平成23年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ $a>0$，$b>0$，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$として，以下の問いに答えよ．

(1) 初項$a_1=a$と漸化式$a_{n+1}=\alpha a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$で定義された数列$\{a_n\}$がある．このとき，$x_n=\log_{10}a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$により定まる数列$\{x_n\}$の一般項をn，α，aを用いて表せ．

(2) 初項$b_1=b$と漸化式$b_{n+1}=\beta {b_n}^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$で定義された数列$\{b_n\}$がある．このとき，$y_n=\log_{10}b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$により定まる数列$\{y_n\}$の一般項をn，β，bを用いて表せ．

(3) $a=b=1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=0$を証明せよ．

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 原点のまわりの角θの回転移動を表す行列をR_θとする．回転R_θによって点$(2,\ 1)$に移されるものと点$(a,\ b)$を求めよ．

(2) 原点を通り，傾き$\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$の直線を$l$とする．また，点$\mathrm{P}(x,\ y)$を直線$l$に関して対称移動した点を$\mathrm{P}'(x',\ y')$とする．このとき，$x'$と$y'$を$x$，$y$および$\theta$を用いて表し，この移動を表す行列$A_\theta$を求めよ．

(3) x軸に関する対称移動を表す行列をBとする．このとき，$R_\theta B{R_\theta}^{-1}=A_\theta$となることを示せ．

(4) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$とする．2つの行列の積$A_\alpha A_\beta$はある角の回転移動を表すことを示せ．また3つの行列の積$A_\alpha A_\beta A_\gamma$によって表される移動は決して回転移動を表さないことを示せ．

$\boxed{3}$ 座標平面上の楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$について，以下の問いに答えよ．

(1) x座標が小さい方の焦点をFとし，Fから正の方向へ向かう半直線を始線とする極座標$(r,\ \theta)$で表された楕円の極方程式$r=f(\theta)$を求めよ．

(2) 座標平面上の原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$と楕円上の2点P_1，P_2について，線分OP_1と線分OP_2とが互いに直交する位置にあるとする．線分OP_1およびOP_2の長さをそれぞれr_1，r_2とするとき，$\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}$の値は定数となることを示せ．

4 関数 $f(x) = -x\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $0 < x < \pi$ の範囲で，方程式 $f''(x) = 0$ がただ1つの解 $x = a$ をもつことを示せ．

(2) 上の (1) で存在が示された a に対して，$a < x < \pi$ の範囲で，方程式 $f'(x) = -1$ がただ1つの解 $x = b$ をもつことを示し，その値 b を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における法線 m の方程式を求めよ．

(3) 上の (2) で求めた法線 m と曲線 $y = f(x)$ および y 軸とで囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

5 50円と100円の硬貨が3枚ずつの計6枚と，さいころが1個ある．これらの硬貨6枚とさいころ1個を同時に投げて，表が出た硬貨の合計額にさいころの目の数 n から2を引いた数の絶対値 $|n-2|$ をかけ合わせた賞金をもらえるものとする．たとえば，硬貨6枚すべてが表となり，さいころの目が6となった場合，表が出た硬貨の合計額450円を4倍した1800円を賞金としてもらえる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 賞金を全くもらえない確率を求めよ．

(2) もらえる賞金が500円以上となる確率を求めよ．

(3) もらえる賞金の期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1 = a$，$a_{n+1} = \alpha a_n$ より　　$a_n = a\alpha^{n-1}$

よって　　$x_n = \log_{10} a_n = \log_{10} a\alpha^{n-1}$

$$= \boldsymbol{\log_{10} a + (n-1)\log_{10}\alpha}$$

(2) $b_{n+1} = \beta {b_n}^2$ より，$\beta b_{n+1} = (\beta b_n)^2$ であるから

$$\log_{10}\beta b_{n+1} = 2\log_{10}\beta b_n \quad \text{ゆえに} \quad \log_{10}\beta b_n = 2^{n-1}\log_{10}\beta b_1$$

したがって　　$\log_{10}\beta + \log_{10} b_n = 2^{n-1}(\log_{10}\beta + \log_{10} b_1)$

$b_1 = b$，$y_n = \log_{10} b_n$ であるから

$$\boldsymbol{y_n = (2^{n-1} - 1)\log_{10}\beta + 2^{n-1}\log_{10} b}$$

(3) $a = b = 1$ のとき，(1)，(2) の結果から

$$x_n = (n-1)\log_{10}\alpha, \quad y_n = (2^{n-1}-1)\log_{10}\beta$$

$0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ より，$\log_{10}\alpha < 0$，$\log_{10}\beta < 0$ であるから

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{n}{2^n - 1}\cdot\frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta} > 0$$

$n \geqq 2$ のとき，二項定理により

$$2^n > {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2^n-1} < \frac{2}{n-1}$$

したがって　　$0 < \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < \dfrac{2}{n-1}\cdot\dfrac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = 0$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ より，$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$ であるから

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = R_{-\theta}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cos\theta + \sin\theta \\ -2\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって　　$\boldsymbol{(a,\ b) = (2\cos\theta + \sin\theta, -2\sin\theta + \cos\theta)}$

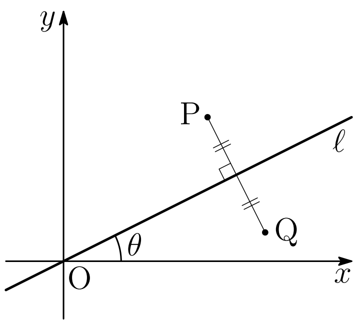
(2) l の方向ベクトルを $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，法線ベクトルを $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくと，$A_\theta\vec{v} = \vec{v}$，$A_\theta\vec{n} = -\vec{n}$ であるから

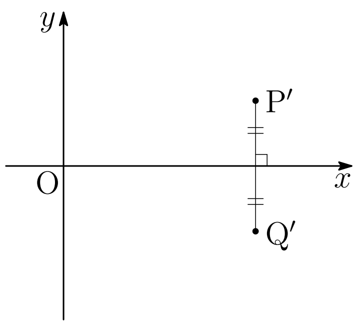
$$A_\theta\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

よって　　$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos 2\theta} & \boldsymbol{\sin 2\theta} \\ \boldsymbol{\sin 2\theta} & \boldsymbol{-\cos 2\theta} \end{pmatrix}$$

(3) 原点を通り，x 軸の正の向きとなす角が θ である直線 ℓ に関する対称移動を表す変換を h とする．
右の図のように，直線 ℓ に関して点 P と対称な点を Q とする．また，点 P，Q を原点の周りに $-\theta$ だけ回転した点を，それぞれ P′，Q′ とする．このとき，P′ と Q′ は x 軸に関して対称である．
よって，原点の周りに $-\theta$ だけ回転する変換を f，x 軸に関して対称移動する変換を g とすると，原点の周りに θ だけ回転する変換は f^{-1} であるから，変換 h は $f^{-1}\circ(g\circ f)$ で表される．ゆえに，h の表す行列は A_θ であるから





$$R_\theta B R_{-\theta} = A_\theta$$

別解 点 $(x,\ y)$ を x 軸に関する対称移動をした点を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

実際に，$R_\theta B R_{-\theta}$ を求めると

$$\begin{aligned} R_\theta B R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = A_\theta \end{aligned}$$

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} A_\alpha A_\beta &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$A_\alpha A_\beta$ は，原点のまわりの角 $2(\alpha-\beta)$ の回転移動を表す.

次に，(1)，(2) の結果より，$\det R_\theta = 1$，$\det A_\theta = -1$ であるから

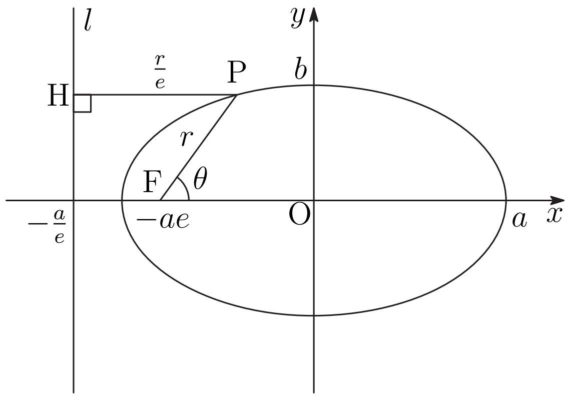
$$\det(A_\alpha A_\beta A_\gamma) = \det A_\alpha \det A_\beta \det A_\gamma = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

したがって $\qquad \det(A_\alpha A_\beta A_\gamma) \neq 1$

よって，$A_\alpha A_\beta A_\gamma$ によって表される移動は決して回転移動を表さない.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ の離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$



焦点 $\mathrm{F}(-ae,\ 0)$ の準線 l は

$$x=-\frac{a}{e}$$

F から l までの距離 λ は

$$\lambda=-ae-\left(-\frac{a}{e}\right)=\frac{a}{e}(1-e^2)=\frac{a}{e}\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{ae}$$

2 次曲線について，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$ であるから，$\mathrm{PF}=r$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{r}{e}$

右上の図から，$\mathrm{PH}=\lambda+\mathrm{PF}\cos\theta$ であるから　$\dfrac{r}{e}=\dfrac{b^2}{ae}+r\cos\theta$

よって　$r=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}}$

(2) $\mathrm{OP_1}$ の傾きを m とすると $(m\neq0)$，$\mathrm{P_1}$ は

$$楕円\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad 直線\ y=mx$$

の交点である．上 2 式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1\quad ゆえに\quad x^2=\frac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}},\quad y^2=\frac{m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}$$

よって　$x^2+y^2=\dfrac{1+m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}$　すなわち　$\dfrac{1}{{r_1}^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}{1+m^2}$　$\cdots$①

$\mathrm{OP_2}$ は $\mathrm{OP_1}$ に垂直であるから，① の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えて

$$\frac{1}{{r_2}^2}=\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{m^2b^2}}{1+\dfrac{1}{m^2}}=\frac{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{m^2+1}$$

①，② より　$\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$　$\cdots(*)$

また，$\mathrm{P_1}$ および $\mathrm{P_2}$ が x 軸または y 軸上にあるときも $(*)$ は成立する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = -x\sin x$ より　$f'(x) = -\sin x - x\cos x$

$$f''(x) = -2\cos x + x\sin x$$

$g(x) = f''(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とおくと　$g(x) = -2\cos x + x\sin x$

$$g'(x) = 3\sin x + x\cos x$$

$g(0) = -2$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ において $g(x) > 0$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $g'(x) > 0$ より，$g(x)$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調増加.

ゆえに，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，方程式 $g(x) = 0$ がただ 1 つの解 $x = a$ をもつ.

よって，$0 < x < \pi$ で，方程式 $f''(x) = 0$ はただ 1 つの解 $x = a$ をもつ.

(2) $h(x) = f'(x) + 1$ $(a \leqq x \leqq \pi)$ とおくと　$h'(x) = f''(x)$

(1) の結果から，$a < x < \pi$ で，$f''(x) > 0$ である.

$a < x < \pi$ で $h'(x) > 0$ であるから，$h(x)$ は単調増加.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 0$$

ゆえに，$a \leqq x \leqq \pi$ で，方程式 $h(x) = 0$ がただ 1 つの解 $x = \dfrac{\pi}{2}$ をもつ.

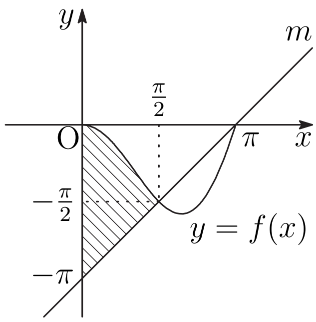
よって，$a \leqq x \leqq \pi$ で，方程式 $f'(x) = -1$ がただ 1 つの解 $x = \dfrac{\pi}{2}$ をもつ.

$\boldsymbol{b = \dfrac{\pi}{2}}$ であるから　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$，　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

法線 m は点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \pi}$$

(3) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積が V であるから



$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(x-\pi)^2 - (x\sin x)^2\right\} dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3 - \frac{x^3}{6}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{2x^2-1}{8}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{48}(13\pi^2 - 6)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 表が出た 50 円と 100 円硬貨をそれぞれ a 枚，b 枚とすると $(0 \leqq a,\ b \leqq 3)$，もらえる賞金は

$$(50a + 100b)|n - 2| \quad (\text{円})$$

したがって，賞金を全くもらえないのは，

$$a = b = 0 \quad \text{または} \quad n = 2$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{1}{64} + \frac{1}{6} - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{6} = \mathbf{\frac{23}{128}}$$

(2) 表が出た硬貨の合計金額を X 円とすると，$X = 50(a + 2b)$ であるから

$X = 0$ のとき　$(a,\ b) = (0,\ 0)$ の 1 通り
$X = 50$ のとき　$(a,\ b) = (1,\ 0)$ の 3 通り
$X = 100$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 0),\ (0,\ 1)$ の $3 + 3 = 6$ 通り
$X = 150$ のとき　$(a,\ b) = (3,\ 0),\ (1,\ 1)$ の $1 + 3 \cdot 3 = 10$ 通り
$X = 200$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (0,\ 2)$ の $3 \cdot 3 + 3 = 12$ 通り
$X = 250$ のとき　$(a,\ b) = (3,\ 1),\ (1,\ 2)$ の $3 + 3 \cdot 3 = 12$ 通り
$X = 300$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 2),\ (0,\ 3)$ の $3 \cdot 3 + 1 = 10$ 通り
$X = 350$ のとき　$(a,\ b) = (3,\ 1),\ (1,\ 3)$ の $3 + 3 = 6$ 通り
$X = 400$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 3)$ の 3 通り
$X = 450$ のとき　$(a,\ b) = (3,\ 3)$ の 1 通り

したがって，X の確率分布表は，次のようになる．

X	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	合計
$P(X)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

もらえる賞金は，$X|n - 2|$ であるから，賞金が 500 円以上となるのは

$n = 4$ のとき　$X \geqq 250$
$n = 5$ のとき　$X \geqq 200$
$n = 6$ のとき　$X \geqq 150$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}P(X \geqq 250) + \frac{1}{6}P(X \geqq 200) + \frac{1}{6}P(X \geqq 150)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{32}{64} + \frac{1}{6}\cdot\frac{44}{64} + \frac{1}{6}\cdot\frac{54}{64} = \mathbf{\frac{65}{192}}$$

(3) X の確率分布表から，期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= (0+450)\cdot\frac{1}{64} + (50+400)\cdot\frac{3}{64} + (100+350)\cdot\frac{6}{64} \\ &\qquad + (150+300)\cdot\frac{10}{64} + (200+250)\cdot\frac{12}{64} \\ &= 450\left(\frac{1}{64}+\frac{3}{64}+\frac{6}{64}+\frac{10}{64}+\frac{12}{64}\right) \\ &= 450\times\frac{1}{2} = 225 \end{aligned}$$

$Y = |n-2|$ とおくと，Y の確率分布表は

Y	0	1	2	3	4	合計
$P(Y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

したがって期待値は　$E(Y) = (0+2+3+4)\cdot\dfrac{1}{6} + 1\cdot\dfrac{2}{6} = \dfrac{11}{6}$

2 つの確率変数 X，Y は独立である．求める期待値は $E(XY)$ であるから

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 225\times\frac{11}{6} = \boldsymbol{\frac{825}{2}}$$