平成18年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)120分
工学部(建築学科を除く)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

1 2つの曲線 $C_1 : y = ax^2$，$C_2 : x^2 + (y-p)^2 = r^2$ が異なる2点で接するとする．ただし a，p，r を正の定数とする．

(1) p を a と r の式で表せ．また，曲線 C_1 と C_2 の接点の x 座標 q を a と r の式で表せ．ただし $q > 0$ とする．

(2) $a \cdot r = 1$ のとき，曲線 C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ．

2 AとBの2つの袋があり，Aの袋には赤玉が2個，白玉が5個，Bの袋には赤玉が m 個，白玉が n 個入っている．ただし，m と n は0以上の整数で $m + n = 4$ とする．

(1) Aの袋から3個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が2個，白玉が1個である確率 P_1 を求めよ．

(2) Aの袋から3個の玉を取り出し，それらをBの袋に入れる．その後Bの袋から2個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が1個，白玉が1個である確率 P_2 を求めよ．

(3) 確率 P_2 が最大となる m と n の値を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n + c} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定める．ただし，c は $0 \leqq c < 2$ を満たす定数とする．

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，

$$b_{n+1} - pb_n = q \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる定数 p，q を c の式で表せ．

(2) a_n を n と c の式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を c の式で表せ．

$\boxed{4}$ 平面上に異なる n 個の点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$ を考える．ただし，$x_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ とする．また，次の関数 $f(a)$ の最小値を与える a を a_0 とする．

$$f(a) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k - y_k)^2$$

(1) a_0 を求めよ．

(2) n 個の点のいずれも，直線 $y = a_0x$ 上にはないものとする．このとき，n 個の点のうち少なくとも 1 点は直線 $y = a_0x$ の上側にあることを示せ．

(3) $x_k = bk$，$y_k = c\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ とする．ここで，b，c は正の定数である．このとき，n 個の点のうちの 1 点が直線 $y = a_0x$ 上にあるための条件は，b，c によらない条件であることを示せ．

$\boxed{5}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 方程式

$$\begin{cases} 15x + 6y = \lambda x \\ 6x + 10y = \lambda y \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解をもつときの λ の値を 2 つ求めよ．

(2) (1) で求めた λ の 2 つの値を $\alpha,\ \beta\ (\alpha > \beta)$ とするとき，

$$AT = T\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たし，行列式をもつ T を 1 つ求め，その逆行列 T^{-1} を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を 0 でない列ベクトルとし，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$$

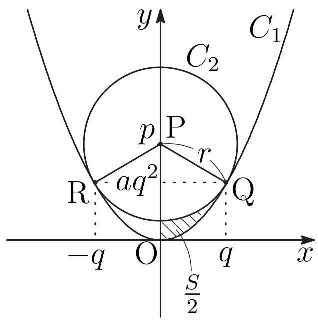
を求めよ．ただし，$x_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ と仮定する．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = ax^2$

$C_2 : x^2 + (y-p)^2 = r^2$

C_1，C_2 から x を消去すると



$$\frac{y}{a} + (y-p)^2 = r^2$$

ゆえに　$y^2 - 2\left(p - \dfrac{1}{2a}\right)y + p^2 - r^2 = 0$

この方程式は重解 aq^2 をもつので，係数に注意して

$$aq^2 = p - \frac{1}{2a},\quad p^2 - r^2 = \left(p - \frac{1}{2a}\right)^2$$

上の第 1 式から　　$q^2 = \dfrac{p}{a} - \dfrac{1}{2a^2}$　　$\cdots$①

上の第 2 式から　　$\dfrac{p}{a} = \dfrac{1}{4a^2} + r^2$　　$\cdots$②　　よって　　$\boldsymbol{p = \dfrac{1}{4a} + ar^2}$

②を①に代入すると　$q^2 = r^2 - \dfrac{1}{4a^2}$　　よって　$\boldsymbol{q = \sqrt{r^2 - \dfrac{1}{4a^2}}}$　　$\boldsymbol{\left(r > \dfrac{1}{2a}\right)}$

補足 $r = \dfrac{1}{2a}$ のとき，C_2 は C_1 の原点における曲率円 (接触円) になる[1].

(2) $ar = 1$ より，$r = \dfrac{1}{a}$ を (1) の結果に代入すると

$$p = \frac{1}{4a} + a\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{5}{4a},\quad q = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$$

したがって　　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{5}{4a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2a},\ \dfrac{3}{4a}\right)$　ゆえに　$\angle\mathrm{OPQ} = \dfrac{\pi}{3}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4a} + \frac{3}{4a}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{\pi}{3} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2a}} ax^2\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2a^2} - \frac{\pi}{6a^2} - \frac{\sqrt{3}}{8a^2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right)}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{5}$ を参照

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $P_1 = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{1 \times 5}{35} = \boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

(2) A の袋から 3 個の玉を取り出したとき，取り出す赤玉の個数を X とし，その確率を $P(X = k)$ とすると $(k = 0, 1, 2)$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{{}_2\mathrm{C}_0 \times {}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{1 \times 10}{35} = \frac{2}{7} \\ P(X=1) &= \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{2 \times 10}{35} = \frac{4}{7} \\ P(X=2) &= P_1 = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

このとき，B の袋の中の赤玉は $m + k$ 個，白玉は $n + 3 - k$ 個であるから

$$\begin{aligned} P_2 &= \sum_{k=0}^{2} P(X=k) \times \frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_1 \times {}_{n+3-k}\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{1}{147}\{2m(n+3) + 4(m+1)(n+2) + (m+2)(n+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{147}(7mn + 15m + 6n + 10)} \end{aligned}$$

(3) $m + n = 4$ より $n = 4 - m$ を (2) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} 147P_2 &= 7m(4-m) + 15m + 6(4-m) + 10 \\ &= -7m^2 + 37m + 34 \\ &= -7\left(m - \frac{37}{14}\right)^2 + 34 + 7\left(\frac{37}{14}\right)^2 \end{aligned}$$

$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ および $\dfrac{5}{2} < \dfrac{37}{14} < 3$ から，P_2 は $\boldsymbol{m = 3,\ n = 1}$ のとき，最大となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{5a_n+c}$ より　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{5}{2}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ より　　$b_{n+1}=\dfrac{c}{2}b_n+\dfrac{5}{2}$　ゆえに　$b_{n+1}-\dfrac{c}{2}b_n=\dfrac{5}{2}$　$\cdots$①

$b_{n+1}-pb_n=q$ と比較して　　$\boldsymbol{p=\dfrac{c}{2},\ q=\dfrac{5}{2}}$

(2) $\alpha-\dfrac{c}{2}\alpha=\dfrac{5}{2}\cdots$② とおくと $\left(\alpha=\dfrac{5}{2-c}\right)$，①，② より

$$b_{n+1}-\alpha=\frac{c}{2}(b_n-\alpha)\quad \text{ゆえに}\quad b_n-\alpha=(b_1-\alpha)\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}$$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ であるから

$$\begin{aligned}b_n&=\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}+\alpha\left\{1-\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right\}\\&=\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}+\frac{5}{2-c}\left\{1-\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

よって　　$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}+\frac{5}{2-c}\left\{1-\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right\}}}$$

(3) $0\leqq c<2$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，(2) の結果より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}+\frac{5}{2-c}\left\{1-\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1}\right\}}=\boldsymbol{\frac{2-c}{5}}$$

補足 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{5a_n+c}$ より，$A=\begin{pmatrix}2&0\\5&c\end{pmatrix}$ とおき，A をスペクトル分解すると

$$A=2\cdot\frac{A-cE}{2-c}+c\cdot\frac{A-2E}{c-2}=2\begin{pmatrix}1&0\\\frac{5}{2-c}&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\\frac{5}{c-2}&1\end{pmatrix}$$

ゆえに　$$A^{n-1}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0\\\frac{5}{2-c}&0\end{pmatrix}+c^{n-1}\begin{pmatrix}0&0\\\frac{5}{c-2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0\\\frac{5(2^{n-1}-c^{n-1})}{2-c}&c^{n-1}\end{pmatrix}$$

よって　$$a_n=\frac{2^{n-1}a_1+0}{\dfrac{5(2^{n-1}-c^{n-1})}{2-c}a_1+c^{n-1}}=\frac{2^{n-1}}{\dfrac{5(2^{n-1}-c^{n-1})}{2-c}+c^{n-1}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(a)=\sum_{k=1}^{n}(ax_k-y_k)^2$ より

$$f(a)=a^2\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2$$

a^2 および a の係数により $\boldsymbol{a_0=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}x_ky_k}{\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2}}$

(2) n 個の $(x_k,\ y_k)$ は，領域 $y<a_0x$ の点であるから $(x_k>0)$

$$y_k<a_0x_k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n}x_ky_k<a_0\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2$$

したがって $a_0>\dfrac{\sum_{k=1}^{n}x_ky_k}{\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2}$

これは，(1) の結果に反する．よって，n 個の点のうち少なくとも 1 点は直線 $y=a_0x$ の上側にある．

(3) $x_k=bk$，$y_k=c$ のとき $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2=\sum_{k=1}^{n}(bk)^2=\frac{b^2}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=\sum_{k=1}^{n}bk\cdot c=\frac{bc}{2}n(n+1)$$

これらを (1) の結果に代入すると

$$a_0=\frac{\dfrac{bc}{2}n(n+1)}{\dfrac{b^2}{6}n(n+1)(2n+1)}=\frac{3c}{b(2n+1)}$$

したがって，点 $(bi,\ c)$ が直線 $y=\dfrac{3c}{b(2n+1)}x$ 上にあるとき

$$c=\frac{3c}{b(2n+1)}\cdot bi \qquad \text{ゆえに} \qquad i=\frac{2n+1}{3}$$

これは，b，c によらない条件である．

補足 $n\equiv 1 \pmod 3$ が，求める条件．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 方程式$\begin{cases} 15x+6y=\lambda x \\ 6x+10y=\lambda y \end{cases}$ より

$$\begin{pmatrix} 15-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots(*)$$

この方程式が，$x=y=0$ 以外の解をもつとき，行列$\begin{pmatrix} 15-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{pmatrix}$ は正則ではないので

$$(15-\lambda)(10-\lambda)-6\cdot6=0 \quad \text{すなわち} \quad (\lambda-19)(\lambda-6)=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{\lambda=19,\ 6}$

(2) $(*)$ より，行列 A について

固有値 $\lambda=19$ に対する固有ベクトルの 1 つは　$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

固有値 $\lambda=6$ に対する固有ベクトルの 1 つは　$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

条件から，$\boldsymbol{\alpha=19}$，$\boldsymbol{\beta=6}$，$\boldsymbol{T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$ とおけばよい．このとき

$$\boldsymbol{T^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

補足 A は対称行列であるから，固有値 19，6 に対する 2 つの固有ベクトルは垂直である[2].

(3) $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を n 乗すると　$T^{-1}A^nT=\begin{pmatrix} 19^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$

したがって　　$A^n=T\begin{pmatrix} 19^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}T^{-1}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9\cdot19^n+4\cdot6^n & 6\cdot19^n-6^{n+1} \\ 6\cdot19^n-6^{n+1} & 4\cdot19^n+9\cdot6^n \end{pmatrix}}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf $\boxed{7}$ を参照.

(4) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9{\cdot}19^n + 4{\cdot}6^n & 6{\cdot}19^n - 6^{n+1} \\ 6{\cdot}19^n - 6^{n+1} & 4{\cdot}19^n + 9{\cdot}6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3(3x+2y){\cdot}19^{n-1} + 2(2x-3y){\cdot}6^{n-1} \\ 2(3x+2y){\cdot}19^{n-1} - 3(2x-3y){\cdot}6^{n-1} \end{pmatrix}$$

したがって $$\frac{y_n}{x_n} = \frac{2(3x+2y){\cdot}19^{n-1} - 3(2x-3y){\cdot}6^{n-1}}{3(3x+2y){\cdot}19^{n-1} + 2(2x-3y){\cdot}6^{n-1}}$$
$$= \frac{2(3x+2y) - 3(2x-3y)\left(\frac{6}{19}\right)^{n-1}}{3(3x+2y) + 2(2x-3y)\left(\frac{6}{19}\right)^{n-1}}$$

ここで，$3x+2y = 2x-3y = 0$ とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，条件に反する．したがって，$3x+2y$，$2x-3y$ の少なくとも一方は 0 ではない．

よって　$3x+2y \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{2(3x+2y)}{3(3x+2y)} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

$3x+2y = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{-3(2x-3y)}{2(2x-3y)} = \boldsymbol{-\frac{3}{2}}$