平成 20 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部 (建築学科を除く)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B・C

1 平面上の点 A，B，C の座標をそれぞれ $(0,\ a)$，$(b,\ 0)$，$(c,\ 0)$ とする．ただし $a>0$，$b<0$，$c>0$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 BCH の垂心が点 A となるような点 H の座標を求めよ．

(2) 線分 HA の中点を M，線分 BC の中点を P，線分 BH の中点を Q とする．$\angle\mathrm{PQM}=90^\circ$ であることを示せ．

(3) 点 P，Q，M を通る円の中心 N の座標を求めよ．

(4) 点 P，Q，M を通る円は，線分 AB の中点 R および原点も通ることを示せ．

2 図 1 と図 2 は碁盤の目状の道路とし，すべて等間隔であるとする．

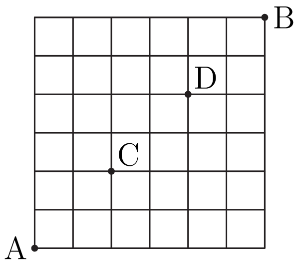


図 1

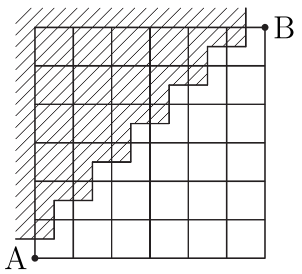


図 2

以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ．

(2) 図 1 において，点 A から点 B に行く最短経路で，点 C と点 D のどちらも通らないものは全部で何通りあるか求めよ．

(3) 図 2 において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ．ただし斜線の部分は通れないものとする．

3 行列 B，E，A をそれぞれ $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A=E+aB$ と定める．ここで a は実数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $P=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が $P=AP$ を満たすとき，x と y が満たすべき条件を求めよ．

(2) 行列 A の表す移動が原点を通る直線に関する対称移動であるような a の値と，その直線を求めよ．

(3) $A^n=E+u_nB$ を満たす実数 u_n を a と n を用いて表せ．ただし n は自然数とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上の双曲線 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $(a > 0,\ b > 0)$ と
円 $C_2 : x^2 + (y - \sqrt{a^2 + b^2}\,)^2 = c^2$ $(c > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 双曲線 C_1 と円 C_2 が接するとき，c を a と b で表せ．

(2) 双曲線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数が，0 個，1 個，2 個，3 個，4 個のそれぞれの場合に c の取り得る範囲を a と b で表せ．

(3) $c = \dfrac{b}{2} + 1$ のとき，共有点が 2 個になる範囲を ab 平面上で図示せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)$ $(x \geqq -1)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{1+x} & (x \geqq 0) \\ \dfrac{\log(1-x)}{1-x} & (-1 \leqq x < 0) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．なお，自然対数の底を e とし，必要ならば $2 < e < 3$ であることを用いてよい．

(1) $f(x)$ の増減を調べよ．また，$f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．

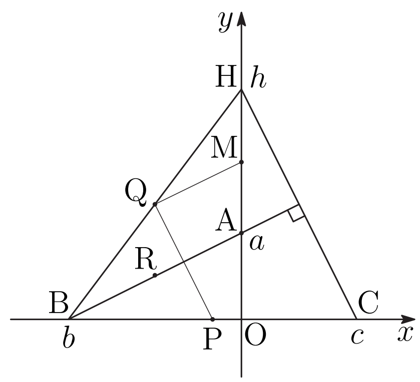
(2) 実数 a に対して，$S(a) = \displaystyle\int_{-1}^{e-1} |f(x) - a|\, dx$ とおく．$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{e}$ における $S(a)$ の最小値を与える a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) BC⊥AH であるから，H は y 軸上の点で，H$(0,\ h)$ とおける．A は △HBC の垂心であるから，BA⊥CH より

$$\frac{a}{-b}\cdot\frac{h}{-c}=-1 \quad ゆえに \quad h=-\frac{bc}{a}$$

よって　　$\mathbf{H}\left(\mathbf{0},-\dfrac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}\right)$



(2) 2 点 P，Q はそれぞれ線分 BC，BH の中点である．中点連結定理により

$$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{CH} \quad \cdots ①$$

2 点 Q，M はそれぞれ線分 HB，HA の中点である．中点連結定理により

$$\mathrm{QM}/\!/\mathrm{BA} \quad \cdots ②$$

BA⊥CH であるから，①，② より　　$\angle\mathrm{PQM}=90^\circ$

(3) (2) の結果から，3 点 P，Q，M を通る円は，PM を直径とする円である．N は 2 点 P$\left(\dfrac{b+c}{2},\ 0\right)$，M$\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{bc}{2a}\right)$ の中点であるから

$$\mathbf{N}\left(\frac{\boldsymbol{b+c}}{\mathbf{4}},\ \frac{\boldsymbol{a^2-bc}}{\mathbf{4}\boldsymbol{a}}\right)$$

(4) 2 点 M，R はそれぞれ線分 AH，AB の中点である．中点連結定理により

$$\mathrm{MR}/\!/\mathrm{HB} \quad \cdots ③$$

2 点 R，P はそれぞれ線分 BA，BC の中点である．中点連結定理により

$$\mathrm{RP}/\!/\mathrm{AC} \quad \cdots ④$$

A は △HBC の垂心であるから HB⊥AC．③，④ より　$\angle\mathrm{MRP}=90^\circ$
(1) の図で示したように　$\angle\mathrm{MOP}=90^\circ$
よって，R および O は PM を直径とする円周上にある．

解説 本題は，9 点円 (オイラー円) に関する理解が必要である．

オイラー線

　△ABC の垂心 H について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ とする．線分 AB および BC の垂直二等分線の方程式は，実数 s，t を用いて

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c},\quad \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}$$

△ABC の外心を O とすると，O はこれらの交点であるから

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+t\vec{a}\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立であるから　　$s=t=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

また，△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

上の 2 式から　　$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{HO}}$

よって，垂心，重心，外心は同一直線 (**オイラー線**) 上にあり，G は線分 HO を 2 : 1 に内分する点である．

　ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

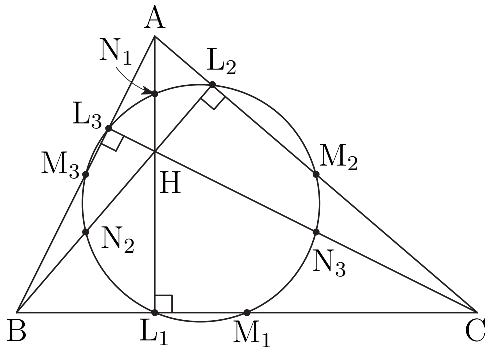
$$k=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\quad\cdots(*)$$

とおく．△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\begin{aligned}R^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{HO}}|^2&=\left|\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)\end{aligned}$$

9 点円 (オイラー円)

$\triangle$ABC の垂心 H から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 $\mathrm{HL_1}$，$\mathrm{HL_2}$，$\mathrm{HL_3}$ を引く．また，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ とし，さらに，HA，HB，HC の中点をそれぞれ $\mathrm{N_1}$，$\mathrm{N_2}$，$\mathrm{N_3}$ とする．



3 点 L_i，M_i，N_i を通る円を C_i とすると $(i=1,2,3)$，C_i は $\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i$ を直径とする円である．C_i 上の点 P_i に対して $\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{HP}_i}$ とおく．まず，C_1 のベクトル方程式は

$$\left(\vec{x}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}}{2}\right)=0$$

(∗) に注意して
$$\left|\vec{x}-\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k) \qquad \cdots(**)$$

同様の計算により，C_2 および C_3 のベクトル方程式も (∗∗) に一致する[1]．ゆえに L_i，M_i，N_i $(i=1,2,3)$ は同一円周上にあり，この円を **9 点円 (オイラー円)** という．

(∗∗) の中心を Q とすると，Q もオイラー線上にあり，Q は $\triangle$ABC の垂心 H と外心 O の中点である．また，(∗∗) の半径を r とすると

$$r^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

したがって，上式および前ページの結果から

$$r^2=\frac{1}{4}R^2 \quad \text{すなわち} \quad r=\frac{1}{2}R$$

これらの内容については，図形の性質 (数学 A) の分野からの出題が多いが，複素数平面 (数学 III) で出題されることもある[2]．

---

[1]ベクトル方程式における $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の対称性からも明らか．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点Aから点Bに行く最短経路の総数を $n(U)$ とすると

$$n(U)=\frac{12!}{6!6!}=\mathbf{924}\ (\text{通り})$$

(2) 点Aから点Bに行く最短経路で，点C，点Dを通る事象をそれぞれ C，D とすると

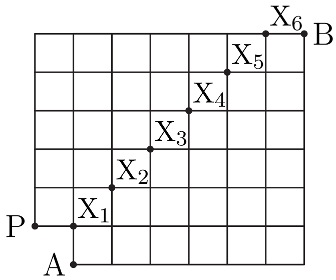
$$n(C)=n(D)=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{8!}{4!4!}=420$$
$$n(C\cap D)=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}=216$$

したがって　$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$
$=420+420-216=624$

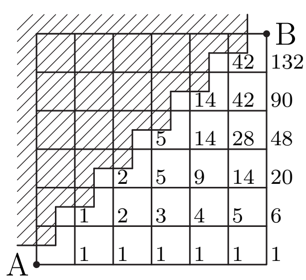
求める総数は $n(\overline{C}\cap\overline{D})$ であるから

$$\begin{aligned}n(\overline{C}\cap\overline{D})&=n(\overline{C\cup D})\\&=n(U)-n(C\cup D)\\&=924-624=\mathbf{300}\ (\text{通り})\end{aligned}$$

(3) 図Iにおいて，点Aから点Bに行く最短経路で，少なくとも X_i $(1\leqq i\leqq 6)$ を通る事象を X とする．Aから X_i へ行く最短経路の総数とPから X_i へ行く最短経路の総数は等しい．したがって，$n(X)$ は，PからBへ行く最短経路の総数に等しい．



図I



図II

よって，求める総数は

$$n(U)-n(X)=\frac{12!}{6!6!}-\frac{12!}{5!7!}=924-792=\mathbf{132}\ (\text{通り})$$

別解 図IIのように，順に数え上げてもよい．

解説 (3) で $n\times n$ の場合は　${}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{2n}\mathrm{C}_n-\dfrac{n}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$

$c_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ $(n=0,1,2\cdots)$ をカタラン数 (Catalan number) という．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$A-E=aB$ であるから，$P=AP$ より

$$(A-E)P=aBP=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって $$a\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $$\begin{cases} \boldsymbol{a=0\ \textbf{のとき}\ \ x,\ y\ \textbf{は任意の数}} \\ \boldsymbol{a\neq 0\ \textbf{のとき}\ \ x-2y=0} \end{cases}$$

(2) (1) の結果から，$a\neq 0$ のとき，直線 $x-2y=$ 上の点は，行列 A による不動点である．

この直線の法線ベクトル $N=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ について，$AN=-N$ が成立する a の値を求めればよい．

$$\begin{pmatrix} 1+a & -2a \\ -2a & 1+4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-\frac{2}{5}}$$

このとき，対称となる直線は　$\boldsymbol{x-2y=0}$

(3) 行列 A の特性方程式は　$\lambda^2-(5a+2)\lambda+5a+1=0$

したがって，固有値は　$\lambda=1,\ 5a+1$

(i) $a=0$ のとき，$A=E$ であるから　$A^n=E$

(ii) $a\neq 0$ のとき，A のスペクトル分解[3]は

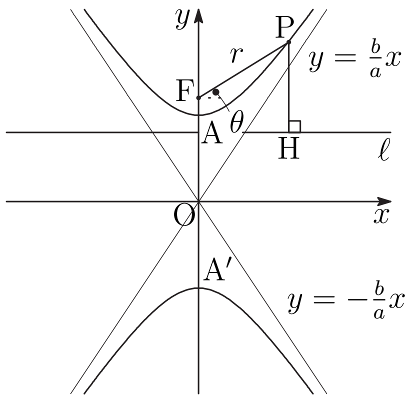
$$\begin{aligned} A&=(5a+1)\cdot\frac{A-E}{(5a+1)-1}+\frac{A-(5a+1)E}{1-(5a+1)} \\ &=(5a+1)\cdot\frac{B}{5}+\left(E-\frac{B}{5}\right) \end{aligned}$$

よって $$\begin{aligned} A^n&=(5a+1)^n\cdot\frac{B}{5}+\left(E-\frac{B}{5}\right) \\ &=E+\frac{1}{5}\{(5a+1)^n-1\}B \end{aligned}$$

(i)，(ii) より $$\boldsymbol{u_n=\frac{1}{5}\{(5a+1)^n-1\}}$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf $\boxed{2}$

$\boxed{4}$ (1) 円 $C_2 : x^2+(y-\sqrt{a^2+b^2})^2=c^2$ の中心 $(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$ を F とおく．F は双曲線 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の焦点である．C_1 の離心率は $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ であるから，$\mathrm{F}(0,\ be)$ とおけ，準線 ℓ は $y=\dfrac{b}{e}$ である．F を極，$r=\mathrm{FP}$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とし，垂線 PH を 2 通りに表すと



$$\frac{r}{e}=r\sin\theta+be-\frac{b}{e} \qquad ゆえに \qquad r=\frac{b(e^2-1)}{1-e\sin\theta} \quad \cdots(*)$$

図のように極方程式[4] $(*)$ から，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，頂点 $\mathrm{A}(0,\ b)$ および $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，頂点 $\mathrm{A}'(0,-b)$ で $|r|$ は極小となる．
したがって，C_1 と C_2 が接するとき

$$c=\frac{b(e^2-1)}{|1\mp e|}=b(e\pm 1)=\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}\pm b}$$

補足 $\tan\alpha=\frac{b}{a}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\alpha,\ \pi-\alpha$ のとき，C_1 上の点 P は存在しない (漸近線に平行なため)．$(*)$ において，次の値からも明らか．

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{e}$$

C_1 上の点 P は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\alpha$ のとき第 1 象限，$\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき第 3 象限，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi-\alpha$ のとき第 4 象限，$\pi-\alpha<\theta<\frac{3}{2}\pi$ のとき第 2 象限にある．

(2) (1) の結果から

0 個のとき $\boldsymbol{0<c<\sqrt{a^2+b^2}-b}$
1 個のとき $\boldsymbol{c=\sqrt{a^2+b^2}-b}$
2 個のとき $\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}-b<c<\sqrt{a^2+b^2}+b}$
3 個のとき $\boldsymbol{c=\sqrt{a^2+b^2}+b}$
4 個のとき $\boldsymbol{c>\sqrt{a^2+b^2}+b}$

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf $\boxed{3}$

(3) $c = \dfrac{b}{2} + 1$ のとき，(2) の結果から共有点が 2 個であるとき

$$\sqrt{a^2+b^2} - b < \frac{b}{2} + 1 < \sqrt{a^2+b^2} + b$$

したがって $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} < 1 + \dfrac{3}{2}b \\ \sqrt{a^2+b^2} > 1 - \dfrac{3}{2}b \end{cases}$

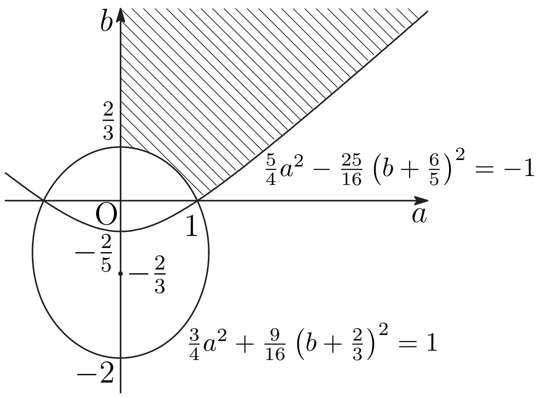
$b > 0$ より，第 1 式の両辺は正であるから

$$a^2 + b^2 < 1 + 3b + \frac{9}{4}b^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{5}{4}a^2 - \frac{25}{16}\left(b + \frac{6}{5}\right)^2 < -1 \quad \cdots ①$$

$b \geqq 2$ のとき，第 2 式は常に成立する．$0 < b < 2$ のとき

$$a^2 + b^2 > 1 - b + \frac{1}{4}b^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{16}\left(b + \frac{2}{3}\right)^2 > 1 \quad \cdots ②$$

$a > 0$，$b > 0$ であるから，求める領域は，①，② の共通部分で下の図の斜線部分で境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x)}{1+x} & (x \geqq 0)\\ \dfrac{\log(1-x)}{1-x} & (-1 \leqq x < 0)\end{cases}$

(i) $x \geqq 0$ のとき

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{1+x}\cdot(1+x)-\log(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\log(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$\log(1+x)=1$　すなわち　$x=e-1$

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-1}{1-x}\cdot(1-x)+\log(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{-1+\log(1-x)}{(1-x)^2}$$

$1<1-x \leqq 2$ より，$0<\log(1-x)<1$ であるから　$f'(x)<0$

(i)，(ii) より，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{\log 2}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ のグラフは，y 軸に関して対称であるから

$$\text{最大値 } \boldsymbol{f(e-1)=\frac{1}{e}},\ \text{最小値 } \boldsymbol{f(0)=0}$$

(2) $y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ のグラフは，y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{-1}^{e-1}|f(x)-a|\,dx\\&=2\int_0^1|f(x)-a|\,dx+\int_1^{e-1}|f(x)-a|\,dx \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$f(x)-a$ の原始関数の1つを

$$F(x)=\frac{1}{2}\{\log(1+x)\}^2-ax \quad (x \geqq 0)$$

とおく．区間 $[0,\ e-1]$ で単調増加であるから，$a\left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{e}\right)$ に対して，$f(t)=a$ を満たす t $(0 \leqq t \leqq e-1)$ がただ1つ存在する．

(i) $0 \leqq a \leqq \dfrac{\log 2}{2}$ のとき $(0 \leqq t \leqq 1)$，$(*)$ より

$$\begin{aligned} S(a) &= -2\Big[\,F(x)\,\Big]_0^t + 2\Big[\,F(x)\,\Big]_t^1 + \Big[\,F(x)\,\Big]_1^{e-1} \\ &= 2F(0) - 4F(t) + F(1) + F(e-1) \end{aligned}$$

ここで　　$F(0) = 0,$

$$F(t) = \frac{1}{2}\{\log(1+t)\}^2 - at = \frac{1}{2}\{\log(1+t)\}^2 - tf(t),$$

$$F(1) = \frac{1}{2}(\log 2)^2 - a = \frac{1}{2}(\log 2)^2 - f(t),$$

$$F(e-1) = \frac{1}{2} - a(e-1) = \frac{1}{2} - (e-1)f(t)$$

したがって　　$\dfrac{d}{dt}F(0) = 0,\quad \dfrac{d}{dt}F(t) = -tf'(t),$

$$\frac{d}{dt}F(1) = -f'(t),\quad \frac{d}{dt}F(e-1) = -(e-1)f'(t)$$

このとき，$g(t) = S(a)$ とおくと，$g'(t) = (4t-e)f'(t)$

$f'(t) > 0$ であるから，$g(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ は，$t = \dfrac{e}{4}$ で極小値をとる．

(ii) $\dfrac{\log 2}{2} < a \leqq \dfrac{1}{e}$ のとき $(1 < t \leqq e-1)$，$(*)$ より

$$\begin{aligned} S(a) &= -2\Big[\,F(x)\,\Big]_0^1 - \Big[\,F(x)\,\Big]_1^t + \Big[\,F(x)\,\Big]_t^{e-1} \\ &= 2F(0) - F(1) - 2F(t) + F(e-1) \end{aligned}$$

このとき，$h(t) = S(a)$ とおくと，$h'(t) = (2t+2-e)f'(t)$

$f'(t) > 0$ であるから，$1 < t \leqq e-1$ で，$h'(t) > 0$
したがって，$h(t)$ は単調増加．

(i)，(ii) より，$S(a)$ が最小となる a の値は

$$a = f\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{\log\left(1+\dfrac{e}{4}\right)}{1+\dfrac{e}{4}} = \boldsymbol{\frac{4\{\log(4+e) - \log 4\}}{4+e}}$$