

平成19年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分
工学部(建築学科を除く) 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 4)$, $B(4, -2, 2)$, $C(2, 2, -2)$ を頂点とする四面体において、頂点 O から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を Q , 頂点 A から三角形 OBC を含む面に下ろした垂線とその面との交点を R とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 OQ の長さを求めよ.
- (2) 三角形 OBC の面積を求めよ.
- (3) 点 R の座標を求めよ.
- (4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

2 平面上の点の移動(1次変換)に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 直線 $y = -x$ に関する対称移動を表す行列 A を求めよ.
- (2) 点 P を原点を中心として正の向き(反時計回り)に60度回転し, さらに $y = -x$ に関して対称移動したときの点を P' とする. 点 P を P' に移す移動を表す行列 B を求めよ.
- (3) 点 $Q(1, 0)$ に対して B で表される移動を3回行った点を R とする. 点 R の座標を求めよ.
- (4) B で表される移動により点 S が点 $(1, 1)$ に移動したとする. 点 S の座標を求めよ.

3 関数

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ |x \log |x|| & (x < 0) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ.
- (2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ と $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明せよ.
- (3) a を実数の定数とするとき, x についての方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数を求めよ.
- (4) $S = \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 |f(x)| dx$ の値を求めよ.

- 4 1つのさいころを振り偶数の目が出たら持ち点を2倍にし、奇数の目が出たら持ち点を0.5倍して小数点以下を切り捨てるとする。このとき以下の問いに答えよ。
- (1) 初めの持ち点を10点とする。さいころを7回投げた後に持ち点が50点以上である確率 P を求めよ。
 - (2) 初めの持ち点を3点とする。さいころを5回投げた後に持ち点が5点以上である確率 Q を求めよ。
- 5 三角形ABCにおいて、辺ABの長さを x 、辺BCの長さを y 、辺ACの長さを z とする。このとき以下の問いに答えよ。
- (1) $y = 4$, $z = 4$ とする。 x が4から7までの値をとるとき、三角形ABCの面積の最大値と最小値を求めよ。
 - (2) x , y , z がいずれも4から7までの値をとるとき、三角形ABCの面積の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \vec{OB} = (4, -2, 2), \quad \vec{OC} = (2, 2, -2), \quad \vec{BC} = (-2, 4, -4) \text{ より}$$

$$|\vec{OB}| = 2\sqrt{6}, \quad |\vec{OC}| = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{BC}| = 6, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \Delta OBC = \frac{1}{2} |\vec{OB}| |\vec{OC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Delta OBC = \frac{1}{2} |\vec{BC}| |\vec{OQ}| \text{ より}$$

$$6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times OQ \quad \text{よって} \quad OQ = 2\sqrt{2}$$

$$\text{補足} \quad \vec{b} = \vec{OB}, \quad \vec{c} = \vec{OC} \text{ とおくと} \quad OQ = \frac{\sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2}}{|\vec{c} - \vec{b}|}$$

$$(2) \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad \Delta OBC = 6\sqrt{2}$$

$$(3) \quad \vec{OB} = (4, -2, 2) \text{ と } \vec{OC} = (2, 2, -2), \text{ に垂直な単位ベクトルの1つを}$$

$$\vec{n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

とおくと, $\vec{OA} = \vec{OR} + (\vec{OA} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \vec{OA} - (\vec{OA} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= (1, 1, 4) - \frac{5}{\sqrt{2}} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

よって, 点 R の座標は $\mathbf{R} \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$

$$(4) \quad AR = |(\vec{OA} \cdot \vec{n})| = \left| \frac{5}{\sqrt{2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ より, 四面体 OABC の体積を } V \text{ とすると}$$

$$V = \frac{1}{3} \Delta OBC \times AR = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 10$$

補足 ベクトル積¹ を用いて $\vec{OB} \times \vec{OC} = (0, 12, 12)$

$$\text{よって} \quad V = \frac{1}{6} |\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})| = 10 \quad \blacksquare$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf 4

- 2 (1) 直線 $y = -x$ の方向ベクトル T および法線ベクトル N をそれぞれ

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, $AT = T$, $AN = -N$ であるから

$$A \begin{pmatrix} T & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & -N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} T & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & N \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} B &= A \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $BB = E \dots \textcircled{1}$ ゆえに $B^3 = BB^2 = BE = B$

したがって, B^3 による Q の像 R は

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \mathbf{R} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

- (4) $\textcircled{1}$ より, $B^{-1} = B$ であるから, B^{-1} による $(1, 1)$ の像 S は

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$$

よって $\mathbf{S} \left(-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)$ ■

3 (1) $s, t \geq 0$ とする. $e^s \geq 1$ であるから

$$\int_0^t e^s ds \geq \int_0^t ds \quad \text{ゆえに} \quad e^t \geq 1+t$$

これから, $e^s \geq 1+s$ であるから

$$\int_0^t e^s ds \geq \int_0^t (1+s)ds \quad \text{ゆえに} \quad e^t \geq 1+t+\frac{t^2}{2}$$

よって, $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t \geq 1+t+\frac{t^2}{2}$ が成立する.

(2) (1) の結果から, $t > 0$ のとき $e^t > \frac{t^2}{2}$ ゆえに $\frac{e^t}{t} > \frac{t}{2}$... ①

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2} = \infty \text{ であるから} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

これから $\lim_{t \rightarrow \infty} (-t)e^{-t} = 0$ ここで, $x = e^{-t}$ とおくと, $\lim_{t \rightarrow \infty} x = +0$ より

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

(3) (i) $x > 0$ のとき, $f(x) = x \log x$ より

$$f'(x) = \log x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{e}$$

x	0	...	$\frac{1}{e}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow

(ii) $-1 \leq x < 0$ のとき, $x = -t$ とおくと ($0 < t < 1$)

$$f(-t) = \left| (-t) \log |-t| \right| = |t \log t| = -t \log t = -f(t)$$

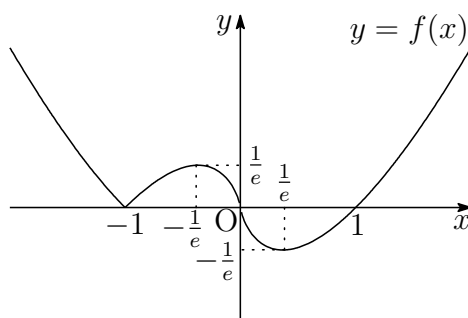
$|x| \leq 1$ において, $y = f(x)$ は原点に関して対称である ($f(0) = 0$).

(iii) $x < -1$ のとき, $x = -t$ とおくと ($t > 1$)

$$f(-t) = \left| (-t) \log |-t| \right| = |t \log t| = t \log t = f(t)$$

$|x| > 1$ において, $y = f(x)$ は y 軸に関して対称である.

(i),(ii),(iii) から, $y = f(x)$ のグラフは, 下の図のようになる.



方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数は, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数であるから

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < -\frac{1}{e} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = -\frac{1}{e} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -\frac{1}{e} < a < 0, \frac{1}{e} < a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 0, \frac{1}{e} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(4) $c > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_c^1 |f(x)| dx &= \int_1^c (-x \log x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} (1 - 2 \log x) \right]_c^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} \log c \end{aligned}$$

ここで, (2) の結果から $\lim_{c \rightarrow +0} \frac{c^2}{2} \log c = \lim_{c \rightarrow +0} \frac{c}{2} \cdot c \log c = 0 \cdot 0 = 0$

$$\text{よって } \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 |f(x)| dx = \lim_{c \rightarrow +0} \left(\frac{1}{4} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} \log c \right) = \frac{1}{4}$$

■

- 4 (1) 偶数の目が5回，奇数の目が2回出たとき，得点が最小となるのは，最初に奇数が連続して出たときで，その得点は64点。

偶数の目が4回，奇数の目が3回出たとき，得点の最大値は20点。

よって，求める確率 P は，偶数の目が5回以上出る確率であるから

$$P = \frac{{}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2}{2^7} = \frac{29}{128}$$

- (2) 偶数の目が4回以上出たとき，得点の最小値は16点。

偶数の目が3回，奇数の目が2回出たとき，得点が5点以上になるのは，次の5通り。

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
○	○	○	×	×
○	○	×	○	×
○	○	×	×	○
○	×	○	○	×
○	×	○	×	○

偶数の目が2回以下のとき，得点の最大値は1点。

よって，求める確率 Q は，

$$Q = \frac{{}_5C_0 + {}_5C_1 + 5}{2^5} = \frac{11}{32}$$



- 5** (1) ヘロンの公式により, $2s = 4 + 4 + x$ とおくと, 三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s-4)(s-4)(s-x) = \left(4 + \frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(4 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}x^2(8+x)(8-x) = \frac{1}{16}x^2(64-x^2) \\ &= 64 - \frac{1}{16}(32-x^2)^2 \end{aligned}$$

$4 \leq x \leq 7$ であるから, $x = 4\sqrt{2}$ のとき S は最大値 8 をとり, $x = 7$ のとき S は最小値 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ をとる.

- (2) $4 \leq x \leq y \leq z \leq 7$ とおいても一般性を失うことない.

このとき, 固定された値 z に対し, 三角形 ABC の面積 S は, $x = y = 4$ のとき最小となり, $x = y = z$ のとき最大となるので

$$\frac{1}{2}z\sqrt{16 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} \leq S \leq \frac{1}{2}z^2 \sin 60^\circ$$

すなわち
$$\frac{1}{4}\sqrt{32^2 - (32 - z^2)^2} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$$

$4 \leq z \leq 7$ であるから, $x = y = 4$, $z = 7$ のとき S は最小値 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ をとり, $x = y = z$ のとき S は最大値 $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ をとる. ■