

平成18年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分  
工学部(建築学科を除く) 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 2つの曲線  $C_1: y = ax^2$ ,  $C_2: x^2 + (y - p)^2 = r^2$  が異なる2点で接するとする。ただし  $a, p, r$  を正の定数とする。

- (1)  $p$  を  $a$  と  $r$  の式で表せ。また、曲線  $C_1$  と  $C_2$  の接点の  $x$  座標  $q$  を  $a$  と  $r$  の式で表せ。ただし  $q > 0$  とする。
- (2)  $a \cdot r = 1$  のとき、曲線  $C_1$  と  $C_2$  によって囲まれた部分の面積を求めよ。

2 A と B の2つの袋があり、A の袋には赤玉が2個、白玉が5個、B の袋には赤玉が  $m$  個、白玉が  $n$  個入っている。ただし、 $m$  と  $n$  は0以上の整数で  $m + n = 4$  とする。

- (1) A の袋から3個の玉を同時に取り出すとき、赤玉が2個、白玉が1個である確率  $P_1$  を求めよ。
- (2) A の袋から3個の玉を取り出し、それらをBの袋に入れる。その後Bの袋から2個の玉を同時に取り出すとき、赤玉が1個、白玉が1個である確率  $P_2$  を求めよ。
- (3) 確率  $P_2$  が最大となる  $m$  と  $n$  の値を求めよ。

3 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n + c} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定める。ただし、 $c$  は  $0 \leq c < 2$  を満たす定数とする。

(1)  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおくとき、

$$b_{n+1} - pb_n = q \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる定数  $p, q$  を  $c$  の式で表せ。

- (2)  $a_n$  を  $n$  と  $c$  の式で表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を  $c$  の式で表せ。

- 4 平面上に異なる  $n$  個の点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  を考える. ただし,  $x_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) とする. また, 次の関数  $f(a)$  の最小値を与える  $a$  を  $a_0$  とする.

$$f(a) = \sum_{k=1}^n (ax_k - y_k)^2$$

- (1)  $a_0$  を求めよ.
- (2)  $n$  個の点のいずれも, 直線  $y = a_0x$  上にはないものとする. このとき,  $n$  個の点のうち少なくとも 1 点は直線  $y = a_0x$  の上側にあることを示せ.
- (3)  $x_k = bk, y_k = c$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) とする. ここで,  $b, c$  は正の定数である. このとき,  $n$  個の点のうちの 1 点が直線  $y = a_0x$  上にあるための条件は,  $b, c$  によらない条件であることを示せ.

- 5 行列

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 方程式

$$\begin{cases} 15x + 6y = \lambda x \\ 6x + 10y = \lambda y \end{cases}$$

が  $x = y = 0$  以外の解をもつときの  $\lambda$  の値を 2 つ求めよ.

- (2) (1) で求めた  $\lambda$  の 2 つの値を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とするとき,

$$AT = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たし, 行列式をもつ  $T$  を 1 つ求め, その逆行列  $T^{-1}$  を求めよ.

- (3)  $A^n$  を求めよ.

- (4)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を 0 でない列ベクトルとし,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$$

を求めよ. ただし,  $x_n \neq 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と仮定する.

## 解答例

- 1 (1)  $C_1 : y = ax^2$   
 $C_2 : x^2 + (y - p)^2 = r^2$   
 $C_1, C_2$  から  $x$  を消去すると

$$\frac{y}{a} + (y - p)^2 = r^2$$

$$\text{ゆえに } y^2 - 2\left(p - \frac{1}{2a}\right)y + p^2 - r^2 = 0$$

この方程式は重解  $aq^2$  をもつので、係数に注意して

$$aq^2 = p - \frac{1}{2a}, \quad p^2 - r^2 = \left(p - \frac{1}{2a}\right)^2$$

$$\text{上の第1式から } q^2 = \frac{p}{a} - \frac{1}{2a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{上の第2式から } \frac{p}{a} = \frac{1}{4a^2} + r^2 \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{よって } p = \frac{1}{4a} + ar^2$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } q^2 = r^2 - \frac{1}{4a^2} \quad \text{よって } q = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4a^2}} \quad \left(r > \frac{1}{2a}\right)$$

補足  $r = \frac{1}{2a}$  のとき、 $C_2$  は  $C_1$  の原点における曲率円 (接触円) になる<sup>1</sup>.

- (2)  $ar = 1$  より、 $r = \frac{1}{a}$  を (1) の結果に代入すると

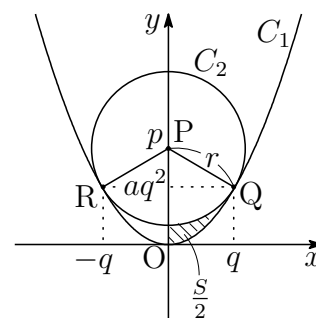
$$p = \frac{1}{4a} + a\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{5}{4a}, \quad q = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$$

$$\text{したがって } P\left(0, \frac{5}{4a}\right), \quad Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}, \frac{3}{4a}\right) \quad \text{ゆえに } \angle OPQ = \frac{\pi}{3}$$

求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4a} + \frac{3}{4a} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} \right)^2 \frac{\pi}{3} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2a}} ax^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2a^2} - \frac{\pi}{6a^2} - \frac{\sqrt{3}}{8a^2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{a^2} \left( \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \right)$$



<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf) [5] を参照

$$\boxed{2} \quad (1) \quad P_1 = \frac{{}_2C_2 \times {}_5C_1}{{}_7C_3} = \frac{1 \times 5}{35} = \frac{1}{7}$$

(2) A の袋から 3 個の玉を取り出したとき、取り出す赤玉の個数を  $X$  とし、その確率を  $P(X = k)$  とすると ( $k = 0, 1, 2$ )

$$P(X = 0) = \frac{{}_2C_0 \times {}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{1 \times 10}{35} = \frac{2}{7}$$

$$P(X = 1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{2 \times 10}{35} = \frac{4}{7}$$

$$P(X = 2) = P_1 = \frac{1}{7}$$

このとき、B の袋の中の赤玉は  $m + k$  個、白玉は  $n + 3 - k$  個であるから

$$\begin{aligned} P_2 &= \sum_{k=0}^2 P(X = k) \times \frac{{}_{m+k}C_1 \times {}_{n+3-k}C_1}{{}_7C_2} \\ &= \frac{1}{147} \{2m(n+3) + 4(m+1)(n+2) + (m+2)(n+1)\} \\ &= \frac{1}{147} (7mn + 15m + 6n + 10) \end{aligned}$$

(3)  $m + n = 4$  より  $n = 4 - m$  を (2) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} 147P_2 &= 7m(4 - m) + 15m + 6(4 - m) + 10 \\ &= -7m^2 + 37m + 34 \\ &= -7 \left( m - \frac{37}{14} \right)^2 + 34 + 7 \left( \frac{37}{14} \right)^2 \end{aligned}$$

$m = 0, 1, 2, 3, 4$  および  $\frac{5}{2} < \frac{37}{14} < 3$  から、 $P_2$  は  $m = 3, n = 1$  のとき、最大となる。 ■

$$\boxed{3} \quad (1) \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n + c} \text{ より } \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{5}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ より } \quad b_{n+1} = \frac{c}{2}b_n + \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに } \quad b_{n+1} - \frac{c}{2}b_n = \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} - pb_n = q \text{ と比較して } \quad p = \frac{c}{2}, \quad q = \frac{5}{2}$$

$$(2) \quad \alpha - \frac{c}{2}\alpha = \frac{5}{2} \cdots \textcircled{2} \text{ とおくと } \left( \alpha = \frac{5}{2-c} \right), \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$b_{n+1} - \alpha = \frac{c}{2}(b_n - \alpha) \quad \text{ゆえに } \quad b_n - \alpha = (b_1 - \alpha) \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 1 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} + \alpha \left\{ 1 - \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} + \frac{5}{2-c} \left\{ 1 - \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{1}{\left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} + \frac{5}{2-c} \left\{ 1 - \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} \right\}}$$

$$(3) \quad 0 \leq c < 2 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ であるから, (2) の結果より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} + \frac{5}{2-c} \left\{ 1 - \left( \frac{c}{2} \right)^{n-1} \right\}} = \frac{2-c}{5}$$

補足  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n + c}$  より,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & c \end{pmatrix}$  とおき,  $A$  をスペクトル分解すると

$$A = 2 \cdot \frac{A - cE}{2-c} + c \cdot \frac{A - 2E}{c-2} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2-c} & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{c-2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } A^{n-1} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2-c} & 0 \end{pmatrix} + c^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{c-2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ \frac{5(2^{n-1} - c^{n-1})}{2-c} & c^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{2^{n-1}a_1 + 0}{\frac{5(2^{n-1} - c^{n-1})}{2-c}a_1 + c^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{\frac{5(2^{n-1} - c^{n-1})}{2-c} + c^{n-1}} \quad \blacksquare$$

4 (1)  $f(a) = \sum_{k=1}^n (ax_k - y_k)^2$  より

$$f(a) = a^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2a \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2$$

$$a^2 \text{ および } a \text{ の係数により } \quad a_0 = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

(2)  $n$  個の  $(x_k, y_k)$  は, 領域  $y < a_0 x$  の点であるから ( $x_k > 0$ )

$$y_k < a_0 x_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n x_k y_k < a_0 \sum_{k=1}^n x_k^2$$

したがって 
$$a_0 > \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

これは, (1) の結果に反する. よって,  $n$  個の点のうち少なくとも 1 点は直線  $y = a_0 x$  の上側にある.

(3)  $x_k = bk, y_k = c$  のとき ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n (bk)^2 = \frac{b^2}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n bk \cdot c = \frac{bc}{2} n(n+1)$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$a_0 = \frac{\frac{bc}{2} n(n+1)}{\frac{b^2}{6} n(n+1)(2n+1)} = \frac{3c}{b(2n+1)}$$

したがって, 点  $(bi, c)$  が直線  $y = \frac{3c}{b(2n+1)} x$  上にあるとき

$$c = \frac{3c}{b(2n+1)} \cdot bi \quad \text{ゆえに} \quad i = \frac{2n+1}{3}$$

これは,  $b, c$  によらない条件である.

補足  $n \equiv 1 \pmod{3}$  が, 求める条件. ■

5 (1) 方程式  $\begin{cases} 15x + 6y = \lambda x \\ 6x + 10y = \lambda y \end{cases}$  より

$$\begin{pmatrix} 15 - \lambda & 6 \\ 6 & 10 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

この方程式が,  $x = y = 0$  以外の解をもつとき, 行列  $\begin{pmatrix} 15 - \lambda & 6 \\ 6 & 10 - \lambda \end{pmatrix}$  は正則ではないので

$$(15 - \lambda)(10 - \lambda) - 6 \cdot 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (\lambda - 19)(\lambda - 6) = 0$$

これを解いて  $\lambda = 19, 6$

(2) (\*) より, 行列  $A$  について

固有値  $\lambda = 19$  に対する固有ベクトルの 1 つは  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

固有値  $\lambda = 6$  に対する固有ベクトルの 1 つは  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

条件から,  $\alpha = 19$ ,  $\beta = 6$ ,  $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  とおけばよい. このとき

$$T^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

補足  $A$  は対称行列であるから, 固有値 19, 6 に対する 2 つの固有ベクトルは垂直である<sup>2</sup>.

(3)  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$  を  $n$  乗すると  $T^{-1}A^nT = \begin{pmatrix} 19^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$

したがって  $A^n = T \begin{pmatrix} 19^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} T^{-1}$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 \cdot 19^n + 4 \cdot 6^n & 6 \cdot 19^n - 6^{n+1} \\ 6 \cdot 19^n - 6^{n+1} & 4 \cdot 19^n + 9 \cdot 6^n \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2003.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf) [7] を参照.

$$(4) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 \cdot 19^n + 4 \cdot 6^n & 6 \cdot 19^n - 6^{n+1} \\ 6 \cdot 19^n - 6^{n+1} & 4 \cdot 19^n + 9 \cdot 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3(3x+2y) \cdot 19^{n-1} + 2(2x-3y) \cdot 6^{n-1} \\ 2(3x+2y) \cdot 19^{n-1} - 3(2x-3y) \cdot 6^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \frac{y_n}{x_n} &= \frac{2(3x+2y) \cdot 19^{n-1} - 3(2x-3y) \cdot 6^{n-1}}{3(3x+2y) \cdot 19^{n-1} + 2(2x-3y) \cdot 6^{n-1}} \\ &= \frac{2(3x+2y) - 3(2x-3y) \left(\frac{6}{19}\right)^{n-1}}{3(3x+2y) + 2(2x-3y) \left(\frac{6}{19}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

ここで,  $3x+2y = 2x-3y = 0$  とすると,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  となり, 条件に反する. したがって,  $3x+2y$ ,  $2x-3y$  の少なくとも一方は 0 ではない.

$$\text{よって } 3x+2y \neq 0 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{2(3x+2y)}{3(3x+2y)} = \frac{2}{3}$$

$$3x+2y = 0 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{-3(2x-3y)}{2(2x-3y)} = -\frac{3}{2}$$

■