平成27年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B

1 座標空間における直方体ABCD-EFGHにおいて，点A，B，C，Dの座標をそれぞれ(0, 0, 2)，(2, 0, 2)，(2, 4, 2)，(0, 4, 2)，点E，F，G，Hの座標をそれぞれ(0, 0, 0)，(2, 0, 0)，(2, 4, 0)，(0, 4, 0)，とする．また，線分ADを$s:(1-s)$に内分する点をI，線分FGを$t:(1-t)$に内分する点をJとする．ただし，$0<s<1$，$0<t<1$である．このとき，以下のの問いに答えよ．

(1) 線分AJと平面BEIの交点をPとし，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$をそれぞれ$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$としたとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$s$，$t$で表せ．

(2) 平面BEIに対して垂直なベクトルを求めよ．ただし，そのx成分は1とする．

(3) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$が平面BEIに対して垂直となるとき，$s$を$t$で表せ．

2 チームAとBが複数回試合を行って優勝チームを決めるものとする．ただし，いずれの試合においても，引き分けはないものとし，チームAが勝つ確率はq $(0<q<1)$であり，各試合の勝敗は互いに独立に決まるとする．このとき，次の2種類のルールを考える．

ルール1: 最大3回試合を行い，先に2勝したチームを優勝とする．

ルール2: どちらか一方が2連勝するまで試合を繰り返し，2連勝したチームを優勝とする．

以下の問いに答えよ．

(1) ルール1を採用した場合に，チームAが優勝する確率$P_1(q)$をqで表せ．

(2) ルール2を採用した場合に，チームAが優勝する確率$P_2(q)$をqで表せ．

(3) $P_1(q) \geqq P_2(q)$となる条件を求めよ．

3 x，yを0以上1以下の実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，a，b，c，dが実数のとき，$\max(a,\ b)$はa，bのうち最大の数を表し，$\max(a,\ b,\ c,\ d)$はa，b，c，dのうちの最大の数を表す．

(1) $\max(xy,\ 1-xy)$の最小値を求めよ．

(2) $\max(xy,\ 1-xy,\ x,\ y)$の最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ 数列 $\{x_n\}$ の第 n 項を $x_n = r^{n-1}$ で定める．このとき，正の実数 x に対して定義された関数 $f(x) = x^{-\alpha}$ を用いて，2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，それぞれ $a_n = f(x_n)(x_{n+1} - x_n)$ と $b_n = f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)$ で定める．ただし，α は正の定数，r は 1 より大きい実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) α の値に応じて級数 $a(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散を調べ，収束するときは和を求めよ．

(2) α の値に応じて級数 $b(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束，発散を調べ，収束するときは和を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{r\to 1+0} a(r)$ と $\displaystyle\lim_{r\to 1+0} b(r)$ のそれぞれについて，極限が有限な値である場合，その値を求めよ．

$\boxed{5}$ 座標平面上の直線 $\ell : y = -1$ と F(0, 2) を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ 上を動く点を D とする．点 P を，線分 DP と線分 FP の長さが等しく，かつ DP が y 軸と平行となるように定める．このとき，点 P の軌跡 C を求めよ．

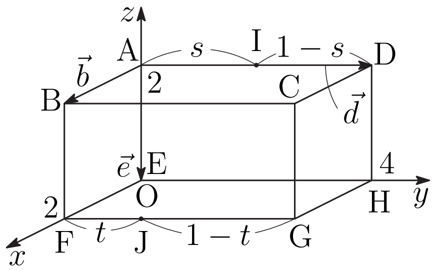
(2) a を実数とする．点 F を通り，傾きが a の直線 $m : y = ax + 2$ を考える．直線 m と軌跡 C の交点が 2 つあることを示し，それぞれの座標を求めよ．ただし，2 つの交点を A，B とし，点 A の x 座標が点 B の x 座標より小さいとする．

(3) 点 A，B における軌跡 C の接線をそれぞれ ℓ_A，ℓ_B とする．接線 ℓ_A，ℓ_B は互いに垂直であることを示せ．

(4) 接線 ℓ_A，ℓ_B の交点を通り，y 軸に平行な直線を n とする．直線 n は線分 AB と，点 A，B とは異なる点で交わることを示せ．また，軌跡 C，直線 m，直線 n によって囲まれる図形のうち，直線 n の左側にある部分の面積を S_{A} とし，右側にある部分の面積を S_{B} とする．このとき，S_{A} と S_{B} の比を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\vec{b}+t\vec{d}+\vec{e}$



$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $s\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AI}}$, $\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\frac{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{s}\\&=\frac{2s+t}{s}\cdot\frac{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2s+t}\end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2s+t}=\frac{s\vec{b}+t\cdot s\vec{d}+s\vec{e}}{2s+t}\\&=\boldsymbol{\frac{s}{2s+t}(\vec{b}+t\vec{d}+\vec{e})}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EB}}=(2,\ 0,\ 2)=2(1,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{EI}}=(0,\ 4s,\ 2)=2(0,\ 2s,\ 1)$
求めるベクトルを $\vec{n}=(1,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{EV}}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\cdot\vec{n}$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{EV}}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$1+z=0,\quad 2sy+z=0\quad ゆえに\quad z=-1,\quad y=\frac{1}{2s}$$

よって　$$\vec{n}=\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{2s},-1\right)}$$

(3) (1) の図から　$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=(2,\ 4t,-2)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が平面 BEI に対して垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}/\!/\vec{n}$ であるから，
x 成分に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=2\vec{n}\quad すなわち\quad (2,\ 4t,-2)=\left(2,\ \frac{1}{s},\ -2\right)$$

したがって　$4t=\dfrac{1}{s}$　　よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{1}{4t}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) チーム A が優勝するのは，チーム A が次の勝敗のときである．

$$(\text{勝}, \text{勝}),\ (\text{勝}, \text{負}, \text{勝}),\ (\text{負}, \text{勝}, \text{勝})$$

したがって，求める確率 $P_1(q)$ は

$$\begin{aligned} P_1(q) &= qq + q(1-q)q + (1-q)qq \\ &= \boldsymbol{q^2(3-2q)} \end{aligned}$$

(2) チーム B が勝つ確率を r とおくと $(r = 1-q)$，求める確率 $P_2(q)$ は，$0 < qr < 1$ に注意して

$$\begin{aligned} P_2(q) &= (1 + qr + qrqr + \cdots)qq + r(1 + qr + qrqr + \cdots)qq \\ &= (1+r)q^2(1 + qr + qrqr + \cdots) \\ &= (1+r)q^2 \times \frac{1}{1-qr} = \frac{\{1+(1-q)\}q^2}{1-q(1-q)} = \boldsymbol{\frac{(2-q)q^2}{1-q+q^2}} \end{aligned}$$

別解 勝負の途中，A が勝ったときに A が優勝する条件付き確率を a，B が勝ったときに A が優勝する条件付き確率を b とすると

$$a = q + (1-q)b,\quad b = qa \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{q}{1-q+q^2},\quad b = \frac{q^2}{1-q+q^2}$$

よって $\quad P_2(q) = qa + (1-q)b = \dfrac{(2-q)q^2}{1-q+q^2}$

(3) (1),(2) の結果から，$P_1(q) \geqq P_2(q)$ のとき

$$q^2(3-2q) \geqq \frac{(2-q)q^2}{1-q+q^2}$$

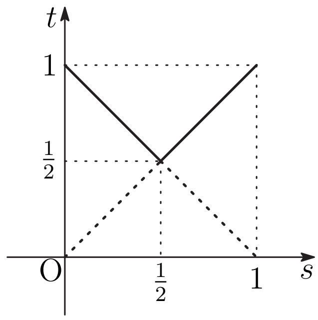
$0 < q < 1$，$1 - q + q^2 > 0$ より

$$(2-q)(1-q+q^2) \geqq 2-q \quad \text{ゆえに} \quad (q-1)^2(2q-1) \leqq 0$$

よって $\quad \boldsymbol{0 < q \leqq \dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ より，$s = xy$ とおくと

$$0 \leqq s \leqq 1$$



$t = \max(s,\ 1-s)$ のグラフは右のようになる．

よって，t は $s = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値をとる．

すなわち，$xy = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

別解 $\max(a,\ b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ であるから

$$\max(xy,\ 1-xy) = \frac{1+|2xy-1|}{2} \geqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq xy \leqq 1$ であるから，$xy = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

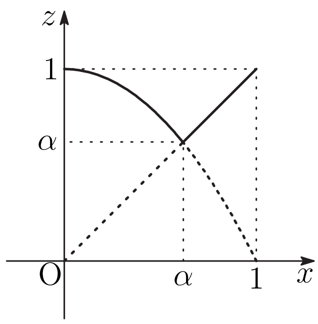
(2) x と y の対称性により，$0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ とし，$y = kx$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ とおくと

$$xy \leqq x, \quad 1-xy = 1-kx^2, \quad y \leqq x$$

したがって　　$\max(xy,\ 1-xy,\ x,\ y) = \max(1-kx^2,\ x)$

$1-kx^2 = x$ を $0 \leqq x \leqq 1$ に注意して解くと

$$x = \frac{\sqrt{1+4k}-1}{2k} = \frac{2}{\sqrt{1+4k}+1}$$



($k=0$ のときは，右上の値から $x=1$ を得る)
これを α とおくと，$z = \max(1-kx^2,\ x)$ のグラフは右のようになる．グラフから，求める最小値は α であり，α は $k=1$ のとき最小となる．

よって，$x = y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x_n = r^{n-1}$，$f(x) = x^{-\alpha}$ であるから

$$a_n = f(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(r^{n-1})(r^n - r^{n-1}) = (r^{n-1})^{-\alpha}(r-1)r^{n-1}$$
$$= (r-1)(r^{-\alpha}r)^{n-1} = (r-1)(r^{1-\alpha})^{n-1}$$

$r > 1$，$\alpha > 0$ であるから

$$0 < \alpha \leqq 1 \text{ のとき} \quad r^{1-\alpha} \geqq 1, \qquad \alpha > 1 \text{ のとき} \quad 0 < r^{1-\alpha} < 1$$

よって　$0 < \alpha \leqq 1$ のとき，$a(r)$ は発散する．
　　　$\alpha > 1$ のとき，$a(r)$ は収束し，

$$a(r) = (r-1) \times \frac{1}{1 - r^{1-\alpha}} = \boldsymbol{\frac{r-1}{1-r^{1-\alpha}}}$$

(2) (1) と同様にして

$$b_n = f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) = f(r^n)(r^n - r^{n-1}) = (r^n)^{-\alpha}(1 - r^{-1})r^n$$
$$= (1 - r^{-1})(r^{-\alpha}r)^n = (1 - r^{-1})(r^{1-\alpha})^n$$

$r > 1$，$\alpha > 0$ であるから

$$0 < \alpha \leqq 1 \text{ のとき} \quad r^{1-\alpha} \geqq 1, \qquad \alpha > 1 \text{ のとき} \quad 0 < r^{1-\alpha} < 1$$

よって　$0 < \alpha \leqq 1$ のとき，$b(r)$ は発散する．
　　　$\alpha > 1$ のとき，$b(r)$ は収束し，

$$b(r) = (1 - r^{-1}) \times \frac{r^{1-\alpha}}{1 - r^{1-\alpha}} = \boldsymbol{\frac{(r-1)r^{-\alpha}}{1-r^{1-\alpha}}}$$

(3) $g(r) = r^{1-\alpha}$ とおくと，$g'(r) = (1-\alpha)r^{-\alpha}$ より，$g'(1) = 1 - \alpha$ であるから

$$\lim_{r \to 1+0} \frac{g(r) - g(1)}{r - 1} = g'(1) \quad \text{すなわち} \quad \lim_{r \to 1+0} \frac{r^{1-\alpha} - 1}{r - 1} = 1 - \alpha$$

したがって，(1)，(2) の結果から

$$\lim_{r \to 1+0} a(r) = \lim_{r \to 1+0} \frac{r-1}{1 - r^{1-\alpha}} = \lim_{r \to 1+0} \frac{-1}{\dfrac{r^{1-\alpha} - 1}{r - 1}} = \frac{-1}{1-\alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$\lim_{r \to 1+0} b(r) = \lim_{r \to 1+0} \frac{(r-1)r^{-\alpha}}{1 - r^{1-\alpha}} = \lim_{r \to 1+0} \frac{-r^{-\alpha}}{\dfrac{r^{1-\alpha} - 1}{r - 1}} = \frac{-1}{1-\alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{DP}^2 = \mathrm{FP}^2$ であるから

$$(y+1)^2 = x^2 + (y-2)^2 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}}$$

(2) (1) で求めた方程式と $y = ax + 2$ から y を消去すると

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} = ax + 2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 6ax - 9 = 0 \quad \cdots ①$$

上の第 2 式から　$(x-3a)^2 = 9(a^2+1)$

したがって，x は異なる 2 つの実数解 $x = 3a \pm 3\sqrt{a^2+1}$ をもつ．

2 点 A，B の座標は，x 座標に注意して

$$\mathbf{A}\boldsymbol{(3a - 3\sqrt{a^2+1},\ 3a^2 + 2 - 3a\sqrt{a^2+1})},$$
$$\mathbf{B}\boldsymbol{(3a + 3\sqrt{a^2+1},\ 3a^2 + 2 + 3a\sqrt{a^2+1})}$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{2}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1}{3}x$

2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，① の解と係数の関係により

$$\alpha\beta = -9$$

したがって　$f'(\alpha)f'(\beta) = \dfrac{1}{9}\alpha\beta = -1$　よって　l_{A} と l_{B} は直交する．

(4) l_{A} の方程式は

$$y - \left(\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\alpha(x - \alpha) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{3}\alpha x - \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2}$$

同様にして，l_{B} の方程式は　$y = \dfrac{1}{3}\beta x - \dfrac{1}{6}\beta^2 + \dfrac{1}{2}$

l_{A} と l_{B} から y を消去すると

$$\frac{1}{3}\alpha x - \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\beta x - \frac{1}{6}\beta^2 + \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\alpha < \beta$ であるから　$\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

したがって，直線 n は，線分 AB と，点 A，B とは異なる点で交わる．

$ax+2-\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}(x-3a)^2+\frac{3}{2}(a^2+1)$,

$\beta-3a=3a-\alpha=3\sqrt{a^2+1}$ であるから

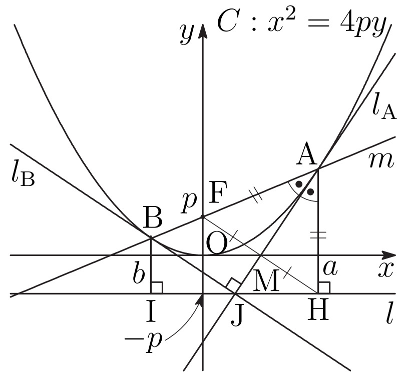
$$S_{\mathrm{A}}=\int_{\alpha}^{3a}\left\{-\frac{1}{6}(x-3a)^2+\frac{3}{2}(a^2+1)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{18}(x-3a)^3+\frac{3}{2}(a^2+1)(x-3a)\right]_{\alpha}^{3a}=3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$S_{\mathrm{B}}=\int_{3a}^{\beta}\left\{-\frac{1}{6}(x-3a)^2+\frac{3}{2}(a^2+1)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{18}(x-3a)^3+\frac{3}{2}(a^2+1)(x-3a)\right]_{3a}^{\beta}=3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

よって　　$\boldsymbol{S_{\mathrm{A}}:S_{\mathrm{B}}=1:1}$

解説 一般の放物線の焦点 F を通る直線について，(3) の結果が成立する．

放物線 $C: x^2=4px$ の焦点 F$(0,\ p)$ を通る直線 m と C との交点を A，B とし，その x 座標をそれぞれ a，b とすると，A における接線 l_{A} の方程式は

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)=2py$$



A から準線 $l: y=-p$ に垂線 AH を引くと，FH の中点 M$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ は l_{A} 上にあるから，l_{A} は $\angle$FAH の二等分線である．

同様に l_{B} は $\angle$FBI の二等分線である．$\angle\mathrm{FAH}=2\alpha$，$\angle\mathrm{FBI}=2\beta$ とおくと

$$2\alpha+2\beta=\pi \quad ゆえに \quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

よって　　$\angle\mathrm{AJB}=\pi-(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}$

$m: y=kx+p$ とおくと，C と m から y を消去すると

$$x^2=4p(kx+p) \quad ゆえに \quad x^2-4pkx-4p^2=0$$

この方程式の解が a，b であるから，解と係数の関係により　$ab=-4p^2$

また，直線 l_{B} の方程式は　$b\left(x-\frac{b}{2}\right)=2py$

l_{A} と l_{B} の交点 J の座標は

$$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{ab}{4p}\right) \quad すなわち \quad \left(\frac{a+b}{2}, -p\right)$$

よって，J は準線 l 上にあり，H と I の中点である．