

令和7年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 3 4 5

- 1 座標空間内の3点 $A(1, 1, -5)$, $B(-1, -1, 7)$, $C(1, -1, 3)$ を通る平面を α とする。点 $P(a, b, t)$ を通り α に垂直な直線と xy 平面との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) t がすべての実数値をとって変化するときの OQ の最小値が1以下となるような a, b の条件を求めよ。ただし, O は原点である。

- 2 以下の問いに答えよ。

- (1) $y = \tan x$ とするとき, $\frac{dy}{dx}$ を y の整式で表せ。
- (2) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$$

- 3 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とするととき, n^2 を8で割った余りは0, 1, 4のいずれかであることを示せ。
- (2) $2^m = n^2 + 3$ をみたす0以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

- 4 半径1の円周上に反時計回りに A, B, C, D を順にとり, 線分 AD は直径で, $AC = CD$, $AB = BC$ が成り立つとする。

- (1) $\angle ACB$ を求めよ。
- (2) BC を求めよ。
- (3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき, 三角形 BCE の面積を求めよ。

- 5 1個のさいころを3回投げ, 出る目を順に a, b, c とする。整式

$$f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$$

について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が1個である確率を求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が3個である確率を求めよ。

解答例

- 1** (1) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 12) = 2(-1, -1, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 8) = 2(0, -1, 4)$ より, α の法線ベクトルを

$$\vec{n} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 4, 1)$$

とすると, 点 $P(a, b, t)$ を通り, 方向ベクトルが $\vec{n}$ である直線の方程式は

$$\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{4} = z-t$$

であり, この直線と xy 平面の交点は, 上式に $z=0$ を代入して

$$x = -2t + a, \quad y = -4t + b$$

よって $Q(-2t + a, -4t + b, 0)$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OQ}|^2 &= (-2t + a)^2 + (-4t + b)^2 \\ &= 20t^2 - 4(a + 2b)t + a^2 + b^2 \\ &= 20 \left\{ t^2 - \frac{1}{5}(a + 2b)t \right\} + a^2 + b^2 \\ &= 20 \left\{ t - \frac{1}{10}(a + 2b) \right\}^2 + \frac{1}{5}(2a - b)^2 \end{aligned}$$

したがって, OQ の最小値は $\frac{|2a - b|}{\sqrt{5}}$

OQ の最小値が 1 以下となる a, b の条件は

$$\frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad |2a - b| \leq \sqrt{5}$$



2 (1) $y = \tan x$ を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \mathbf{1} + \mathbf{y^2}$$

(2) (1) の結果を利用すると

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
y	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx &= \int_0^1 \frac{y^4 - y^2 - 2}{y^2 - 4} \cdot \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{y^2 - 2}{y^2 - 4} dy = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{y^2 - 4} \right) dy \\ &= \left[y + \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y+2} \right| \right]_0^1 = \mathbf{1 - \frac{1}{2} \log 3} \end{aligned}$$

■

3 (1) 法 8 について

$$n \equiv 0 \text{ のとき} \quad n^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n \equiv \pm 1 \text{ のとき} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n \equiv \pm 2 \text{ のとき} \quad n^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$n \equiv \pm 3 \text{ のとき} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n \equiv 4 \text{ のとき} \quad n^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

よって, n^2 を 8 で割った余りは (n は自然数) 0, 1, 4 のいずれかである.

(2) (*) $2^m = n^2 + 3$ について (m, n は 0 以上の整数)

$2^1 < n^2 + 3$ であるから, $m \geq 2$

(i) $m = 2$ のとき, (*) は $2^2 = n^2 + 3$

$$n^2 = 1 \quad n \text{ は 0 以上の整数であるから} \quad n = 1$$

(ii) $m \geq 3$ のとき $2^m \equiv 0 \pmod{8}$ であるから

$$n^2 + 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

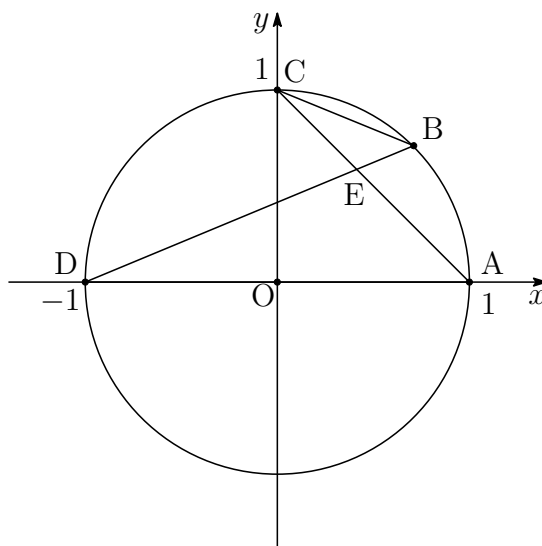
(1) の結論から, 上の第 2 式を満たす n は存在しない.

(i), (ii) から $(m, n) = (2, 1)$



- 4 (1) AD は半径 1 の円の直径であるから、O を原点とする座標平面上に $A(1, 0)$, $D(-1, 0)$ をとると、OB, OC の偏角はそれぞれ $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ である。
円周角と中心角の定理により

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$



- (2) $B\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$ より $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C(0, 1)$

$$\text{よって } BC = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

- (3) 直線 AC の方程式は $x + y = 1$
直線 BD の方程式は

$$y = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = (\sqrt{2} - 1)(x + 1)$$

直線 AC と BD の方程式から x を消去すると、点 E の y 座標は

$$y = (\sqrt{2} - 1)(2 - y) \quad \text{これを解いて} \quad y = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{したがって} \quad \triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$$

$\triangle BCE \sim \triangle ADE$ であるから

$$\triangle BCE = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2 \triangle ADE = \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)^2 (2 - \sqrt{2}) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

- 5** (1) (i) $x^2 - ax + b = 0$ が実数解をもたないとき ($c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$a^2 - 4b < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a^2}{4} < b \leq 6$$

このとき, $a \leq 4$ に注意して

$$a = 1 \text{ のとき} \quad b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a = 2 \text{ のとき} \quad b = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$a = 3 \text{ のとき} \quad b = 3, 4, 5, 6$$

$$a = 4 \text{ のとき} \quad b = 5, 6$$

- (ii) $x = c$ が $f(x) = 0$ の 3 重解であるとき

$$f(x) = (x - c)^3 = (x^2 - 2cx + c^2)(x - c)$$

$a = 2c, b = c^2$ であるから, このとき

$$(a, b, c) = (2, 1, 1), (4, 4, 2)$$

- (i), (ii) より, 求める確率は

$$\frac{(6 + 5 + 4 + 2) \times 6 + 2}{6^3} = \frac{13}{27}$$

- (2) $a^2 - 4b$ が平方数であることは, $x^2 - ax + b = 0$ が自然数を解にもつための必要条件である. $a \geq 2$ に注意して

$$a = 2 \text{ のとき} \quad b = 1$$

$$a = 3 \text{ のとき} \quad b = 2$$

$$a = 4 \text{ のとき} \quad b = 3, 4$$

$$a = 5 \text{ のとき} \quad b = 4, 6$$

$$a = 6 \text{ のとき} \quad b = 5$$

これらを係数とする 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ で異なる 2 つの実数解をもつのは, 次の 5 通りである.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \end{aligned}$$

それぞれの場合について, c のとり方は 4 通りあるから

$$\frac{5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{54}$$

