令和６年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1, -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1,\ a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 整式

$$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z| = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件：　$f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して
　　　　$f(wz) = 0$ が成り立つ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $a,\ b$ が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2{\cdot}a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2{\cdot}c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 自然数 $m,\ n$ に対して

$$I(m,\ n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n \, dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1,\ n+1)$ を $I(m,\ n+1)$，$I(m,\ n)$，m，n を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(m,\ n) = 0$ が成り立つことを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2,\ 0,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(a+1,\ a^2-1,\ a^3+1)$$

3 点 P，Q，R が一直線上にあると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の y 成分から

$$a^2-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=\pm1$$

これは，$a\neq-1,\ a\neq1$ に反する．

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にない．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=8$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=2(a^3+a+2)$

点 R から直線 PQ に垂線 RH を引くと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{2(a^3+a+2)}{8}(2,\ 0,\ 2)\\&=\left(\frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1,\ 0,\ \frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}+1\right),\\\overrightarrow{\mathrm{RH}}&=\overrightarrow{\mathrm{PH}}-\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{2},\ 1-a^2,\ \frac{a}{2}-\frac{a^3}{2}\right)\\&=(1-a^2)\left(-\frac{a}{2},\ 1,\ \frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ より，$1-a^2>0$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RH}}|&=(1-a^2)\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\\\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{RH}}|=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\\&=(1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

ここで，$t=1-a^2$ とおくと　$0<t\leqq1$

$$\triangle\mathrm{PQR}=t\sqrt{3-t}=\sqrt{3t^2-t^3}$$

$f(t)=3t^2-t^3$ とおくと　$f'(t)=6t-3t^2=3t(2-t)>0$

$f(t)$ は単調増加であるから，$t=1$，すなわち，$a=0$ のとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

補足 (外積を用いる解法)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (2(1-a^2),\ 2a(1-a^2), -2(1-a^2)) \\ &= 2(1-a^2)(1,\ a, -1)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=(1-a^2)\sqrt{2+a^2}$$

(面積公式を用いる解法)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= 2^2+0^2+2^2=8, \\ |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 &= (a+1)^2+(a^2-1)^2+(a^3+1)^2 \\ &= (a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\} \\ &= (a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3), \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= 2(a+1)+0+2(a^3+1) \\ &= 2(a+1)(a^2-a+2)\end{aligned}$$

$-1<a<1$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-\{2(a+1)(a^2-a+2)\}^2} \\ &= (a+1)\sqrt{2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-(a^2-a+2)^2} \\ &= (a+1)\sqrt{a^4-2a^3+3a^2-4a+2} \\ &= (a+1)\sqrt{(a-1)^2(a^2+2)} \\ &= (a+1)(1-a)\sqrt{a^2+2} \\ &= (1-a^2)\sqrt{2+a^2}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$

$f(z) = 0$ をみたすとき　$z^2 = -1,\ z^4 = -1$　$\cdots(*)$

$$|z^2| = |z|^2 = 1,\ |z^4| = |z|^4 = 1 \quad よって \quad |z| = 1$$

補足 $z^8 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)$，$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)$ より，$z^8 - 1 = (z^2 - 1)f(z)$ であるから，z は実数以外の 1 の 8 乗根である．

(2) $(*)$ より　$z^2 = -1,\ \pm i$

$f(z) = (z^2 + 1)(z^2 + i)(z^2 - i)$ より

$$f(wz) = (w^2z^2 + 1)(w^2z^2 + i)(w^2z^2 - i)$$

(i) $z^2 = -1$ のとき

$$f(wz) = (-w^2 + 1)(-w^2 + i)(-w^2 - i) = 0$$

したがって　$w^2 = 1,\ \pm i$　$\cdots$①

(ii) $z^2 = i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (iw^2 + 1)(iw^2 + i)(iw^2 - i) \\ &= -i(w^2 - i)(w^2 + 1)(w^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

したがって　$w^2 = \pm 1,\ i$　$\cdots$②

(iii) $z^2 = -i$ のとき

$$\begin{aligned} f(wz) &= (-iw^2 + 1)(-iw^2 + i)(-iw^2 - i) \\ &= i(w^2 + i)(w^2 - 1)(w^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

したがって　$w^2 = \pm 1, -i$　$\cdots$③

①〜③ を同時にみたすとき　$w^2 = 1$　よって　$\boldsymbol{w = \pm 1}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b > a$ のとき，$b-1 \geqq a$ であるから　$(b-1)! \geqq a!$

$$b! = b\cdot(b-1)! \geqq b\cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geqq b$$

(2) $2\cdot a! = b!$ より $\dfrac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geqq b > a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2)}$$

(3) (i) $a \leqq c,\ b \leqq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leqq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leqq 1$$

このとき　$\dfrac{a!}{c!} = 1,\ \dfrac{b!}{c!} = 1$　すなわち　$a = c,\ b = c \quad \cdots (*)$

(ii) $a > c$ または $b > c$ のとき，一般性を失うことなく，$b > c$ とし，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geqq 1$$

これをみたす $b,\ c$ は存在しない．

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (n,\ n,\ n)}$ **($\boldsymbol{n}$ は自然数)**

■

$\boxed{4}$ (1) 条件を満たす直線は，次の 8 本より　$\boldsymbol{L(3) = 8}$

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad x = k, \quad y = k \ (k = 1, 2, 3)$$

(2) 条件を満たす直線は，次の 14 本より　$\boldsymbol{L(4) = 14}$

$$\begin{aligned} &y = x - 1, \quad y = x, \quad y = x + 1, \\ &y = -x + 4, \quad y = -x + 5, \quad y = -x + 6, \\ &x = k, \quad y = k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(3) 条件を満たす直線で傾きが 0 以上の直線は，(i)〜(iv) の 16 本ある．

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は　$y = k \ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線は　$y - k = \dfrac{x - 1}{2} \ (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き 1 の直線は　$y = x + k \ (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き 2 の直線は　$y - 1 = 2(x - k) \ (k = 1, 2, 3)$

(i)〜(iv) の直線を点 (3, 3) を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす．

よって　　$L(5) = 16 \times 2 = \mathbf{32}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $I(m,\ n)=\displaystyle\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx$ より ($m,\ n$ は自然数)

$$\begin{aligned}
&I(m+1,\ n+1)\\
&\qquad=\int_1^e (e^x)'x^{m+1}(\log x)^{n+1}\,dx\\
&\qquad=\Big[\ e^x x^{m+1}(\log x)^{n+1}\ \Big]_1^e\\
&\qquad\qquad-\int_1^e e^x\left\{e^x(m+1)x^m(\log x)^{n+1}+x^{m+1}(n+1)(\log x)^n\frac{1}{x}\right\}dx\\
&\qquad=e^{m+e+1}\\
&\qquad\qquad-(m+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}\,dx-(n+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\\
&\qquad=\boldsymbol{e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-(n+1)I(m,\ n)}
\end{aligned}$$

(2) $1\leqq x\leqq e$ において，$x^m e^x(\log x)^n\geqq 0$ であるから ($m,\ n$ は自然数)

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x(\log x)^n\,dx\geqq 0$$

上式および (1) の結果から

$$0\leqq(n+1)I(m,\ n)\leqq e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)\leqq e^{m+e+1}$$

したがって　　$0\leqq I(m,\ n)\leqq\dfrac{e^{m+e+1}}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{m+e+1}}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}I(m,\ n)=0$$

別解 $1 \leqq x \leqq e$ において，$0 \leqq x^m e^x (\log x)^n \leqq e^{m+e} (\log x)^n$ であるから

$$0 \leqq I(m,\ n) \leqq e^{m+e} \int_1^e (\log x)^n \, dx$$

$x = e^t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} 0 \leqq \int_1^e (\log x)^n \, dx &= \int_0^1 t^n e^t \, dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n e^t \, dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 t^n e^t \, dt \\ &\leqq e \int_0^{1-\frac{1}{n}} t^n \, dt + e \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dt \\ &= \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{e}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{e}{n} \right\} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e (\log x)^n \, dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} I(m,\ n) = \mathbf{0}$$

■