平成24年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分
医学部医学科，工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

1 以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x - x \leqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x - x + ax^3 \geqq 0$ が成り立つような正の数 a を1つ定めよ．

(3) $0 < |x| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\left| \dfrac{\sin x}{x} - 1 \right| \leqq ax^2$ が成り立つことを示せ．ただし，a は(2)で定めた値とする．

(4) 曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = x$ および $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

2 Oを原点とする座標空間において，3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ a,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ が定める平面を α とする．a は正の定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 α 上の任意の点Pに対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を満たす実数 s，t が存在する．点Pの座標を a，s，t を用いて表せ．

(2) 原点Oから平面 α に垂線OHを下ろす．点Hの座標を a を用いて表せ．

(3) $a = 1$ とする．平面 α 上で点Aを中心とする半径1の円を考え，その円周上に点Qを $\angle\mathrm{QAB} = \theta$ となるように取る．ただし，$0 < \theta < \pi$ とし，点Qの z 座標は正とする．点Qの座標を θ を用いて表せ．

3 2個のサイコロを投げて，xy 平面上の点Pを移動させる次の試行を考える．

試行: 2個のサイコロを同時に投げて，大きい目の数を X，小さい目の数を Y とする．ただし，同じ目が出た場合は，X，Y の両者をその目とする．
このとき

X が3以上なら，点Pを x 軸の正の方向に1動かし，
Y が3以上なら，点Pをさらに y 軸の正の方向に1動かす．

この試行を繰り返して点Pを原点$(0,\ 0)$から順に動かしていくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1回目の試行終了時に点Pが$(1,\ 0)$に移動している確率を求めよ．

(2) 2回目の試行終了時に点Pが$(1,\ 1)$に移動している確率を求めよ．

(3) n 回目の試行終了時に点Pが$(n,\ n-1)$に移動している確率を求めよ．ただし，n は自然数である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する．

$$a_n = \int_c^1 nx^{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，c は $0 < c < 1$ を満たす定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 および第 2 項 a_2 を求めよ．

(2) $0 < x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x\log\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $a_n < \dfrac{n}{2^n}\log\left(\dfrac{1}{c}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数直線上に 2 点 X_1，X_2 を取り，それぞれ座標を a_1 および a_2 とする．ただし，$0 < a_1 < a_2$ とする．線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ を $s : 1 - s$ に内分する点を X_3，線分 $\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3$ を $s : 1 - s$ に内分する点を X_4，同様に自然数 k に対して線分 $\mathrm{X}_k\mathrm{X}_{k+1}$ を $s : 1 - s$ に内分する点を X_{k+2} とする．ただし，$0 < s < 1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 2 点 X_{2n-1}，X_{2n} の座標を並べてベクトル $\begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix}$ で表し，

$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix}$ と書くとき，行列 A を s を用いて表せ．

ただし，n は自然数である．

(2) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s-1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，行列 B を $B = P^{-1}AP$ とする．行列 B を求めよ．

(3) 座標 a_{2n+1} および a_{2n+2} を n，s，a_1，a_2 を用いて表せ．

(4) 点 X_k の座標 a_k の極限 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 \leqq t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos t - 1 \leqq 0$ であるから

$$\int_0^x (\cos t - 1)\,dt \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x - x \leqq 0$$

(2) (1) の結果から，$0 \leqq t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\sin t + t \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (-\sin t + t)\,dt \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqq 0$$

$0 \leqq t \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos t - 1 + \dfrac{t^2}{2} \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x \left(\cos t - 1 + \frac{t^2}{2}\right) dt \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqq 0$$

よって，求める正の数 a の 1 つは　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{6}}$

(3) (1)，(2) の結果から，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$-\frac{x^3}{6} \leqq \sin x - x \leqq 0 \quad \text{したがって} \quad -\frac{x^2}{6} \leqq \frac{\sin x}{x} - 1 \leqq 0$$

ゆえに　$0 \leqq -\left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right) \leqq \dfrac{x^2}{6}$　よって　$\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| \leqq \dfrac{x^2}{6}$　$\cdots(*)$

また，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x < 0$ のとき，$0 < -x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$(*)$ より

$$\left|\frac{\sin(-x)}{-x} - 1\right| \leqq \frac{(-x)^2}{6} \quad \text{すなわち} \quad \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leqq \frac{x^2}{6}$$

以上から，$0 < |x| \leqq \dfrac{x}{2}$ のとき，$\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| \leqq \dfrac{x^2}{6}$ が成り立つ．

(4) 求める回転体の体積を V とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - \sin^2 x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi^2(\pi^2 - 6)}{24}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= s(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ a,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より　　$\boldsymbol{\mathrm{P}(sa,\ ta,\ 1-s-t)}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ a, -1)$ に垂直なベクトル[1] の 1 つを

$$\vec{n} = (a,\ a,\ a^2)$$

とすると，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{n}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + a^2\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + ka^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

H は平面 α 上にあるから

$$k + k + ka^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{1}{a^2+2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{a^2+2}\vec{n}$　　よって　$\boldsymbol{\mathrm{H}\left(\dfrac{a}{a^2+2},\ \dfrac{a}{a^2+2},\ \dfrac{a^2}{a^2+2}\right)}$

(2) $a = 1$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$，$\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{n}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{b} = (-1, -1,\ 2)$$

とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2}$，$|\vec{b}| = \sqrt{6}$ であるから，Q の z 座標に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\cos\theta)\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\sqrt{2}} + (\sin\theta)\frac{\vec{b}}{\sqrt{6}}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(1 - \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{6}},\ \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{6}},\ \dfrac{\sqrt{6}\sin\theta}{3}\right)}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1 回の試行で，$X \geqq Y \geqq 3$ となる事象を A，$Y \leqq X < 3$ となる事象を B，$X \geqq 3 > Y$ となる事象を C とすると

$$P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}, \quad P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

C は，$A \cup B$ の余事象であるから (A と B は互いに排反)，求める確率は

$$P(C) = 1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

(2) 1 回目，2 回目の試行において，それぞれ A, B または B, A の順に起こる確率であるから

$$P(A) \times P(B) + P(B) \times P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \boldsymbol{\frac{8}{81}}$$

(3) n 回の試行において，A が $n-1$ 回，B が 1 回だけ起きる確率であるから

$${}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{4}{9} = \boldsymbol{n\left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_n = \displaystyle\int_c^1 nx^{n-1} \left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_c^1 \left(-\log\frac{1}{x}\right) dx = \int_c^1 (-\log x)\, dx \\
&= \Big[\, x(1 - \log x) \,\Big]_c^1 = \boldsymbol{1 + c(\log c - 1)}, \\
a_2 &= \int_c^1 2x \left(\log\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_c^1 (x^2)'(\log x)^2 \\
&= \Big[\, x^2(\log x)^2 \,\Big]_c^1 - \int_c^1 x^2 \cdot \frac{2\log x}{x}\, dx \\
&= -c^2(\log c)^2 - \int_c^1 (x^2)' \log x\, dx \\
&= -c^2(\log c)^2 - \Big[\, x^2 \log x \,\Big]_c^1 + \int_c^1 x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \boldsymbol{-c^2(\log c)^2 + c^2\log c - \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$f'(x)=-\log x-1$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$0<x\leqq 1$ のとき，$\log\left(\dfrac{1}{x}\right)\geqq 0$

したがって，増減表により　$0\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{e}$

$\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$ であるから，$0<x\leqq 1$ のとき　$0\leqq x\log\left(\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{2}$

補足 $0<x\leqq t\leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{t\sqrt{t}}-\dfrac{1}{t}\geqq 0$ であるから

$$\int_x^1\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{2}{\sqrt{t}}-\log t\right]_x^1=-2+\frac{2}{\sqrt{x}}+\log x\geqq 0$$

したがって　$0\leqq\log\left(\dfrac{1}{x}\right)\leqq -2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\leqq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

ゆえに　$0\leqq f(x)\leqq 2\sqrt{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}2\sqrt{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0$

(3) (2) の結果の辺々を n 乗すると

$$0\leqq x^n\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n<\frac{1}{2^n}\quad\text{ゆえに}\quad nx^{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n<\frac{n}{2^n}\cdot\frac{1}{x}$$

したがって　$\displaystyle\int_c^1 nx^{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx<\frac{n}{2^n}\int_c^1\frac{1}{x}\,dx$

よって　$a_n<\dfrac{n}{2^n}\Big[\log x\Big]_c^1=\dfrac{n}{2^n}\log\left(\dfrac{1}{c}\right)$

二項定理により　$2^n=(1+1)^n\geqq 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}>\dfrac{n(n-1)}{2}$　$(n\geqq 2)$

したがって　$0<a_n<\dfrac{n}{2^n}\log\left(\dfrac{1}{c}\right)<\dfrac{2}{n-1}\log\left(\dfrac{1}{c}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}\log\left(\frac{1}{c}\right)=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$\boxed{5}$ (1) 条件から
$$a_{2n+1} = (1-s)a_{2n-1} + sa_{2n},$$
$$a_{2n+2} = (1-s)a_{2n} + sa_{2n+1}$$

第 1 式を第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= (1-s)a_{2n} + s\{(1-s)a_{2n-1} + sa_{2n}\} \\ &= (s-s^2)a_{2n-1} + (1-s+s^2)a_{2n} \end{aligned}$$

上式および第 1 式より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1-s)a_{2n-1} + sa_{2n} \\ (s-s^2)a_{2n-1} + (1-s+s^2)a_{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-s & s \\ s-s^2 & 1-s+s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1-s & s \\ s-s^2 & 1-s+s^2 \end{pmatrix}}$

(2) (1) の結果から，A の特性方程式は

$$\lambda^2 - (2-2s+s^2)\lambda + (1-s)^2 = 0$$

すなわち $\quad \{\lambda - (1-s)^2\}(\lambda - 1) = 0$

A の固有値は，$\lambda = (1-s)^2,\ 1$ であるから

$$A - (1-s)^2E = \begin{pmatrix} s-s^2 & s \\ s-s^2 & s \end{pmatrix}, \quad A - E = \begin{pmatrix} -s & s \\ s-s^2 & -s+s^2 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = (1-s)^2$ に対する固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

したがって $\quad AP = P\begin{pmatrix} (1-s)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det P = 1{\cdot}1 - 1(s-1) = 2 - s \neq 0$ より，P は正則であるから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} (1-s)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{B = \begin{pmatrix} (1-s)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(3) (1) の結果から $\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

(2) の結果から

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix} = (1-s)^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$2-s \neq 0$ に注意して

$$\alpha = \frac{a_1 - a_2}{2-s}, \quad \beta = \frac{(1-s)a_1 + a_2}{2-s}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} &= A^n \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \alpha(1-s)^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1-s)^{2n}(a_1-a_2)}{2-s} \begin{pmatrix} 1 \\ s-1 \end{pmatrix} + \frac{(1-s)a_1+a_2}{2-s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{a_{2n+1} = \frac{(1-s)^{2n}(a_1-a_2) + (1-s)a_1 + a_2}{2-s}}$$
$$\boldsymbol{a_{2n+2} = \frac{-(1-s)^{2n+1}(a_1-a_2) + (1-s)a_1 + a_2}{2-s}}$$

(4) $0 < s < 1$ より，$0 < 1-s < 1$ である．このとき，(3) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = \frac{(1-s)a_1 + a_2}{2-s}$$

よって
$$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{(1-s)a_1 + a_2}{2-s}}$$

別解 $a_{k+2} = sa_{k+1} + (1-s)a_k$ より $\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 1-s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix}$

ここで，$P = \dfrac{1}{2-s}\begin{pmatrix} 1 & 1-s \\ 1 & 1-s \end{pmatrix}$，$Q = \dfrac{1}{2-s}\begin{pmatrix} 1-s & s-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} s & 1-s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P + (s-1)Q,$$
$$PQ = QP = O, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

したがって $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 1-s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$$= \{P + (s-1)^{k-1}Q\}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$0 < s < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-s}\begin{pmatrix} a_2 + (1-s)a_1 \\ a_2 + (1-s)a_1 \end{pmatrix}$