

## 平成22年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分

工学部 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 直線  $y = ax$  (ただし  $a$  は正の実数) を  $l$  とし, 直線  $y = f(x)$  (ただし  $x \geq 0$ ) を  $C$  とする. 曲線  $C$  が直線  $l$  の下側あり, 曲線  $C$  上の点  $(t, f(t))$  と直線  $l$  との距離が  $at^2$  で表されるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数  $f(x)$  を求めよ.
- (2) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形を,  $x$  軸のまわりに回転させてできる回転体の体積  $V$  を求めよ.
- (3)  $V$  が最大となるように  $a$  の値を定めよ.

2 鋭角三角形  $ABC$  において,  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分  $AC$  を  $1:2$  に内分する点を  $P$ , 線分  $BC$  を  $2:3$  に内分する点を  $Q$  とする. ここで線分  $AC$  の長さを  $|AC|$  で表すとして,  $|AC| = 12$  および  $|BC| = 5\sqrt{5}$  とする. このとき,  $|AQ| > |BP|$  であることを示せ.
- (2)  $n$  を正の整数,  $r$  を  $0 < r < 1$  をみたす実数とする. 線分  $AC$  を  $1-r:r$  に内分する点を  $E$ , 線分  $BC$  を  $1-r^n:r^n$  に内分する点を  $F$  とし, 線分  $AF$  と線分  $BE$  の交点を  $R$  とする.  $\overrightarrow{CR}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $n$ ,  $r$  を用いて表せ.
- (3) (2) において,  $n$  を固定して  $r \rightarrow 1$  としたとき, 交点  $R$  は辺  $AB$  上のある点  $S$  に近づく. このとき,  $|AS|:|SB|$  を求めよ.

3 点  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  が, 行列を用いて次のように与えられている.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ.

- (1)  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  のときの  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  を  $P_n$  とする. 点  $P_n$  の座標を求めよ.
- (2)  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  のときの  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  を  $Q_n$  とする. 点  $Q_n$  の座標を求めよ.
- (3)  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$  (ただし  $k$  は正の実数) のときの  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  を  $R_n$  とする.  
点  $R_n$  の座標を求めよ.
- (4) 点  $R_n$  と点  $R_{n-1}$  の間の距離を  $|R_n R_{n-1}|$  とする.  $\sum_{n=1}^{\infty} |R_n R_{n-1}|$  を求めよ.

4 表と裏の出る確率が  $\frac{1}{2}$  ずつの硬貨を投げ, 表なら 1 点, 裏なら 0 点とする.  $k, n$  を正の定数として, 以下の問いに答えよ.

- (1) 硬貨を繰り返し投げ, 得点の合計が 3 点に達したら終了することにする. ちょうど 5 回目で終了する確率はいくらか. また, ちょうど  $n$  回目で終了する確率を  $q_n$  とするとき,  $\sum_{i=1}^n q_i = 1 - \frac{n^2 + n + 2}{2^{n+1}}$  を証明せよ.
- (2) 硬貨を繰り返し投げ, 得点の合計が  $k$  点に達したら終了することにする. ちょうど  $n$  回目で終了する確率を  $p_k(n)$  とする.  $k$  を固定したまま  $n$  を動かすときの  $p_k(n)$  の最大値を求めよ.

**5**  $n, N$  を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $k$  を正の定数とし、関数  $f(x)$  は  $f(x) = f(x+k)$  をみたすとする。このとき、

$$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx, \quad S_N = \sum_{n=1}^N T_n$$

とおく。  $T_n$  と  $S_N$  を  $T_1$  で表せ。

- (2) (1) において  $f(x) \geq 0$  とする。このとき、  $k$  以上の実数  $z$  に対して

$$S_N \leq \int_0^z e^{-x} f(x) dx < S_{N+1}$$

が成立するような  $N$  を求めよ。さらに、この不等式を用いて極限

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx$$

が存在することを示し、この極限を  $T_1$  で表せ。

- (3)  $h(x) = e^{-x} |\cos \pi x|$  とする。  $y = h(x)$ ,  $x$  軸,  $y$  軸および  $x = z$  で囲まれた部分の面積を  $V(z)$  とおく。  $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z)$  を求めよ。

## 解答例

- 1 (1)  $C$  上の点  $(t, f(t))$  から直線  $l: ax - y = 0$  までの距離が  $at^2$  であるから

$$\frac{|at - f(t)|}{\sqrt{a^2 + 1}} = at^2$$

$C$  は  $l$  の下側にあるから,  $at - f(t) \geq 0$  より

$$\frac{at - f(t)}{\sqrt{a^2 + 1}} = at^2 \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = at - a\sqrt{a^2 + 1}t^2$$

よって, 求める関数  $f(x)$  は  $f(x) = ax - a\sqrt{a^2 + 1}x^2 \quad (x \geq 0)$

- (2)  $k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \dots \textcircled{1}$  とおくと, (1) の結果から

$$f(x) = \frac{a}{k}x(k - x)$$

したがって, 求める回転体の体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^k \{f(x)\}^2 dx = \frac{\pi a^2}{k^2} \int_0^k x^2(k - x)^2 dx \\ &= \frac{\pi a^2}{k^2} \cdot \frac{k^5}{30} = \frac{\pi a^2 k^3}{30} = \frac{\pi a^2}{30(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

補足  $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(\beta - x)^2 dx = \frac{1}{30}(\beta - \alpha)^5$

- (3)  $\textcircled{1}$  より,  $a^2 = \frac{1}{k^2} - 1 \dots \textcircled{2}$  であるから, (2) の結果から

$$V = \frac{\pi a^2 k^3}{30} = \frac{\pi}{30} \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) k^3 = \frac{\pi}{30} (k - k^3) \quad (0 < k < 1)$$

$g(k) = k - k^3 \quad (0 < k < 1)$  とおくと,  $g'(k) = 1 - 3k^2$  より

$k$	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$g'(k)$		+	0	-	
$g(k)$		↗	極大	↘	

したがって,  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき,  $V$  は最大となるので, これを  $\textcircled{2}$  に代入して

$$a^2 = 2 \quad \text{条件より } a \text{ は正であるから} \quad a = \sqrt{2}$$

## 積分公式

$m, n$  を 0 以上の整数とする.

$$I(m, n) = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$$

とおくと, 部分積分法により

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{1}{m+1} \int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n dt \\ &= \left[ \frac{1}{m+1} t^{m+1} (1-t)^n \right]_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 t^{m+1} (1-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} I(m+n, 0) \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \int_0^1 t^{m+n} dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx$$

について,  $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = \beta - \alpha$

$x$	$\alpha$	$\rightarrow$	$\beta$
$t$	$0$	$\rightarrow$	$1$

このとき  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = (\beta-\alpha)^{m+n+1} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$

よって  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$

本題においては,  $m = n = 2$  であるから

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 (\beta-x)^2 dx = \frac{2!2!}{5!} (\beta-\alpha)^5 = \frac{1}{30} (\beta-\alpha)^5$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad \vec{AQ} = \vec{CQ} - \vec{CA} = \frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a},$$

$$\vec{BP} = \vec{CP} - \vec{CB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$$

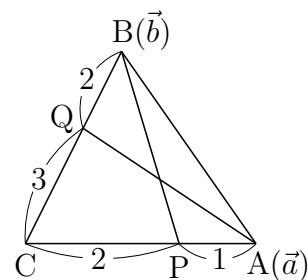
$|\vec{a}| = 12, |\vec{b}| = 5\sqrt{5}$  であるから

$$|\vec{AQ}|^2 = \left| \frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a} \right|^2 = 189 - \frac{6}{5}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{BP}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} \right|^2 = 189 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\triangle ABC$  は鋭角三角形であるから,  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  より

$$|\vec{AQ}|^2 - |\vec{BP}|^2 = \frac{2}{15}\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \text{よって} \quad |\vec{AQ}| > |\vec{BP}|$$



(2)  $\triangle BCE$  と直線  $AF$  について, メネラウスの定理を適用すると

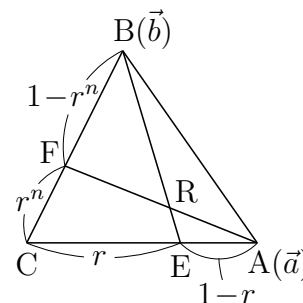
$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{ER}{RB} = 1$$

$$\frac{1-r^n}{r^n} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{ER}{RB} = 1$$

したがって  $ER : RB = r^n(1-r) : 1-r^n$

$$\text{よって} \quad \vec{CR} = \frac{(1-r^n)\vec{CE} + r^n(1-r)\vec{CB}}{r^n(1-r) + 1-r^n}$$

$$= \frac{r(1-r^n)}{1-r^{n+1}}\vec{a} + \frac{r^n(1-r)}{1-r^{n+1}}\vec{b}$$



(3) (2) の結果から

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{r(1-r^n)}{1-r^{n+1}} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r(1-r)(1+r+\dots+r^{n-1})}{(1-r)(1+r+\dots+r^n)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r(1+r+\dots+r^{n-1})}{1+r+\dots+r^n} = \frac{n}{n+1},$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{r^n(1-r)}{1-r^{n+1}} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r^n(1-r)}{(1-r)(1+r+\dots+r^n)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r^n}{1+r+\dots+r^n} = \frac{1}{n+1}$$

上の2式より, Rの極限の位置は辺AB上にあるから

$$\vec{CS} = \frac{n\vec{a} + \vec{b}}{n+1} \quad \text{よって} \quad |\vec{AS}| : |\vec{SB}| = 1 : n$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{とおくと} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{であるから}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって  $\mathbf{P}_n(\mathbf{3}, \mathbf{2})$

$$(2) \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{であるから}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって  $\mathbf{Q}_n\left(\mathbf{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, -\mathbf{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

(3) (1), (2)の結果より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \left\{ \frac{k}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{k}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{k}{6} A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{k}{6} A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{k}{6} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{R}_n\left(\frac{k}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}, \frac{k}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\right)$

(4) (3)の結果から

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{2k}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad y_n - y_{n-1} = \frac{4k}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{したがって} \quad |R_n R_{n-1}| = \frac{2\sqrt{13}k}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |R_n R_{n-1}| = \frac{2\sqrt{13}k}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{13}k}{3}$$

■

- 4 (1) ちょうど5回目で終了するのは、4回目投げ終わった時点で得点が2点で、5回目に表が出る確率であるから

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$n$  回投げ終わった時点の得点で、終了していないときの確率は

- 得点が0であるとき  $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$
- 得点が1であるとき  ${}_nC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$
- 得点が2であるとき  ${}_nC_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$

ちょうど  $n$  回目で終了する確率は、これらの余事象の確率であるから

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1 - \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{n(n-1)}{2^{n+1}} \right\} = 1 - \frac{n^2 + n + 2}{2^{n+1}}$$

別解  $q_i = {}_{i-1}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2} = (i-1)(i-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ ,  $\sum_{i=1}^n x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$  より

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{i=1}^n x^{i-1} &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1-x^n}{1-x} \right) \\ \sum_{i=1}^n (i-1)(i-2)x^{i-3} &= \frac{(1-x^n)''}{1-x} + 2(1-x^n)' \left( \frac{1}{1-x} \right)' \\ &\quad + (1-x^n) \left( \frac{1}{1-x} \right)'' \\ &= -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{1-x} - \frac{2nx^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

上式の両辺に  $x^4$  をかけると

$$\sum_{i=1}^n (i-1)(i-2)x^{i+1} = -\frac{n(n-1)x^{n+2}}{1-x} - \frac{2nx^{n+3}}{(1-x)^2} + \frac{2x^4(1-x^n)}{(1-x)^3}$$

これに  $x = \frac{1}{2}$  を代入すると

$$\sum_{i=1}^n q_i = -\frac{n(n-1)}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{n^2 + n + 2}{2^{n+1}}$$

(2)  $P_k(n)$  は  $n-1$  回投げ終わった時点で得点が  $k-1$  点で、 $n$  回目に表が出る確率であるから

$$P_k(n) = {}_{n-1}C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{2^n(k-1)!(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \frac{P_k(m+1)}{P_k(m)} &= \frac{m!}{2^{m+1}(k-1)!(m+1-k)!} \times \frac{2^m(k-1)!(m-k)!}{(m-1)!} \\ &= \frac{m}{2(m+1-k)} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \frac{P_k(m+1)}{P_k(m)} - 1 = \frac{2k-2-m}{2(m+1-k)} \quad \dots (*)$$

(i) (\*) より、 $2k-2 > 0$ 、すなわち、 $k \geq 2$  のとき

$$P_k(1) < P_k(2) < \dots < P_k(2k-2) = P_k(2k-1) > \dots > P_k(n)$$

$$\text{最大値は } P_k(2k-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\{(k-1)!\}^2}$$

(ii)  $k=1$  のとき、 $P_1(n) = \frac{1}{2^n}$  であるから

$$\text{最大値は } P_1(1) = \frac{1}{2}$$

(i), (ii) の結果から、求める最大値は

$$P_k(2k-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\{(k-1)!\}^2} \quad (k \geq 1)$$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx$$

において,  $x = t + k(n-1)$  とおく. このとき,  $f(x)$  が周期  $k$  の周期関数であるから

$$\begin{array}{c|c} x & (n-1)k \longrightarrow nk \\ \hline t & 0 \longrightarrow k \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad f(t+k(n-1)) = f(t)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad T_n &= \int_0^k e^{-t-k(n-1)} f(t+k(n-1)) dt \\ &= e^{-k(n-1)} \int_0^k e^{-t} f(t) dt \\ &= e^{-k(n-1)} \mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad S_N = \sum_{n=1}^N T_n = T_1 \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)} = \frac{1 - e^{-kN}}{1 - e^{-k}} \mathbf{T}_1$$

$$(2) \quad S_N = \sum_{n=1}^N T_n = \sum_{n=1}^N \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx = \int_0^{kN} e^{-x} f(x) dx$$

$$S_N \leq \int_0^z e^{-x} f(x) dx < S_{N+1} \cdots (*) \text{ より}$$

$$\int_0^{kN} e^{-x} f(x) dx \leq \int_0^z e^{-x} f(x) dx < \int_0^{k(N+1)} e^{-x} f(x) dx$$

条件より,  $f(x) \geq 0$  であるから<sup>1</sup>  $kN \leq z < k(N+1)$

$$\text{したがって} \quad N \leq \frac{z}{k} < N+1 \quad \text{すなわち} \quad N = \left\lfloor \frac{z}{k} \right\rfloor$$

$$(1) \text{ の結果から} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+1} = \frac{\mathbf{T}_1}{1 - e^{-k}}$$

上式および (\*) から, はさみうちの原理により

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx = \frac{\mathbf{T}_1}{1 - e^{-k}}$$

<sup>1</sup>定数関数  $f(x) = 0$  のとき, (\*) は成立しない.

- (3)  $h(x) = e^{-x} |\cos \pi x|$  より, 求める  $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z)$  は, (2) で求めた極限值について,  $k = 1$ ,  $f(x) = |\cos \pi x|$  を適用したものである. このとき

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^1 e^{-x} |\cos \pi x| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} \cos \pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos \pi x dx \end{aligned}$$

ここで,  $e^{-x} \cos \pi x$  の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{1 + \pi^2} (\pi \sin \pi x - \cos \pi x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ F(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[ F(x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) \\ &= \frac{1}{1 + \pi^2} \{2\pi e^{-\frac{1}{2}} - (-1) - e^{-1}\} \\ &= \frac{1 + 2\pi e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{1 + \pi^2} \end{aligned}$$

よって, 上式および (2) の結果に  $k = 1$  を代入して

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} V(z) &= \frac{1}{1 - e^{-1}} \times \frac{1 + 2\pi e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{1 + \pi^2} \\ &= \frac{e + 2\pi\sqrt{e} - 1}{(e - 1)(1 + \pi^2)} \end{aligned}$$

