令和５年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の △ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．

$$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

2 α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha,\quad a_{n+1}=|a_n-1|+a_n-1\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 点Oを原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{m} = (a,\ c), \quad \overrightarrow{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して，次の条件を考える。

条件 I　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす実数 r，s が存在する。
条件 II　$r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q}$ を満たす整数 r，s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\overrightarrow{q}$ に対して成り立つとする。$D \neq 0$ であることを示せ。

以下，$D \neq 0$ とする。

(2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ で

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} = 1, \quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに $a,\ b,\ c,\ d$ が整数であるとし，x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。D のとりうる値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$，$\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x，y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x，y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$，$g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから ②$f(x)$, $g(x)$ はすべての x の値で微分可能で, $f'(x) = -g(x)$，$g'(x) = f(x)$ が成立する ことが示される。
③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A)，(B)，(C)，(D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)$'$ $f(x)$，$g(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = a$，$g'(0) = b$

におきかえて，条件 (A)，(B)，(C)，(D)$'$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A)，(B)，(C) から $f(0) = 1$，$g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，④条件 (A)，(B)，(C)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$，$g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B)，(D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ に置き換えた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B) すべての x, y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D) $p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

5 xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x=t+2\sin^2 t,\quad y=t+\sin t \quad (0<t<\pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y \leqq x$ の領域にある部分と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(*)\quad x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

$x=0$ は方程式 $(*)$ の解ではないから，$(*)$ の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

したがって $\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2=0$ すなわち $(x^2-x+1)^2=0$

これを解いて $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $(**)\quad (\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから，$(**)$ の両辺を $(\beta-\alpha)^4$ で割ると

$$1+\left\{\frac{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)}{\beta-\alpha}\right\}^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおくと $1+(1-z)^4+z^4=0$

整理すると $z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0$

(1) の結果から，これを解くと $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\imath}{2}$

したがって $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$ (複号同順)

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{3}$ より **△ABC は正三角形** ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1$ より $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \max(a_n - 1, -a_n + 1) + a_n - 1 \\ &= \max(2(a_n - 1),\ 0) \end{aligned}$$

k を自然数とすると，上の漸化式から

(i) $a_k \leqq 1$ のとき，$2(a_k - 1) \leqq 0$ より，$a_{k+1} = 0$

(ii) $a_k > 2$ のとき，$2(a_k - 1) > 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1) > 2$

(iii) $1 < a_k < \dfrac{3}{2}$ のとき，$0 < 2(a_k - 1) < 1$ より，$0 < a_{k+1} < 1$

(iv) $\dfrac{3}{2} \leqq a_k < 2$ のとき，$1 < 2(a_k - 1) < 2$ より，$a_{k+1} = 2(a_k - 1)$

このとき，$a_{k+1} - a_k = a_k - 2 < 0$ より　$a_{k+1} < a_k$

が成立する．

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，(i) より　$a_2 = 0$

順次，(i) を適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$

よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は収束し，**$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

(2) $\alpha > 2$ のとき，(ii) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$

ゆえに　$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$　すなわち　$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$

よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は発散し，**$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，(iii) より　$0 < a_2 < 1$

さらに，(i) を順次適用すると　$a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ \cdots$

よって　$\boldsymbol{\{a_n\}}$ **は収束し，**$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，すべての自然数 n について

$$\frac{3}{2} \leqq a_n < 2$$

であると仮定すると，(iv) より　$a_{n+1} = 2(a_n - 1)$

$$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}$$

このとき，十分大きな k に対して，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となり，仮定に反する．

よって，$a_k < \dfrac{3}{2}$ となる整数 k が存在するので，(i)，(iii) より

$$\boldsymbol{\{a_n\}\ \text{は収束し，}\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{m}=(a,\ c)$，$\overrightarrow{n}=(b,\ d)$ より $(\overrightarrow{m}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{n}\neq\overrightarrow{0})$

$$(*)\left\{\begin{aligned} d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}&=(ad-bc,\ 0)=(D,\ 0)\\ -b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}&=(0,\ ad-bc)=(0,\ D)\end{aligned}\right.$$

$D=0$ のとき　$d\overrightarrow{m}=c\overrightarrow{n},\ \ b\overrightarrow{m}=a\overrightarrow{n}$　　ゆえに　$\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$

このとき，$\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ は1次従属であるから，$\overrightarrow{q}$ がこれらのベクトルと平行でないならば，条件 I

$$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$$

を満たす実数 r, s は存在しない．

$D\neq0$ のとき，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)=\frac{d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n}}{D},\quad \overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)=\frac{-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n}}{D}\qquad(**)$$

のように，これらの基本ベクトルは $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

したがって，任意のベクトル $\overrightarrow{q}=(x,\ y)$ を

$$(x,\ y)=x(1,\ 0)+y(0,\ 1)=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}\qquad(***)$$

とすると，$\overrightarrow{q}$ は $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ の線形結合で表される．

よって，$D\neq0$ のとき，条件 I を満たす実数 r, s が存在する．　［証終］

(2) $(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{v}$ の内積をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{d}{D}\\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D}=-\frac{b}{D}\end{aligned}$$

よって　　$\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(d,\ -b)}$

同様に，$(**)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{w}$ の内積をとると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{w}&=\frac{(d\overrightarrow{m}-c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}-c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=-\frac{c}{D}\\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{w}&=\frac{(-b\overrightarrow{m}+a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}+a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D}=\frac{a}{D}\end{aligned}$$

よって　　$\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\boldsymbol{\frac{1}{D}(-c,\ a)}$

(3) (∗∗) を (∗∗∗) に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q} &= x\left(\frac{d\overrightarrow{m} - c\overrightarrow{n}}{D}\right) + y\left(\frac{-b\overrightarrow{m} + a\overrightarrow{n}}{D}\right)\\ &= \frac{dx - by}{D}\overrightarrow{m} + \frac{-cx + ay}{D}\overrightarrow{n} \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

条件 II を満たすとき，$\dfrac{dx - by}{D}$, $\dfrac{-cx + ay}{D}$ が整数である．とくに

$\overrightarrow{q} = (1,\ 0)$ のとき　　$\overrightarrow{q} = \dfrac{d}{D}\overrightarrow{m} - \dfrac{c}{D}\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{q} = (0,\ 1)$ のとき　　$\overrightarrow{q} = -\dfrac{b}{D}\overrightarrow{m} + \dfrac{a}{D}\overrightarrow{n}$

上の 2 式から，$\dfrac{a}{D}$, $\dfrac{b}{D}$, $\dfrac{c}{D}$, $\dfrac{d}{D}$ は整数である．

$$\frac{a}{D}\cdot\frac{d}{D} - \frac{b}{D}\cdot\frac{c}{D} = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}$$

は整数であるから　$D = \pm 1$

逆に，$D = \pm 1$ のとき，(A) より，条件 II を満たす．

したがって　　$\boldsymbol{D = \pm 1}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 条件式 (A)，(B) に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0)=f(0)^2-g(0)^2, \quad g(0)=2f(0)g(0) \qquad (*)$$

上の第 2 式から　　$\{2f(0)-1\}g(0)=0$

したがって　　$f(0)=\dfrac{1}{2}$ または $g(0)=0$

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の第 1 式に代入して整理すると　$g(0)^2=-\dfrac{1}{4}$
  $g(0)$ は実数値であるから，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ は不適．
- $g(0)=0$ のとき，これを $(*)$ の第 1 式に代入して整理すると

$$f(0)\{f(0)-1\}=0 \quad f(0)\neq 0 \text{ に注意して} \quad f(0)=1$$

よって，題意は成立する．

(2) (1) の結論および条件 (A)，(D) より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\right\} \\ &= f(x)f'(0)-g(x)g'(0) \qquad (**) \\ &= f(x)\cdot 0-g(x)\cdot 1=-g(x) \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に，(1) の結論および条件 (B)，(D) より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+g(x)f(h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{f(x)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\} \\ &= f(x)g'(0)+g(x)f'(0) \qquad (***) \\ &= f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0=f(x) \end{aligned}$$

$\pi(x)=\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)$ とおくと，(2) および上式から

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \{f(x)+ig(x)\}'(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)' \\ &= \{f'(x)+ig'(x)\}(\cos x-i\sin x)+\{f(x)+ig(x)\}(-\sin x-i\cos x) \\ &= \{-g(x)+if(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x) \\ &= i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)-i\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=0 \end{aligned}$$

$\pi(x)$ は定数関数であるから　$\pi(x)=\pi(0)=\{f(0)+ig(0)\}\cdot 1=1$

よって　　$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1$

(4) (3) の結論から　$f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$
$f(x),\ g(x)$ は実関数 (実数値関数) であるから

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=\sin x$$

ここで，$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\varphi'(x)=f'(x)+ig'(x)=-g(x)+if(x)=i\{f(x)+ig(x)\}=i\varphi(x)$$

$\varphi(0)=\cos 0+i\sin 0=1$ および上式を満たす $\varphi(x)$ を求める．

$$\varphi'(x)e^{-ix}-i\varphi(x)e^{-ix}=0\quad \text{ゆえに}\quad \{\varphi(x)e^{-ix}\}'=0$$

したがって　$\varphi(x)e^{-ix}=C$　(C は積分定数)　ゆえに　$\varphi(x)=Ce^{ix}$
$\varphi(0)=1$ より　$C=1$　すなわち　$\varphi(x)=e^{ix}$
$\varphi(x)=f(x)+ig(x)=\cos x+i\sin x$ であるから

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (\#)$$

(#) により，条件 (A)，(B)，(C)，(D′) を満たす関数 $f(x),\ g(x)$ を求める．
(D′) を $(**)$，$(***)$ に代入すると

$$f'(x)=af(x)-bg(x),\quad g'(x)=bf(x)+ag(x)$$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=f'(x)+ig'(x)=\{af(x)-bg(x)\}+i\{bf(x)+ag(x)\}\\&=(a+bi)\{f(x)+ig(x)\}=(a+bi)\phi(x)\end{aligned}$$

$\phi(0)=f(0)+ig(0)=1+i\cdot 0=1$ および上式を満たす $\phi(x)$ を求める．

$$\phi'(x)e^{-(a+bi)x}-(a+bi)e^{-(a+bi)x}=0\quad \text{ゆえに}\quad \{\phi(x)e^{-(a+bi)x}\}'=0$$

したがって

$$\phi(x)e^{-(a+bi)x}=C_0\ \ (C_0\text{は積分定数})\quad \text{ゆえに}\quad \phi(x)=C_0e^{(a+bi)x}$$

$\phi(0)=1$ より　$C_0=1$　すなわち　$\phi(x)=e^{(a+bi)x}$

(#) より　　$\phi(x)=e^{ax}e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$\phi(x)=f(x)+ig(x)$ であるから ($f(x),\ g(x)$ は実関数)

$$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}\cos bx,\quad g(x)=e^{ax}\sin bx}$$

これから　　$f\left(\dfrac{x}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}x}\cos x,\quad g\left(\dfrac{x}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}x}\sin x$

これらを $p(x) = e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\dfrac{x}{b}\right),\quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\dfrac{x}{b}\right)$ に代入すると

$$p(x) = \cos x,\quad q(x) = \sin x$$

［**B** の証明］ このとき，加法定理を用いて

$$\begin{aligned} q(x+y) = \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ &= q(x)p(y) + p(x)q(y) = p(x)q(y) + q(x)p(y) \end{aligned}$$

［**D** の証明］ $p'(x) = -\sin x,\quad q'(x) = \cos x$ より

$$p'(0) = 0,\quad q'(0) = 1$$

［証終］

補足 本題の線形の連立微分方程式

$$\begin{aligned} &f(0) = 1,\ g(0) = 0,\ f'(0) = a,\ g'(0) = b, \\ &f'(x) = af(x) - bg(x),\quad g'(x) = bf(x) + ag(x) \end{aligned}$$

から $g(x),\ g'(x)$ を消去して，2 階の微分方程式

$$f(0) = 1,\ f'(0) = a,\ f''(x) - 2af'(x) + (a^2+b^2)f(x) = 0$$

を解いてもよい．特性方程式 $X^2 - 2aX + a^2 + b^2 = 0$ の解を

$$\alpha = a + bi,\quad \beta = a - bi$$

とおくと　$f(x) = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$　($C_1,\ C_2$ は積分定数)[1]

このとき，$f(0) = 1,\ f'(0) = a$ より

$$C_1 + C_2 = 1,\quad \alpha C_1 + \beta C_2 = a$$

上の第 2 式について　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}(C_1+C_2) + \dfrac{\alpha-\beta}{2}(C_1-C_2) = a$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = a,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} = bi$ を代入すると　$a(C_1+C_2) + bi(C_1-C_2) = a$

$C_1 + C_2 = 1,\ b \neq 0$ より　$C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$　よって　$f(x) = e^{ax}\cos bx$

同様に，2 階の微分方程式

$$g(0) = 0,\ g'(0) = b,\ g''(x) - 2ag'(x) + (a^2+b^2)g(x) = 0$$

を解くと，$g(x) = e^{ax}\sin bx$ を得る．　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2010.pdf (p.17 例 2)

5 (1) $C : (x,\ y) = (f(t),\ g(t)) = (t + 2\sin^2 t,\ t + \sin t)$ とおくと $(0 < t < \pi)$

$f'(t) = 0$ とすると　$1 + 4\sin t\cos t = 0$

$$1 + 2\sin 2t = 0\ (0 < t < \pi) \quad ゆえに \quad t = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

このとき　$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{7\pi}{12} + 1 - \cos\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{12} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

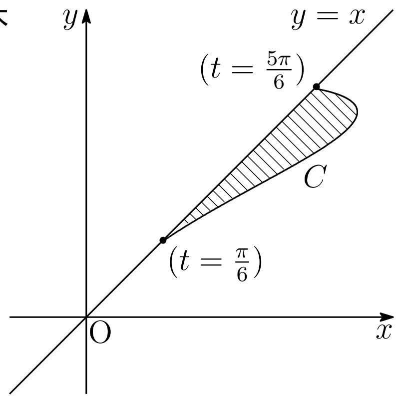
$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{11\pi}{12} + 1 - \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，C の $t = \frac{7\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12}$ における 2 接線

$$x = f\left(\frac{7\pi}{12}\right), \quad x = f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

が異なるから，求める接線の本数は　**2 本**

(2) 求める面積を右の図の斜線部分である．この面積を S とすると，ガウス・グリーンの定理により



$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

このとき

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (t + 2\sin^2 t)(1 + \cos t) - (1 + 4\sin t\cos t)(t + \sin t) \\ &= t(\cos t - 4\sin t\cos t) + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= t(\sin t - 2\sin^2 t)' + 2\sin^2 t - \sin t - 2\sin^2 t\cos t \\ &= \{t(\sin t - 2\sin^2 t)\}' + 2(2\sin^2 t - \sin t) - \frac{2}{3}(\sin^3 t)' \end{aligned}$$

よって[2]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\Big[\ t(\sin t - 2\sin^2 t)\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2 t - \sin t)\,dt - \frac{1}{3}\Big[\ \sin^3 t\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2t - \sin t)\,dt = \Big[\ t - \frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf 5

別解 $\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{5\pi}{6}$ で $y=g(t)$ は単調増加であることに注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} (x-y)\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \left[\ \frac{y^2}{2}\ \right]_{g(\frac{\pi}{6})}^{g(\frac{5\pi}{6})} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)g'(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = g\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$ に注意して変形すると

$$\begin{aligned} S &= \left[\ f(t)g(t)\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \\ &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(t)g(t)\,dt + \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② の辺々を加えることにより，次式を得る．

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt$$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$，$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{1}{2}$ であるから，① より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + 2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt - \frac{1}{2}\left\{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 - g\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (t + t\cos t + 2\sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t)\,dt - \frac{\pi}{3}(\pi+1) \\ &= \left[\ \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\sin^3 t\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3}(\pi+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

■