平成25年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
医学部医学科，工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ Oを原点とするxyz空間内の点A，B，Cの座標をそれぞれ$(0,\ 1,\ 0)$，$(0, -2,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点A，B，C，Dが正四面体の頂点となるとき，点Dの座標を求めよ．ただし，点Dのz座標は正とする．

(2) (1)で定めた点Dに対して，線分CDを$2:1$に内分する点をE，線分ADを$2:1$に内分する点をFとする．このとき，三角形OEFの面積を求めよ．

(3) (2)で定めた点E，Fに対して，点O，E，Fを通る平面が，点O，E，F以外で正四面体ABCDの辺と交わる点の座標を求めよ．

$\boxed{2}$ 原点を出発し，数直線上を動く点Pがある．このとき，次の試行Tを考える．

(試行T) Pは，1枚の硬貨を投げて表が出たら正の向きに1だけ移動し，裏が出たら負の向きに1だけ移動する．移動後に，Pが原点にあるとき，あるいは原点からの距離が3，6，9の位置にあるときには，白玉を1個もらう．

この試行Tを10回繰り返すとき，以下の問いに答えよ．

(1) 10回目の試行で初めて白玉をもらう確率を求めよ．

(2) 2回目の試行で初めて白玉をもらい，かつ，その後は白玉をもらわない確率を求めよ．

(3) もらう白玉の総数が1個である確率を求めよ．

(4) もらう白玉の総数が2個である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次式により定める．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての n に対して，xy 平面上の点 $(a_n,\ b_n)$ が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ 上にあることを証明せよ．

(2) r，s，t は正の実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする．

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき，r，s，t を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ α を $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める．

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & \left(\theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{のとき}\right) \\ \theta_n - \alpha & \left(\theta_n > \dfrac{\pi}{2} \text{のとき}\right) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める．

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin\theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) x_3 が最大となる α を求めよ．

(2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ が最大となる α と，その極限値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = e^{-x}|\sin x|$ $(x \geqq 0)$ を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

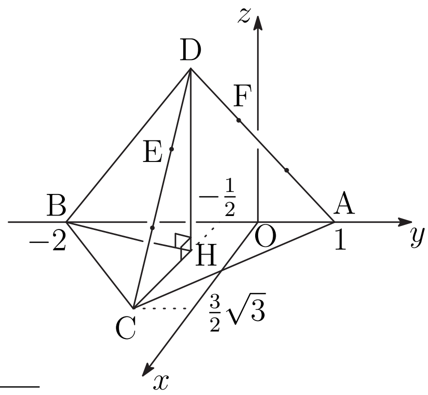
(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の範囲で y が最大となる曲線 C 上の点を P_n とする．このとき，点 P_n の座標を求めよ．

(2) 点 P_n から x 軸に下した垂線を $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$ とし，三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{H}_n$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

(3) 曲線 C と線分 OP_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A(0, 1, 0)，B(0, −2, 0) より，四面体の 1 辺の長さは 3 である．D から △ABC に垂線 DH を引くと，H は △ABC の重心であるから



$$\mathrm{H}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2},\ 0\right)$ であるから　$\mathrm{CH} = \sqrt{3}$

したがって　$\mathrm{DH} = \sqrt{3^2 - \mathrm{CH}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

D の z 座標は正であるから，これと H の座標から　$\boldsymbol{\mathrm{D}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)}$

(2) E，F はそれぞれ線分 CD，AD を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2},\ 0\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) \\
\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3} \\
&= \frac{1}{3}(0,\ 1,\ 0) + \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)
\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 = \frac{25}{12} + \frac{1}{4} + \frac{8}{3} = 5$，$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{8}{3} = 3$，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{5}{6} + 0 + \frac{8}{3} = \frac{7}{2}$$

よって，求める三角形 OEF の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 3 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{4}}$$

(3) 平面 OEF 上の点 P は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とおくと，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) + t\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{d}\right)\\ &= \frac{t}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}(s+t)\vec{d} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

P が平面 ABC 上にあるとき，$s+t=0$ より，$t=-s$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{3}(\vec{c} - \vec{a})$$

このとき，P は O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行な直線上にあるから，辺 BC 上に交点をもつ．$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{3}\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{s}{2}\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$

求める点は辺 AC を $2:1$ に内分する点であるから

$$\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}(0, -2,\ 0) + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2},\ 0\right) = (\sqrt{3}, -1,\ 0)$$

次に，$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{t}{6}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}(s+t)\vec{d}$$

P が平面 OBD 上にあるとき，$\frac{s}{3} = 0$ であるから，$s=0$ より

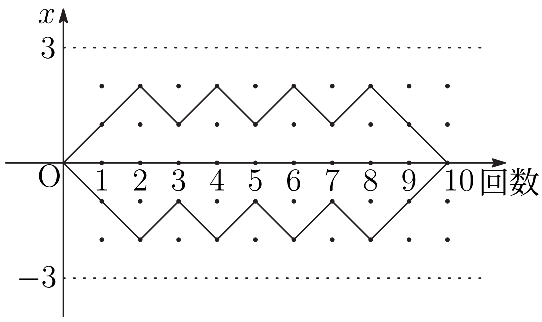
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{t}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{d} = \frac{t}{2}\cdot\frac{-\vec{b}+4\vec{d}}{3}$$

このとき，P は O と BD を $4:1$ に外分する点を通る直線上にあるから，辺 BD 上に交点をもたない．

よって，求める交点は　　$\boldsymbol{(\sqrt{3}, -1,\ 0)}$

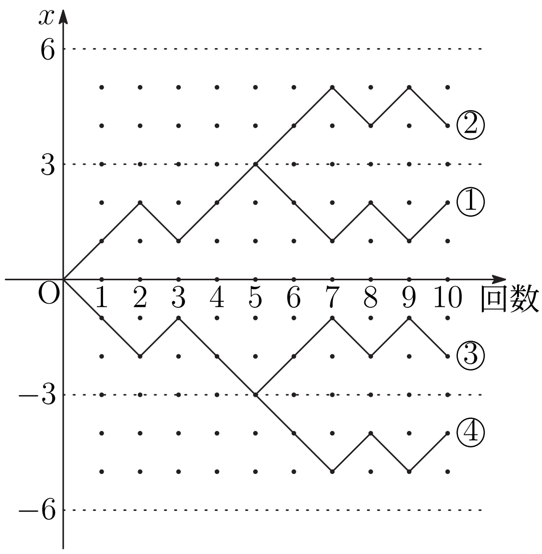
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 10 回目で初めて白玉をもらうとき，数直線上の点 P の x 座標を折れ線グラフで示すと，次の 2 本がある．よって，求める確率は

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathbf{\frac{1}{512}}$$



(2) k 回目で初めて白玉をもらうとき $(2 \leqq k \leqq 9)$，数直線上の点 P の x 座標の折れ線グラフは，それぞれ 4 本ある (右の図は，5 回目で初めて白玉をもらうときの折れ線グラフを示したものである)．
求める確率は，これと (1) の結果を加えて

$$(8 \times 4 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathbf{\frac{17}{512}}$$



補足 上の図の折れ線グラフについて，5 回目以降，① と ② は直線 $x = 3$ に関して対称である．また，③，④ はそれぞれ ①，② と直線 $x = 0$ に関して対称である．折れ線グラフの本数は 5 回目以前の 2 通りと 5 回目以降の 2 通りと考えると，2^2 本である．したがって，$0 \leqq x \leqq 3$ にある折れ線グラフ ① に注目すると考えやすい．

(3) i 回目と j 回目に白玉をもらうとすると $(2 \leqq i < j \leqq 9)$，$0 \leqq x \leqq 3$ にある折れ線グラフの本数は，i と j が連続する 2 数ではないことに注意して

$${}_8\mathrm{C}_2 - 7 = 21 \ \ (\text{本})$$

i 回目と 10 回目に白玉をもらうとすると $(2 \leqq i \leqq 8)$，$0 \leqq x \leqq 3$ にある折れ線グラフの本数は 7 本ある．折れ線グラフの対称性により，その総数は

$$21 \times 2^3 + 7 \times 2^2 = 196 \ \ (\text{本})$$

よって，求める確率は　$196 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathbf{\frac{49}{256}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+1}=3a_n+4a_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ であるから

$$\begin{aligned}{a_{n+1}}^2-2{b_{n+1}}^2&=(3a_n+4b_n)^2-2(2a_n+3b_n)^2\\&={a_n}^2-2{b_n}^2\end{aligned}$$

$a_1=2$，$b_1=0$ であるから，すべての自然数 n について

$$ {a_n}^2-2{b_n}^2={a_1}^2-2{b_1}^2=4$$

よって，点 $(a_n,\ b_n)$ は双曲線 $x^2-2y^2=4$ 上にある．

別解 $\begin{pmatrix} a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}{a_{n+1}}^2-2{b_{n+1}}^2&=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}={a_n}^2-2{b_n}^2\end{aligned}$$

(2) $B=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ とおくと，B の特性方程式は　$\lambda^2-6\lambda+1=0$

$\lambda=3\pm2\sqrt{2}$ より　$B-\lambda E=\begin{pmatrix} \mp2\sqrt{2} & 4\\ 2 & \mp2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

したがって，固有値 $\lambda=3\pm2\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの 1 つは

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\quad(\text{複合同順})$$

よって　　$\boldsymbol{r=\sqrt{2},\ \ s=3+2\sqrt{2},\ \ t=3-2\sqrt{2}}$

(3) $A^{-1}BA = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ の両辺を $n-1$ 乗すると

$$A^{-1}B^{n-1}A = \begin{pmatrix} s^{n-1} & 0 \\ 0 & t^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad B^{n-1}A = A\begin{pmatrix} s^{n-1} & 0 \\ 0 & t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$B^{n-1}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s^{n-1}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^{n-1}\begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix} = t^{n-1}\begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} B^{n-1}\begin{pmatrix} 2r \\ 0 \end{pmatrix} &= s^{n-1}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + t^{n-1}\begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix} \\ B^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= s^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ r^{-1} \end{pmatrix} + t^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -r^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= s^{n-1} + t^{n-1} \\ &= \boldsymbol{(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})^{n-1}} \\ b_n &= \frac{1}{r}(s^{n-1} - t^{n-1}) \\ &= \boldsymbol{\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，数列 $\{\theta_n\}$ は

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & \left(\theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{のとき}\right) \\ \theta_n - \alpha & \left(\theta_n > \dfrac{\pi}{2} \text{のとき}\right) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されているから

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha = \alpha \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = \theta_2 + \alpha = 2\alpha$$

さらに数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin\theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されているから

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \sin\theta_2 = \sin\alpha, \\ x_3 &= x_2 + \frac{1}{2}\sin\theta_3 = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}$$

$f(\alpha) = \sin\alpha + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha \ \left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \cos\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 \\ &= (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) \end{aligned}$$

$f(\alpha)$ の増減表は，次のようになる．

α	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，x_3 が最大となる α の値は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

(2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，数列 $\{\theta_n\}$ は

$$\theta_1 = 0,\quad \theta_2 = \frac{\pi}{4},\quad \theta_3 = \frac{\pi}{2},\quad \theta_4 = \frac{3}{4}\pi,\quad \theta_5 = \frac{\pi}{2},\quad \theta_6 = \frac{3}{4}\pi, \cdots$$

すなわち　$\theta_1 = 0,\quad \theta_2 = \dfrac{\pi}{4},\quad \theta_{2k+1} = \dfrac{\pi}{2},\quad \theta_{2k+2} = \dfrac{3}{4}\pi \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

定義により，$x_{n+1} - x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \sin\theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin\theta_{n+1} \\
&= \sin\theta_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin\theta_{2k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sin\theta_{2k+2}\right\} \\
&= \sin\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin\frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sin\frac{3}{4}\pi\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}(1+\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

(3) $\alpha=0$ のとき，$\theta_n=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=0$

$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，次式を満たす自然数 m が存在する $(m \geqq 2)$.

$$(m-1)\alpha \leqq \frac{\pi}{2} < m\alpha$$

(i) $m=2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} \quad \cdots ①$

$\{\theta_n\}$ は $\theta_1=0,\ \ \theta_2=\alpha,\ \ \theta_3=2\alpha,\ \ \theta_4=\alpha,\ \cdots$

すなわち $\theta_1=0,\ \theta_{2k}=\alpha,\ \theta_{2k+1}=2\alpha \quad (k=1,2,3,\cdots)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= x_1+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin\theta_{n+1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}\sin\theta_{2k}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin\theta_{2k+1}\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}\sin\alpha+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}\sin 2\alpha\right\}\\
&=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\sin 2\alpha\\
&=\frac{4}{3}\sin\alpha+\frac{2}{3}\sin 2\alpha=\frac{4}{3}f(\alpha)
\end{aligned}$$

(1) の結果から，① において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ は，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $\sqrt{3}$ をとる.

(ii) $m \geqq 3$ のとき $\dfrac{\pi}{2m}<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2(m-1)} \leqq \dfrac{\pi}{4}$

$\theta_1=0$，$\theta_2=\alpha$，$\theta_3=2\alpha$ であるから，$f(\alpha)$ の増減に注意して

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= x_1++\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin\theta_{n+1}\\
&=\sin\theta_2+\frac{1}{2}\sin\theta_3+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin\theta_{n+1}\\
&<\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=f(\alpha)+\frac{1}{2}\\
&\leqq f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}+1<\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(i),(ii) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ は，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\pi}{3}}$ で，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=e^{-x}\sin x$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi \cdots$ ① において $(n=1,2,3,\cdots)$，$f'(x)=0$ となる x は，ただ 1 つ存在し，これを x_n とすると

$$x_n=(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}=\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi$$

このとき，$f((n-1)\pi)=f(n\pi)=0$ であるから，$|f(x_n)|$ は ① における最大値である．よって，点 P_n の座標は

$$(x_n,\ |f(x_n)|)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\left(\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi,\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\right)}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}x_n|f(x_n)|=\frac{1}{2}\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\\&=\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\left(n-\frac{3}{4}\right)e^{-(n-1)\pi}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ne^{-(n-1)\pi}-\frac{3}{4}e^{(n-1)\pi}\right\}\\&=\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{(1-e^{-\pi})^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}(1+3e^{-\pi})}{8\sqrt{2}(1-e^{-\pi})^2}}\end{aligned}$$

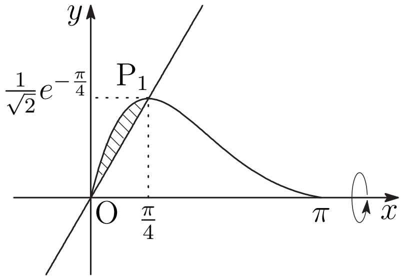
補足 等式

$$1+2x+3x^2+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)$$

を利用した $(x=e^{-\pi})$．この等式は，次式を微分することで得られる．

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

(3) (1) の結果から，求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させたものである．



その体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{-x}\sin x)^2\,dx - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \pi\left[\ \frac{1}{8}e^{-2x}(-2-\sin 2x+\cos 2x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{24}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{24}\{3-(9+\pi)e^{-\frac{\pi}{2}}\}}$$