平成22年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)120分
工学部　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ 直線 $y=ax$ (ただし a は正の実数) を l とし，直線 $y=f(x)$ (ただし $x \geqq 0$) を C とする．曲線 C が直線 l の下側あり，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ と直線 l との距離が at^2 で表されるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

(3) V が最大となるように a の値を定めよ．

$\boxed{2}$ 鋭角三角形ABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分ACを $1:2$ に内分する点をP，線分BCを $2:3$ に内分する点をQとする．ここで線分ACの長さを $|\mathrm{AC}|$ で表すとして，$|\mathrm{AC}|=12$ および $|\mathrm{BC}|=5\sqrt{5}$ とする．このとき，$|\mathrm{AQ}|>|\mathrm{BP}|$ であることを示せ．

(2) n を正の整数，r を $0<r<1$ をみたす実数とする．線分ACを $1-r:r$ に内分する点をE，線分BCを $1-r^n:r^n$ に内分する点をFとし，線分AFと線分BEの交点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，n，r を用いて表せ．

(3) (2)において，n を固定して $r \longrightarrow 1$ としたとき，交点Rは辺AB上のある点Sに近づく．このとき，$|\mathrm{AS}|:|\mathrm{SB}|$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 点 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ が，行列を用いて次のように与えられている．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を P_n とする．点 P_n の座標を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を Q_n とする．点 Q_n の座標を求めよ．

(3) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ (ただし k は正の実数) のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を R_n とする．点 R_n の座標を求めよ．

(4) 点 R_n と点 R_{n-1} の間の距離を $|\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n-1}|$ とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n-1}|$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 表と裏の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ ずつの硬貨を投げ，表なら 1 点，裏なら 0 点とする．k，n を正の定数として，以下の問いに答えよ．

(1) 硬貨を繰り返し投げ，得点の合計が 3 点に達したら終了することにする．ちょうど 5 回目で終了する確率はいくらか．また，ちょうど n 回目で終了する確率を q_n とするとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q_i = 1 - \frac{n^2+n+2}{2^{n+1}}$ を証明せよ．

(2) 硬貨を繰り返し投げ，得点の合計が k 点に達したら終了することにする．ちょうど n 回目で終了する確率を $p_k(n)$ とする．k を固定したまま n を動かすときの $p_k(n)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ n，N を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) k を正の定数とし，関数 $f(x)$ は $f(x) = f(x+k)$ をみたすとする．このとき，

$$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x)\,dx, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n$$

とおく．T_n と S_N を T_1 で表せ．

(2) (1) において $f(x) \geqq 0$ とする．このとき，k 以上の実数 z に対して

$$S_N \leqq \int_0^z e^{-x} f(x)\,dx < S_{N+1}$$

が成立するような N を求めよ．さらに，この不等式を用いて極限

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x} f(x)\,dx$$

が存在することを示し，この極限を T_1 で表せ．

(3) $h(x) = e^{-x}|\cos \pi x|$ とする．$y = h(x)$，x 軸，y 軸および $x = z$ で囲まれた部分の面積を $V(z)$ とおく．$\displaystyle\lim_{z\to\infty} V(z)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ から直線 $l : ax - y = 0$ までの距離が at^2 であるから

$$\frac{|at - f(t)|}{\sqrt{a^2+1}} = at^2$$

C は l の下側にあるから，$at - f(t) \geqq 0$ より

$$\frac{at - f(t)}{\sqrt{a^2+1}} = at^2 \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = at - a\sqrt{a^2+1}\,t^2$$

よって，求める関数 $f(x)$ は　$\boldsymbol{f(x) = ax - a\sqrt{a^2+1}\,x^2 \ \ (x \geqq 0)}$

(2) $k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdots$ ① とおくと，(1) の結果から

$$f(x) = \frac{a}{k}x(k-x)$$

したがって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^k \{f(x)\}^2\,dx = \frac{\pi a^2}{k^2}\int_0^k x^2(k-x)^2\,dx \\ &= \frac{\pi a^2}{k^2}\cdot\frac{k^5}{30} = \frac{\pi a^2 k^3}{30} = \boldsymbol{\frac{\pi a^2}{30(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\,dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

(3) ① より，$a^2 = \dfrac{1}{k^2} - 1 \cdots$ ② であるから，(2) の結果から

$$V = \frac{\pi a^2 k^3}{30} = \frac{\pi}{30}\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)k^3 = \frac{\pi}{30}(k - k^3) \quad (0 < k < 1)$$

$g(k) = k - k^3$ $(0 < k < 1)$ とおくと，$g'(k) = 1 - 3k^2$ より

k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$g'(k)$		$+$	0	$-$	
$g(k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，V は最大となるので，これを ② に代入して

$a^2 = 2$　条件より a は正であるから　$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$

積分公式

m，n を 0 以上の整数とする．

$$I(m,n)=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

とおくと，部分積分法により

$$\begin{aligned}
I(m,n)&=\frac{1}{m+1}\int_0^1 (t^{m+1})'(1-t)^n\,dt\\
&=\left[\frac{1}{m+1}t^{m+1}(1-t)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt\\
&=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,0)\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^{m+n}\,dt=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

この結果を利用すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$$

について，$x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\beta-\alpha$

x	α	$\longrightarrow$	β
t	0	$\longrightarrow$	1

このとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$

よって $\displaystyle\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

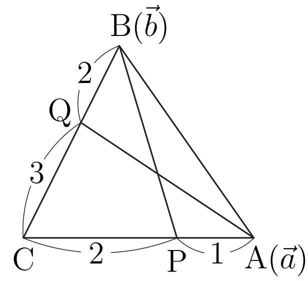
本題においては，$m=n=2$ であるから

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\,dx=\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{CQ}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$$



$|\vec{a}| = 12$，$|\vec{b}| = 5\sqrt{5}$ であるから

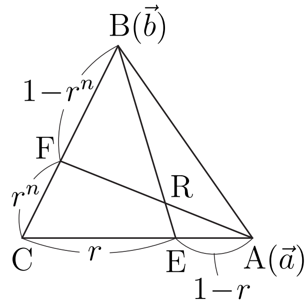
$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = \left|\frac{3}{5}\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = 189 - \frac{6}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 = \left|\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 189 - \frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 = \frac{2}{15}\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \text{よって} \quad |\mathrm{AQ}| > |\mathrm{BP}|$$

(2) $\triangle$BCE と直線 AF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RB}} = 1$$

$$\frac{1-r^n}{r^n}\cdot\frac{1}{1-r}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RB}} = 1$$

したがって　$\mathrm{ER} : \mathrm{RB} = r^n(1-r) : 1 - r^n$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \frac{(1-r^n)\overrightarrow{\mathrm{CE}} + r^n(1-r)\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{r^n(1-r) + 1 - r^n}$$

$$= \boldsymbol{\frac{r(1-r^n)}{1-r^{n+1}}\vec{a} + \frac{r^n(1-r)}{1-r^{n+1}}\vec{b}}$$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{r\to1}\frac{r(1-r^n)}{1-r^{n+1}} = \lim_{r\to1}\frac{r(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-1})}{(1-r)(1+r+\cdots+r^n)}$$

$$= \lim_{r\to1}\frac{r(1+r+\cdots+r^{n-1})}{1+r+\cdots+r^n} = \frac{n}{n+1},$$

$$\lim_{r\to1}\frac{r^n(1-r)}{1-r^{n+1}} = \lim_{r\to1}\frac{r^n(1-r)}{(1-r)(1+r+\cdots+r^n)}$$

$$= \lim_{r\to1}\frac{r^n}{1+r+\cdots+r^n} = \frac{1}{n+1}$$

上の 2 式より，R の極限の位置は辺 AB 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CS}} = \frac{n\vec{a} + \vec{b}}{n+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|\mathrm{AS}| : |\mathrm{SB}| = 1 : n}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$A\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{P}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{(3,\ 2)}$

(2) $A\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}_n\left(3\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}$

(3) (1), (2) の結果より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}&=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}k\\ 0\end{pmatrix}=A^n\left\{\frac{k}{6}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+\frac{k}{6}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\right\}\\ &=\frac{k}{6}A^n\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+\frac{k}{6}A^n\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\\ &=\frac{k}{6}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+\frac{k}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}_n\left(\frac{k}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\},\ \frac{k}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\right)}$

(4) (3) の結果から

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{2k}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\quad y_n-y_{n-1}=\frac{4k}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって　$|\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n-1}|=\frac{2\sqrt{13}\,k}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}|\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n-1}|=\frac{2\sqrt{13}\,k}{9}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}\,k}{3}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) ちょうど5回目で終了するのは，4回目投げ終わった時点で得点が2点で，5回目に表が出る確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{16}} $$

n 回投げ終わった時点の得点で，終了していないときの確率は

- 得点が0であるとき $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$
- 得点が1であるとき ${}_n\mathrm{C}_1 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^n}$
- 得点が2であるとき ${}_n\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n(n-1)}{2^{n+1}}$

ちょうど n 回目で終了する確率は，これらの余事象の確率であるから

$$ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 - \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{n(n-1)}{2^{n+1}} \right\} = 1 - \frac{n^2+n+2}{2^{n+1}} $$

別解 $q_i = {}_{i-1}\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1} \times \dfrac{1}{2} = (i-1)(i-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i+1}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ より

$$ \frac{d^2}{dx^2} \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) $$

$$ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i-2)x^{i-3} &= \frac{(1-x^n)''}{1-x} + 2(1-x^n)'\left(\frac{1}{1-x}\right)' \\ &\qquad + (1-x^n)\left(\frac{1}{1-x}\right)'' \\ &= -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{1-x} - \frac{2nx^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3} \end{aligned} $$

上式の両辺に x^4 をかけると

$$ \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i-2)x^{i+1} = -\frac{n(n-1)x^{n+2}}{1-x} - \frac{2nx^{n+3}}{(1-x)^2} + \frac{2x^4(1-x^n)}{(1-x)^3} $$

これに $x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$ \sum_{i=1}^{n} q_i = -\frac{n(n-1)}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{n^2+n+2}{2^{n+1}} $$

(2) $P_k(n)$ は $n-1$ 回投げ終わった時点で得点が $k-1$ 点で，n 回目に表が出る確率であるから

$$P_k(n) = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{2^n(k-1)!(n-k)!} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

ゆえに
$$\frac{P_k(m+1)}{P_k(m)} = \frac{m!}{2^{m+1}(k-1)!(m+1-k)!} \times \frac{2^m(k-1)!(m-k)!}{(m-1)!} = \frac{m}{2(m+1-k)}$$

したがって
$$\frac{P_k(m+1)}{P_k(m)} - 1 = \frac{2k-2-m}{2(m+1-k)} \quad \cdots (*)$$

(i) $(*)$ より，$2k-2>0$，すなわち，$k \geqq 2$ のとき

$$P_k(1) < P_k(2) < \cdots < P_k(2k-2) = P_k(2k-1) > \cdots > P_k(n)$$

最大値は　$P_k(2k-1) = \dfrac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\{(k-1)!\}^2}$

(ii) $k=1$ のとき，$P_1(n) = \dfrac{1}{2^n}$ であるから

最大値は　$P_1(1) = \dfrac{1}{2}$

(i)，(ii) の結果から，求める最大値は

$$\boldsymbol{P_k(2k-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\{(k-1)!\}^2} \quad (k \geqq 1)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x)\,dx$$

において，$x = t + k(n-1)$ とおく．このとき，$f(x)$ が周期 k の周期関数であるから

x	$(n-1)k \longrightarrow nk$
t	$0 \quad \longrightarrow \quad k$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad f(t + k(n-1)) = f(t)$$

よって
$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^k e^{-t-k(n-1)} f(t + k(n-1))\,dt \\ &= e^{-k(n-1)} \int_0^k e^{-t} f(t)\,dt \\ &= \boldsymbol{e^{-k(n-1)} T_1} \end{aligned}$$

ゆえに
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n = T_1 \sum_{n=1}^{N} e^{-k(n-1)} = \boldsymbol{\frac{1 - e^{-kN}}{1 - e^{-k}} T_1}$$

(2)
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n = \sum_{n=1}^{N} \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x)\,dx = \int_0^{kN} e^{-x} f(x)\,dx$$

$S_N \leqq \displaystyle\int_0^z e^{-x} f(x)\,dx < S_{N+1} \cdots (*)$ より

$$\int_0^{kN} e^{-x} f(x)\,dx \leqq \int_0^z e^{-x} f(x)\,dx < \int_0^{k(N+1)} e^{-x} f(x)\,dx$$

条件より，$f(x) \geqq 0$ であるから[1] $\quad kN \leqq z < k(N+1)$

したがって $\quad N \leqq \dfrac{z}{k} < N + 1$ すなわち $\boldsymbol{N = \left[\dfrac{z}{k}\right]}$

(1) の結果から $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = \frac{T_1}{1 - e^{-k}}$

上式および $(*)$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-x} f(x)\,dx = \boldsymbol{\frac{T_1}{1 - e^{-k}}}$$

[1] 定数関数 $f(x) = 0$ のとき，$(*)$ は成立しない．

(3) $h(x) = e^{-x}|\cos \pi x|$ より，求める $\lim_{z\to\infty} V(z)$ は，(2) で求めた極限値について，$k=1$，$f(x) = |\cos \pi x|$ を適用したものである．このとき

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^1 e^{-x}|\cos \pi x|\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\cos \pi x\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}\cos \pi x\,dx \end{aligned}$$

ここで，$e^{-x}\cos \pi x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{1+\pi^2}(\pi \sin \pi x - \cos \pi x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} T_1 &= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) \\ &= \frac{1}{1+\pi^2}\{2\pi e^{-\frac{1}{2}} - (-1) - e^{-1}\} \\ &= \frac{1 + 2\pi e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{1+\pi^2} \end{aligned}$$

よって，上式および (2) の結果に $k=1$ を代入して

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} V(z) &= \frac{1}{1-e^{-1}} \times \frac{1 + 2\pi e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{1+\pi^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{e + 2\pi\sqrt{e} - 1}{(e-1)(1+\pi^2)}} \end{aligned}$$