平成 21 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部 (建築学科を除く)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ n を自然数とする．$x \geqq 0$ において定義された関数 $f_n(x) = \displaystyle\int_{e^{-x}}^{1} \left(\log \frac{1}{t}\right)^n dt$ について，以下の問いに答えよ．なお，必要ならば，任意の整数 m について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $f_n(x)$ の導関数 $\dfrac{df_n(x)}{dx}$ を求めよ．

(2) 関数 $f_1(x)$ を求めよ．

(3) $n > 1$ のときの $f_n(x)$ と $f_{n-1}(x)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ を n を用いて表せ．

$\boxed{2}$ a，b は実数 (ただし，$b \neq 0$) で，$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & a+2b \end{pmatrix}$ とする．また，数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次式により定める．

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 次の関係式を満たす実数 p，q，v，w を求めよ．

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$$

ただし，$p \neq q$，$v < w$ とする．

(2) (1) で求めた v，w から，行列 P を次のように定める．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & w \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) (2) で定めた P を用いて，数列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次式により定める．

$$\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ がともに収束するための a，b が満たすべき条件を求めよ．

3 O を原点とする xyz 空間内の点 A，B，C をそれぞれ A$(-1,\ 2,\ 3)$，B$(0,\ 1,\ 2)$，C$(0,\ 1,\ 0)$ とし，2 点 A，B を通る直線を l とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P は直線 l 上を動き，点 Q は y 軸上を動くものとする．このとき，2 点 P と Q との距離の最小値を求めよ．また，P と Q との距離が最小となるときの P と Q をそれぞれ P_0，Q_0 とする．P_0 と Q_0 の座標を求めよ．

(2) P_0 との距離が s であるような直線 l 上の点の一つを S とする．点 S から三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0\mathrm{C}$ を含む面に下した垂線とその平面との交点を R とするとき，線分 SR の長さを求めよ．

(3) y 軸上に長さ k の線分 DE があり，直線 l 上に長さ m の線分 FG がある．四面体 DEFG の体積を求めよ．

4 点 Q は次の規則で数直線上の負でない整数の上を正の方向へ動くものとする．ただし n は負でない整数とする．

(a) 時刻 0 では点 Q は原点にある．

(b) 点 Q が時刻 T で座標 $2n$ にあるとき，時刻 $T+1$ には確率 $\dfrac{1}{2}$ で座標 $2n+1$ へ移動し，確率 $\dfrac{1}{2}$ で座標 $2n+2$ へ移動する．

(c) 点 Q が時刻 T で座標 $2n+1$ にあるとき，時刻 $T+1$ には確率 1 で座標 $2n+2$ へ移動する．

点 Q が時刻 T で座標 j にある確率を $P(T,\ j)$ と書くことにする．以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 j に対して $P(2,\ j)$ を求めよ．

(2) T，j が自然数であるとき，$P(T,\ j)=0$ となる条件を T，j を用いて表せ．

(3) T が自然数であるとき $P(T,\ 2n)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された連続な関数とし，a，b を正の定数とする．このとき，$f(x)$ が $x \geqq 0$ で

$$0 \leqq f(x) \leqq a + b\int_0^x f(t)\,dt$$

の関係を満たすものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とするとき，$\dfrac{d}{dx}\{g(x)e^{-bx}\} \leqq ae^{-bx}$ が成立することを示せ.

(2) $f(x) \leqq ae^{bx}$ が成立することを示せ.

(3) $F(x)$ は x について連続な関数で，任意の二つの実数 α，β に対して，次の関係を満たすものとする.

$$\bigl|F(\alpha) - F(\beta)\bigr| \leqq |\alpha - \beta|$$

さらに，$x \geqq 0$ で定義された二つの連続な関数 $y(x)$ と $z(x)$ は次の関係式を満たすものとする.

$$y(x) = \int_0^x F\bigl(y(t)\bigr)dt, \quad z(x) = \int_0^x F\bigl(z(t)\bigr)dt$$

このとき，$h(x) = |y(x) - z(x)|$ とおけば，$h(x) \leqq \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$ が成立することを示せ.

(4) $x \geqq 0$ で $y(x) = z(x)$ であることを証明せよ.

解答例

$\boxed{1}$ (1) $$f_n(x)=\int_{e^{-x}}^{1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^n dt \quad \cdots(*)$$

$(*)$ を x で微分すると

$$\frac{df_n(x)}{dx}=-\left(\log\frac{1}{e^{-x}}\right)^n(e^{-x})'=-x^n(-e^{-x})=\boldsymbol{x^n e^{-x}}$$

(2) $(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\int_{e^{-x}}^{1}\log\frac{1}{t}\,dt=\int_{1}^{e^{-x}}\log t\,dt\\&=\Big[\ t(\log t-1)\ \Big]_1^{e^{-x}}=\boldsymbol{-(x+1)e^{-x}+1}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}f_n(x)&=\int_{e^{-x}}^{1}(t)'\left(\log\frac{1}{t}\right)^n dt\\&=\left[\ t\left(\log\frac{1}{t}\right)^n\ \right]_{e^{-x}}^{1}-\int_{e^{-x}}^{1}t\cdot n\left(\log\frac{1}{t}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{t}\right)dt\\&=-e^{-x}x^n+n\int_{e^{-x}}^{1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{n-1}dt\\&=\boldsymbol{-e^{-x}x^n+nf_{n-1}(x)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果より $$\frac{f_n(x)}{n!}-\frac{f_{n-1}(x)}{(n-1)!}=-\frac{e^{-x}x^n}{n!}$$

したがって $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{f_k(x)}{k!}-\frac{f_{k-1}(x)}{(k-1)!}\right\}&=-e^{-x}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\\\frac{f_n(x)}{n!}-f_1(x)&=-e^{-x}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)}{n!}&=-e^{x}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right\}+1\\f_n(x)&=-n!e^{-x}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right\}+n!\end{aligned}$$

任意の整数 m について $\lim\limits_{x\to\infty}x^m e^{-x}=0$ であるから $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=n!}$

補足 $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ は，$x \neq 0$ ならば $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ と表記できる．大学数学では，便宜的に「$0^0=1$」と定義することにより，$x=0$ も含めて $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ と表記している (母関数の表記等で用いられる)．例えば

$$e^x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \cdots ①$$

を，この便宜的な定義により

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \cdots ②$$

と表記している．大学数学では ② は，① の意味で表記されていることを理解しておかなければならない．

研究 本題において，積分

$$\int e^{-x}g(x)\,dx = -e^{-x}\{g(x)+g'(x)+g''(x)+\cdots\}+C$$

が問題の核心である[1](C は積分定数)．(1) の結果から

$$\begin{aligned}
f_n(x) = \int e^{-x}x^n\,dx &= -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(x^n)^{(k)}+C \\
&= -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}+C \\
&= -n!e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+C
\end{aligned}$$

$(*)$ より，$f_n(0)=0$ であるから　　$C=n!$

よって　　$f_n(x) = -n!e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+n!$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf $\boxed{3}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & a+2b \end{pmatrix}$ の特性方程式は

$$\begin{aligned} \lambda^2-\{a+(a+2b)\}\lambda+a(a+2b)-\sqrt{3}b\cdot\sqrt{3}b&=0 \\ \lambda^2-2(a+b)\lambda+(a+3b)(a-b)&=0 \\ \{\lambda-(a-b)\}\{\lambda-(a+3b)\}&=0 \end{aligned}$$

これを解いて，固有値は　$\lambda=a-b,\ a+3b$

$$\begin{aligned} A-(a-b)E&=\begin{pmatrix} b & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & 3b \end{pmatrix} \\ A-(a+3b)E&=\begin{pmatrix} -3b & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって　固有値 $a-b$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

固有値 $a+3b$ に対する固有ベクトルは　$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

条件に注意して　$\boldsymbol{p=a-b,\ q=a+3b,\ v=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ w=\sqrt{3}}$

補足 A は対称行列であるから，固有値 $p,\ q$ に対する 2 つの固有ベクトルは垂直である[2].

(2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & w \end{pmatrix}$ より

$AP=P\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$　P は正則であるから　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

(1) の結果から　　$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a-b} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a+3b} \end{pmatrix}$

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf $\boxed{7}$ を参照.

(3) $P^{-1}AP = B$ の両辺を $n-1$ 乗すると

$$P^{-1}A^{n-1}P = B^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad P^{-1}A^{n-1} = B^{n-1}P^{-1}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = P^{-1}A^{n-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = B^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{w-v}\begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 \\ 0 & q^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & -1 \\ -v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{w-v}\begin{pmatrix} wp^{n-1} & -p^{n-1} \\ -vq^{n-1} & q^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{w-v}\begin{pmatrix} (w\alpha-\beta)p^{n-1} \\ (-v\alpha+\beta)q^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} (\sqrt{3}\alpha-\beta)(a-b)^{n-1} \\ \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}+\beta\right)(a+3b)^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上式より，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ がともに収束するのための条件は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta = \sqrt{3}\alpha} \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{|a+3b| < 1} \\ \boldsymbol{\beta = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}} \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{|a-b| < 1} \\ \boldsymbol{\beta \neq \sqrt{3}\alpha} \textbf{ かつ } \boldsymbol{\beta \neq -\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}} \textbf{ のとき} \\ \boldsymbol{|a+3b| < 1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{|a-b| < 1} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 点 A$(-1,\ 2,\ 3)$，B$(0,\ 1,\ 2)$ を通る直線 l 上の点 P を実数 α を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 2,\ 3) + \alpha(1, -1, -1)$$
$$= (\alpha - 1, -\alpha + 2, -\alpha + 3)$$

y 軸上の点 Q を実数 β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \beta(0,\ 1,\ 0) = (0,\ \beta,\ 0)$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ \beta,\ 0) - (\alpha - 1, -\alpha + 2, -\alpha + 3)$
$$= (-\alpha + 1,\ \alpha + \beta - 2,\ \alpha - 3)$$

l と y 軸はねじれの位置あるから，P と Q との距離が最小となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より

$$-3\alpha - \beta + 6 = 0, \quad \alpha + \beta - 2 = 0$$

これを解いて　$\alpha = 2,\ \beta = 0$　よって　$\mathbf{P_0(1,\ 0,\ 1),\ \ Q_0(0,\ 0,\ 0)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{Q_0C}} = (0,\ 1,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{Q_0P_0}} = (1,\ 0,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1,\ 0, -1)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, -1, -1)$ は l の方向ベクトルで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

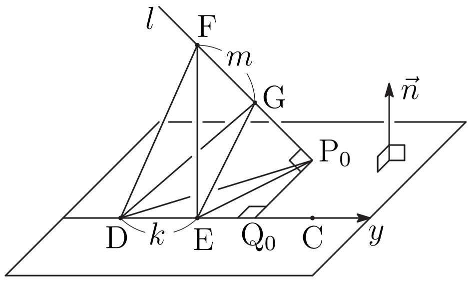
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

S から平面 $\mathrm{P_0Q_0C}$ に下した垂線 SR の長さは

$$\mathrm{SR} = \mathrm{SP_0}|\cos\theta| = s \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}s}$$

(3) $\triangle\mathrm{DEP_0}$ の面積を T とすると

$$T = \frac{1}{2}\mathrm{P_0Q_0} \times \mathrm{DE} = \frac{1}{2}\sqrt{2}k$$



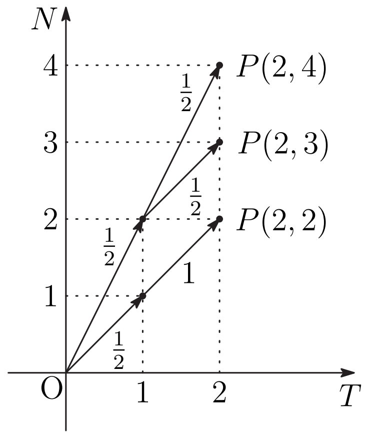
四面体 $\mathrm{FDEP_0}$ の体積は

$$\frac{1}{3}T \times \mathrm{FP_0}|\cos\theta| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}k \times \mathrm{FP_0} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}k \cdot \mathrm{FP_0}$$

同様に，四面体 $\mathrm{GDEP_0}$ の体積は　$\dfrac{\sqrt{3}}{9}k \cdot \mathrm{GP_0}$

よって，四面体 DEFG の体積は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{9}km}$

$\boxed{4}$ (1) 時刻 T のときの座標を N とすると，$P(2,\ j)$ は右のグラフから (j は自然数)



$$P(2,\ 1)=\mathbf{0}$$
$$P(2,\ 2)=\frac{1}{2}\times 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$P(2,\ 3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$
$$P(2,\ 4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$
$$P(2,\ j)=\mathbf{0}\quad\boldsymbol{(j\geqq 5)}$$

(2) (1) のグラフから

$$P(1,\ 1)=\frac{1}{2},\quad P(1,\ 2)=\frac{1}{2}$$

時刻が T から $T+1$ に変化するとき，Q の座標は 1 または 2 だけ増える．したがって，Q の座標 N は

$$T\leqq N\leqq 2T$$

時刻 T について

$$P(T,\ j)\neq 0\quad(T\leqq j\leqq 2T)\qquad\cdots(*)$$

であると仮定すると，$(T,\ j)$ から $(T+1, j+1)$ への移動があり，$(T,\ 2T)$ から $(T+1,\ 2T+2)$ への移動もある．したがって

$$P(T+1,\ j)\neq 0\quad(T+1\leqq j\leqq 2T+2)$$

よって，数学的帰納法により，すべての時刻 T について，$(*)$ が成立する．したがって，$P(T, j)=0$ となる条件は　$\boldsymbol{j<T}$ **または** $\boldsymbol{2T<j}$

(3) (1) のグラフで示した座標 N が，偶数であるとき，2 つの事象

$$A: N\to N+2,\quad B: N\to N+1\to N+2$$

が起きる確率はともに $\dfrac{1}{2}$ で，座標はともに 2 増えると同時に A は T が 1 増え，B は T が 2 増える．事象 A が a 回，事象 B が b 回起きる確率は

$$P(a+2b,\ 2a+2b)={}_{a+b}\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}$$

ここで　$a+2b=T$，$2a+2b=2n$ とおくと　$a+b=n$，$a=2n-T$

よって　$\boldsymbol{P(T,\ 2n)=\begin{cases}{}_n\mathrm{C}_{2n-T}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{T}{2}\leqq n\leqq T\right)\\ 0 & \left(n<\frac{T}{2}\ \text{または}\ n>T\right)\end{cases}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $$0 \leqq f(x) \leqq a + b\int_0^x f(t)\,dt \quad (x \geqq 0) \quad \cdots(*)$$

$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \cdots$ ① より　　$g'(x) = f(x)$

これらを $(*)$ に代入して　　$0 \leqq g'(x) \leqq a + bg(x)$

上式より，$g'(x) - bg(x) \leqq a$ の両辺に e^{-bx} をかけると

$$g'(x)e^{-bx} + g(x)(-be^{-bx}) \leqq ae^{-bx}$$
$$g'(x)e^{-bx} + g(x)(e^{-bx})' \leqq ae^{-bx}$$
$$\frac{d}{dx}\{g(x)e^{-bx}\} \leqq ae^{-bx}$$

(2) ① より，$g(0) = 0$．これと (1) の結果から，$x \geqq 0$ に対して

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\left\{g(t)e^{-bt}\right\}dt \leqq \int_0^x ae^{-bt}\,dt$$
$$\Big[\,g(t)e^{-bt}\,\Big]_0^x \leqq \Big[-\frac{a}{b}e^{-bt}\Big]_0^x$$
$$g(x)e^{-bx} \leqq -\frac{a}{b}e^{-bx} + \frac{a}{b}$$
$$a + bg(x) \leqq ae^{bx}$$

すなわち　$a + b\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leqq ae^{bx}$　$(*)$ より　$f(x) \leqq ae^{bx}$

(3) $y(x) = \displaystyle\int_0^x F\big(y(t)\big)\,dt$，$z(x) = \displaystyle\int_0^x F\big(z(t)\big)\,dt$ より

$$y(x) - z(x) = \int_0^x F\big(y(t)\big)\,dt - \int_0^x F\big(z(t)\big)\,dt$$
$$= \int_0^x \left\{F\big(y(t)\big) - F\big(z(t)\big)\right\}dt$$

よって　　$$|y(x) - z(x)| = \left|\int_0^x \left\{F\big(y(t)\big) - F\big(z(t)\big)\right\}dt\right|$$
$$\leqq \int_0^x \left|F\big(y(t)\big) - F\big(z(t)\big)\right|dt \leqq \int_0^x |y(t) - z(t)|\,dt$$

したがって　　$h(x) \leqq \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$

(4) (3) の結果は $(*)$ に $a = 0$，$b = 1$ とし，$f(x)$ を $h(x)$ に適用したものであるから，(2) の結果より，$x \geqq 0$ で

$$h(x) \leqq 0{\cdot}e^x \quad \text{すなわち} \quad |f(x) - g(x)| \leqq 0 \quad \text{よって} \quad f(x) = g(x)$$