平成26年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

1 行列 $A=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) a，b，c，dを実数とする．行列$T=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$が$AT=TB$かつ$ad-bc=1$を満たすとき，$b$，$c$，$d$をそれぞれ$a$を用いて表せ．

(2) xy平面内の点$\mathrm{P}_n(\alpha_n,\ \beta_n)$を$\begin{pmatrix}\alpha_n\\\beta_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_{n-1}\\\beta_{n-1}\end{pmatrix}$，$n=1,2,3,\cdots$で定める．ただし，$\alpha_0=1$，$\beta_0=0$とする．このとき$\alpha_n$および$\beta_n$を求めよ．また，点$\mathrm{P}_n$を通り，$y=x$で与えられる直線$l$と直交する直線$m$の方程式を求めよ．

(3) 直線lと直線mの交点をQ_nとし，P_nとQ_nの距離をd_nとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}d_n$を求めよ．

2 箱の中に，赤玉が5個，青玉が4個，白玉が3個入っている．それぞれの玉の大きさは同じで，1個あたりの重さは，赤玉が100g，青玉が45g，白玉が30gである．このとき以下の問いに答えよ．ただし，取り出した玉は重さを量ったあとで，箱の中にもどすものとする．

(1) 無作為に箱から玉を1個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが40g以上であるという条件のもとで，袋の中身が赤玉である確率を求めよ．

(2) 無作為に箱から玉を2個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが100g以上であるという条件のもとで，袋の中身が2個とも赤玉である確率を求めよ．

(3) 無作為に箱から玉を3個取り出して空の袋に入れ，重さを量ったとする．このとき袋の中身の重さが150g以上であるという条件のもとで，袋の中身が3個とも赤玉である確率を求めよ．

3 aを正の定数，関数$f(x)$，$g(x)$をそれぞれ$f(x)=xe^x$，$g(x)=ax$とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$と$y=g(x)$のグラフが$0<x<1$の範囲において交点を持つためのaの範囲を求めよ．

(2) $h(a)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$とおく．$h(a)$を最小にする$a$の値を求めよ．

$\boxed{4}$ xy 平面において半径 r の円を考える．この円の中心 O は，時刻 $t=0$ において点 $(0,\ r)$ にあり，一定の速さ ar (ただし $a>0$) で x 軸の正の方向に移動する．同時に，この円は中心 O のまわりを単位時間当たり 1 ラジアンの割合で時計まわりに連続的に回転する．時刻 $t=0$ において原点 $(0,\ 0)$ にあった円周上の定点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標 $(x(t),\ y(t))$ を a，r，t を用いて表せ．

(2) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき，以下の (i)，(ii) それぞれの場合について，点 P の軌跡 C の概形を図示し，$x(t)$，$y(t)$ の最大値と最小値，および C と x 軸との共有点の x 座標を求め，図の中に記入せよ．

(i) $a=1$

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ の場合について，C と x 軸によって囲まれる領域の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ すべての実数 x について，関数 $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ が微分可能であり，$f'(x)>0$ かつ $f''(x)>0$ が満たされるとする．また，$f(-2)<0$ かつ $f(2)>0$ であるとし，$f(x)=0$ の解を a とする．$f(x)$ を用いて，数列 $\{x_n\}$ を次のように定義する．

- $x_1=2$
- x_n $(n=2,3,4,\cdots)$ は，曲線 $y=f(x)$ の $x=x_{n-1}$ における接線と x 軸との交点の x 座標とする．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $x_n>a$ ならば以下の不等式が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ．

$$f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n-x_{n+1})}{x_n-a} < f'(x_n)$$

(2) $x_n>a$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であることを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\frac{x_{n+1}-a}{x_n-a} < 1-\frac{f'(a)}{f'(x_n)} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $AT=TB$ より

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5a+3c & 5b+3d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & \frac{1}{2}b \\ 2c & \frac{1}{2}d \end{pmatrix}$$

(1,1) 成分および $(2,1)$ 成分より　$\boldsymbol{c=a}$

(1,2) 成分および $(2,2)$ 成分より　$b=-d \quad \cdots$ ①

これらを $ad-bc=1$ に代入すると　$ad-(-d)a=1$

したがって　$\boldsymbol{d=\dfrac{1}{2a}}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{2a}}$

(2) $AT=TB$ より　$A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

(1) の結果から，$c=a\neq 0$，$d=-b\neq 0$ であるから

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}&=\frac{1}{2}A^n\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{2^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\alpha_n=2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}}$，$\boldsymbol{\beta_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}}$

$y=x$ に垂直で点 $\mathrm{P}_n(\alpha_n,\ \beta_n)$ を通る直線は，$\alpha_n+\beta_n=2^n$ より

$$y-\beta_n=-(x-\alpha_n) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x+2^n}$$

(3) 直線 $l : y = x$ と直線 $m : y = -x + 2^n$ の交点 Q_n は　$\mathrm{Q}_n(2^{n-1},\ 2^{n-1})$

これと (2) の結果から

$$d_n = \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} = \mathbf{0}$

解説 行列 $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ の特性方程式は　$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$

したがって，行列 A の固有値は　$\lambda = 2,\ \dfrac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は，それぞれ固有値 $2,\ \dfrac{1}{2}$ に対する固有ベクトルである．

A は対称行列であるから，これらの固有ベクトルは直交する[1]．

また　$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A^n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^{-n} \\ 2^n & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & -2^{-n} \\ 2^n & 2^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n & -2^{-n} \\ 2^n & 2^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 2^{-n} & 2^n - 2^{-n} \\ 2^n - 2^{-n} & 2^n + 2^{-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf $\boxed{7}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 玉を1個取り出したとき，袋の中身が40g以上であるという事象をA，袋の中身が赤玉であるという事象をBとすると

$$P(A)=\frac{5+4}{5+4+3}=\frac{9}{12},\quad P(A\cap B)=\frac{5}{5+4+3}=\frac{5}{12}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{12}\times\frac{12}{9}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

(2) 玉を2個取り出したとき，袋の中身が100g以上であるという事象をC，袋の中身が2個とも赤玉であるという事象をDとする．袋の中身が100g以上であるとき，少なくとも赤玉が1個含まれるから

$$P(C)=1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2-{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2},\quad P(C\cap D)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_C(D)&=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2-{}_7\mathrm{C}_2}\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2-{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10}{66-21}=\mathbf{\frac{2}{9}}\end{aligned}$$

(3) 玉を3個取り出したとき，袋の中身が150g以上であるという事象をE，袋の中身が3個とも赤玉であるという事象をFとする．袋の中身が150g以上であるとき，少なくとも赤玉が1個含まれるから

$$P(E)=1-\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_3-{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3},\quad P(E\cap F)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_E(F)&=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3-{}_7\mathrm{C}_3}\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3-{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{10}{220-35}=\mathbf{\frac{2}{37}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = xe^x$，$g(x) = ax$ より　　$f(x) - g(x) = x(e^x - a)$　$\cdots$①

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標を x_0 とすると $(0 < x_0 < 1)$

$$e^{x_0} - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = e^{x_0}$$

$0 < x_0 < 1$ であるから　　$\boldsymbol{1 < a < e}$

(2) ① より　$\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = (x-1)e^x - \frac{a}{2}x^2 + C$　(C は不定積分)

$a > 0$ に対して，$t = \log a$ とすると $(a = e^t)$，① より

$$f(x) - g(x) = x(e^x - e^t) \quad \cdots ②$$

ここで，$S(x) = (x-1)e^x - \dfrac{a}{2}x^2$ とおくと

$$S(0) = -1, \quad S(1) = -\frac{a}{2} = -\frac{e^t}{2}$$
$$S(t) = (t-1)e^t - \frac{a}{2}t^2 = (t-1)e^t - \frac{t^2e^t}{2} = \left(-1 + t - \frac{t^2}{2}\right)e^t$$

(i) $t \leqq 0$ のとき，② より $f(x) - g(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ であるから

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \Big[\ S(x)\ \Big]_0^1 = S(1) - S(0) = -\frac{e^t}{2} + 1 \end{aligned}$$

(ii) $0 < t < 1$ のとき，② に注意して

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \\ &= -\int_0^t \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_t^1 \{f(x) - g(x)\} \\ &= -\Big[\ S(x)\ \Big]_0^t + \Big[\ S(x)\ \Big]_t^1 = S(1) + S(0) - 2S(0) \\ &= -\frac{e^t}{2} - 1 - 2\left(-1 + t - \frac{t^2}{2}\right)e^t \\ &= \left(t^2 - 2t + \frac{3}{2}\right)e^t - 1 \end{aligned}$$

(iii) $1 \leqq t$ のとき，② より $f(x) - g(x) \leqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ であるから

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = -\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= -\Big[\ S(x)\ \Big]_0^1 = -S(1) + S(0) = \frac{e^t}{2} - 1 \end{aligned}$$

$k(t) = h(a)$ とおくと，(i)〜(iii) より

$$k(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^t}{2} + 1 & (t \leqq 0) \\ \left(t^2 - 2t + \dfrac{3}{2}\right)e^t - 1 & (0 < t < 1) \\ \dfrac{e^t}{2} - 1 & (1 \leqq t) \end{cases}$$

$k(t)$ は $t \leqq 0$ で単調減少，$1 \leqq t$ で単調増加である．

$0 < t < 1$ のとき　　$k'(t) = \left(t^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^t$

$$= \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^t$$

したがって，$k(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$k'(t)$		$-$	0	$+$	
$k(t)$		↘	極小	↗	

よって，$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{a = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ のとき最小値をとる．

別解　$e^t = a$ より

$$h(a) = \begin{cases} -\dfrac{a}{2} + 1 & (0 < a \leqq 1) \\ a\left\{(\log a)^2 - 2\log a + \dfrac{3}{2}\right\} - 1 & (1 < a < e) \\ \dfrac{a}{2} - 1 & (e \leqq a) \end{cases}$$

$h(a)$ は $0 < a \leqq 1$ で単調減少，$e \leqq a$ で単調増加である．

$1 < a < e$ のとき　　$h'(a) = (\log a)^2 - \dfrac{1}{2}$

したがって，$h(a)$ の増減表は

a	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		↘	極小	↗	

よって，$\boldsymbol{a = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ のとき最小値をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 原点を A(0, 0) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \begin{pmatrix} art \\ r \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(at - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = r(at - \sin t)} \\ \boldsymbol{y(t) = r(1 - \cos t)} \end{cases}$

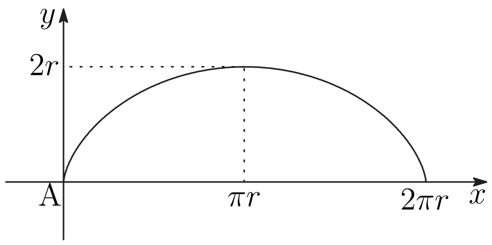
(2) (i) $a = 1$ のとき $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$

$x'(t) = r(1 - \cos t)$ であるから，$x(t)$ は単調増加

$x(t)$ は，最大値 $\boldsymbol{x(2\pi) = 2\pi r}$，最小値 $\boldsymbol{x(0) = 0}$

$y(t)$ は，最大値 $\boldsymbol{y(\pi) = 2r}$，最小値 $\boldsymbol{y(0) = y(2\pi) = 0}$

グラフの概形は，次のようになる．



(ii) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき $x(t) = r\left(\dfrac{t}{2} - \sin t\right)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$

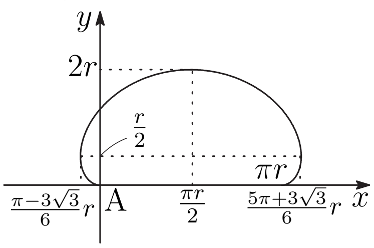
$x'(t) = r\left(\dfrac{1}{2} - \cos t\right)$ より，$x(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↘	極小	↗	極大	↘	πr

$x(t)$ は，最大値 $\boldsymbol{x\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) = \dfrac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}r}$，最小値 $\boldsymbol{x\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}r}$

$y(t)$ は，最大値 $\boldsymbol{y(\pi) = 2r}$，最小値 $\boldsymbol{y(0) = y(2\pi) = 0}$

グラフの概形は，次のようになる．



(3) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\cdot r\left(\frac{1}{2}-\cos t\right)dt \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{3}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\
&= r^2\Big[\,t-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\,\Big]_0^{2\pi} = \boldsymbol{2\pi r^2}
\end{aligned}
$$

解説 $\alpha = x(\frac{\pi}{3})$，$\beta = x(\frac{5}{3}\pi)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta y\,dx - \int_\alpha^0 y\,dx - \int_{\pi r}^\beta y\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{2\pi}^{\frac{5}{3}\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$ (1) 曲線 $y=f(x)$ の $x=x_n$ における接線の方程式は

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

この接線の x 軸との交点の x 座標が x_{n+1} であるから

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

すなわち
$$f(x_n)=f'(x_n)(x_n-x_{n+1}) \quad \cdots ①$$

区間 $[a,\ x_n]$ で $f(x)$ に平均値の定理を適用すると

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=f'(c) \quad (a<c<x_n)$$

$f''(x)>0$ より，$f'(x)$ は単調増加であるから　$f'(a)<f'(c)<f'(x_n)$

したがって
$$f'(a)<\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}<f'(x_n)$$

$f(x)=0$ の解が a であるから，$f(a)=0$．これと ① を上式に代入すると

$$f'(a)<\frac{f'(x_n)(x_n-x_{n+1})}{x_n-a}<f'(x_n)$$

(2) 不等式 $x_n > a$ を (A) とする．

［1］ $f'(x) > 0$ より，$f(x)$ は単調増加であるから，$f(a) = 0$，$f(2) > 0$ より

$$f(a) < f(2) \quad \text{ゆえに} \quad a < 2$$

$x_1 = 2$ であるから，$x_1 > a$ となり，$n = 1$ のとき (A) が成立する．

［2］ $n = k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$x_k > a$$

が成り立つと仮定する．

(1) の結果において $f'(x_k) > 0$ であること注意して

$$\frac{f'(x_k)(x_k - x_{k+1})}{x_k - a} < f'(x_k) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x_k - x_{k+1}}{x_k - a} < 1$$

このとき，$x_k - a > 0$ であるから

$$x_k - x_{k+1} < x_k - a \quad \text{すなわち} \quad x_{k+1} > a$$

したがって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

補足 ニュートン法をもとに出題されている[2]．

(3) (1) の結果において $f'(x_n) > 0$ であること注意して

$$f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f'(a)}{f'(x_n)} < \frac{x_n - a - (x_{n+1} - a)}{x_n - a}$$

よって $$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{8}$ を参照．

(4) (1) の結果から　　$f'(a) < \dfrac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a}$

$f'(x) > 0$，$x_n - a > 0$ であるから　$x_n - x_{n+1} > 0$　すなわち　$x_{n+1} < x_n$

$f'(x)$ は単調増加であるから，(2) の結果より，すべての自然数 n に対して

$$0 < f'(a) < f'(x_n) \quad ゆえに \quad 0 < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)} < 1$$

$x_n \leqq x_1$ であるから，$0 < f'(x_n) \leqq f'(x_1)$ より

$$0 < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)} \leqq 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_1)} < 1$$

ここで，$r = 1 - \dfrac{f'(a)}{f'(x_1)}$ とおくと $(0 < r < 1)$，上式と (2)，(3) から

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < r \quad ゆえに \quad 0 < x_{n+1} - a < r(x_n - a)$$

したがって　　　$0 < x_n - a < (x_1 - a)r^{n-1}$

$0 < r < 1$ より　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_1 - a)r^{n-1} = 0$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$　　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$