平成 19 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部 (建築学科を除く)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 4)，B(4, −2, 2)，C(2, 2, −2) を頂点とする四面体において，頂点 O から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を Q，頂点 A から三角形 OBC を含む面に下ろした垂線とその面との交点を R とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OQ の長さを求めよ．

(2) 三角形 OBC の面積を求めよ．

(3) 点 R の座標を求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上の点の移動 (1 次変換) に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = -x$ に関する対称移動を表す行列 A を求めよ．

(2) 点 P を原点を中心として正の向き (反時計回り) に 60 度回転し，さらに $y = -x$ に関して対称移動したときの点を P$'$ とする．点 P を P$'$ に移す移動を表す行列 B を求めよ．

(3) 点 Q(1, 0) に対して B で表される移動を 3 回行った点を R とする．点 R の座標を求めよ．

(4) B で表される移動により点 S が点 (1, 1) に移動したとする．点 S の座標を求めよ．

$\boxed{3}$ 関数

$$f(x) = \begin{cases} x\log x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \bigl|x\log|x|\bigr| & (x < 0) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $t \geqq 0$ のとき，不等式 $e^t \geqq 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ と $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を証明せよ．

(3) a を実数の定数とするとき，x についての方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(4) $S = \displaystyle\lim_{c\to+0}\int_c^1 |f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1つのさいころを振り偶数の目が出たら持ち点を2倍にし，奇数の目が出たら持ち点を0.5倍して小数点以下を切り捨てるとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 初めの持ち点を10点とする．さいころを7回投げた後に持ち点が50点以上である確率 P を求めよ．

(2) 初めの持ち点を3点とする．さいころを5回投げた後に持ち点が5点以上である確率 Q を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 三角形ABCにおいて，辺ABの長さを x，辺BCの長さを y，辺ACの長さを z とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $y = 4$，$z = 4$ とする．x が4から7までの値をとるとき，三角形ABCの面積の最大値と最小値を求めよ．

(2) x，y，z がいずれも4から7までの値をとるとき，三角形ABCの面積の最大値と最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(4,-2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 2,-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 4,\ -4)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{6},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{3},\quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{2}\quad\cdots ①$

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ より

$$6\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 6\times \mathrm{OQ}\quad \text{よって}\quad \mathbf{OQ=2\sqrt{2}}$$

補足 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと　$\mathrm{OQ}=\dfrac{\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}}{|\vec{c}-\vec{b}|}$

(2) ① より　$\mathbf{\triangle OBC=6\sqrt{2}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(4,-2,\ 2)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 2,-2)$，に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n})\vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n})\vec{n}\\&=(1,\ 1,\ 4)-\frac{5}{\sqrt{2}}\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(1,-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，点 R の座標は　$\mathbf{R}\left(\mathbf{1},-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

(4) $\mathrm{AR}=\left|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n})\right|=\left|\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ より，四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\times\mathrm{AR}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=\mathbf{10}$$

補足 ベクトル積[1] を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 12,\ 12)$

よって　$V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}})\right|=10$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 $y=-x$ の方向ベクトル T および法線ベクトル N をそれぞれ

$$T=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

とおくと，$AT=T$，$AN=-N$ であるから

$$A\begin{pmatrix}T & N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & -N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}T & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & N\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\\mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}B&=A\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\-1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$BB=E$　$\cdots$①　ゆえに　$B^3=BB^2=BE=B$

したがって，B^3 による Q の像 R は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\-1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}\quad\text{よって}\quad \mathbf{R}\left(-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}},-\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)$$

(4) ① より，$B^{-1}=B$ であるから，B^{-1} による $(1,\ 1)$ の像 S は

$$B^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\-1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{S}\left(-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{2}},\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s,\ t \geqq 0$ とする．$e^s \geqq 1$ であるから

$$\int_0^t e^s\,ds \geqq \int_0^t ds \qquad \text{ゆえに} \qquad e^t \geqq 1+t$$

これから，$e^s \geqq 1+s$ であるから

$$\int_0^t e^s\,ds \geqq \int_0^t (1+s)ds \qquad \text{ゆえに} \qquad e^t \geqq 1+t+\frac{t^2}{2}$$

よって，$t \geqq 0$ のとき，不等式 $e^t \geqq 1+t+\dfrac{t^2}{2}$ が成立する．

(2) (1) の結果から，$t>0$ のとき　$e^t > \dfrac{t^2}{2}$　ゆえに　$\dfrac{e^t}{t} > \dfrac{t}{2}$　$\cdots$①

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2}=\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$

これから　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(-t)e^{-t}=0$　ここで，$x=e^{-t}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}x=+0$ より

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\mathbf{0}$$

(3) (i) $x>0$ のとき，$f(x)=x\log x$ より

$$f'(x)=\log x+1$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$x=-t$ とおくと $(0<t<1)$

$$f(-t)=\Big|(-t)\log|-t|\Big|=|t\log t|=-t\log t=-f(t)$$

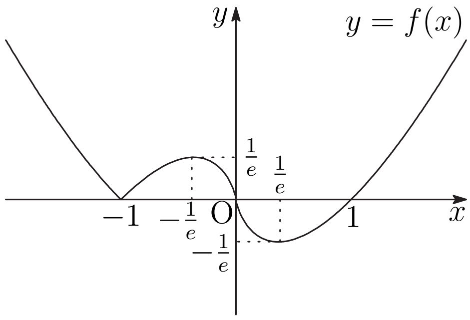
$|x| \leqq 1$ において，$y=f(x)$ は原点に関して対称である $(f(0)=0)$.

(iii) $x<-1$ のとき，$x=-t$ とおくと $(t>1)$

$$f(-t)=\Big|(-t)\log|-t|\Big|=|t\log t|=t\log t=f(t)$$

$|x|>1$ において，$y=f(x)$ は y 軸に関して対称である．

(i),(ii),(iii) から，$y=f(x)$ のグラフは，下の図のようになる．



方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-\dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a=-\dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{e}<a<0,\ \dfrac{1}{e}<a}\ \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a=0,\ \dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{0<a<\dfrac{1}{e}}\textbf{のとき} & \textbf{4 個} \end{cases}$$

(4) $c>0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_c^1 |f(x)|\,dx &= \int_1^c (-x\log x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^2}{4}(1-2\log x)\ \right]_c^1 \\ &= \frac{1}{4}-\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{2}\log c \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から　$\displaystyle\lim_{c\to+0}\frac{c^2}{2}\log c=\lim_{c\to+0}\frac{c}{2}\cdot c\log c=0\cdot 0=0$

よって　$\displaystyle\lim_{c\to+0}\int_c^1 |f(x)|\,dx=\lim_{c\to+0}\left(\frac{1}{4}-\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{2}\log c\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

$\boxed{4}$ (1) 偶数の目が5回，奇数の目が2回出たとき，得点が最小となるのは，最初に奇数が連続して出たときで，その得点は64点.

偶数の目が4回，奇数の目が3回出たとき，得点の最大値は20点.

よって，求める確率Pは，偶数の目が5回以上出る確率であるから

$$P = \frac{{}_7\mathrm{C}_0 + {}_7\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_2}{2^7} = \mathbf{\frac{29}{128}}$$

(2) 偶数の目が4回以上出たとき，得点の最小値は16点.

偶数の目が3回，奇数の目が2回出たとき，得点が5点以上になるのは，次の5通り.

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
○	○	○	×	×
○	○	×	○	×
○	○	×	×	○
○	×	○	○	×
○	×	○	×	○

偶数の目が2回以下のとき，得点の最大値は1点.

よって，求める確率Qは，

$$Q = \frac{{}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + 5}{2^5} = \mathbf{\frac{11}{32}}$$

$\boxed{5}$ (1) ヘロンの公式により，$2s = 4 + 4 + x$ とおくと，三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s-4)(s-4)(s-x) = \left(4 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(4 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}x^2(8+x)(8-x) = \frac{1}{16}x^2(64 - x^2) \\ &= 64 - \frac{1}{16}(32 - x^2)^2 \end{aligned}$$

$4 \leqq x \leqq 7$ であるから，$\boldsymbol{x = 4\sqrt{2}}$ のとき S は最大値 **8** をとり，$\boldsymbol{x = 7}$ のとき S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{15}}{4}}$ をとる．

(2) $4 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 7$ とおいても一般性を失うことなない．
このとき，固定された値 z に対し，三角形 ABC の面積 S は，$x = y = 4$ のとき最小となり，$x = y = z$ のとき最大となるので

$$\frac{1}{2}z\sqrt{16 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} \leqq S \leqq \frac{1}{2}z^2 \sin 60^\circ$$

すなわち $$\frac{1}{4}\sqrt{32^2 - (32 - z^2)^2} \leqq S \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$$

$4 \leqq z \leqq 7$ であるから，$\boldsymbol{x = y = 4,\ z = 7}$ のとき S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{15}}{4}}$ をとり，$\boldsymbol{x = y = z}$ のとき S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{49\sqrt{3}}{4}}$ をとる．