_n\}$ は上に有界な単調増加列であるから，$\{b_n\}$ は収束し，その極限値を β とする．このとき，漸化式により

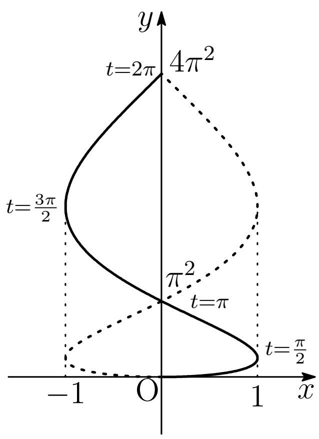
$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \beta=\sqrt{\alpha\beta}\quad \text{よって}\quad \alpha=\beta$$

この極限値を2数 a，b の算術幾何平均 $M(a,b)$ といい，次が知られている．

$$M(a,b)=\frac{\pi}{2}\Bigg/\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2点 $(\sin t,\ t^2)$，$(\sin(-t),\ (-t)^2)$ は y 軸に関して対称であるから，媒介変数曲線

$$(x,\ y)=(\sin t,\ t^2)\ (-2\pi\leqq t\leqq 2\pi)$$



で囲まれた領域の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{2\pi}|x|\frac{dy}{dt}dt=\int_0^{2\pi}|\sin t|\cdot 2t\,dt\\&=2\int_0^{\pi}t\sin t\,dt-2\int_{\pi}^{2\pi}t\sin t\,dt\\&=\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_0^{\pi}-\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_{\pi}^{2\pi}\\&=8\pi\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S=16\pi}$