令和４年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間内の５点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,-1),\ \mathrm{Q}(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)+C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ。

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 自然数 m，n が

$$n^4=1+210m^2 \quad \cdots ①$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ① をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。<u>定積分の性質 $\boxed{\quad ア \quad}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，</u>

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\quad イ \quad}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

5 xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，$\dfrac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。

(4) 曲線 C の概形を図示せよ。

解答例

1 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\quad 2x+y+2z=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=-x,\quad z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$

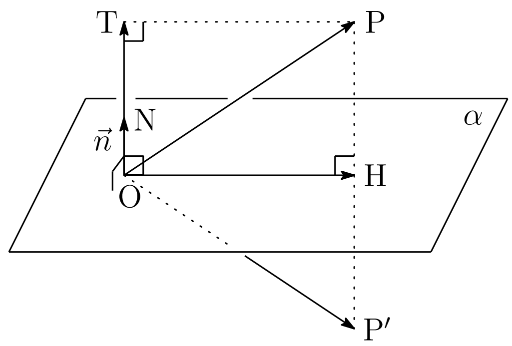
(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H，T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0, -1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2, -2, -1)$

これと $(*)$ の第 1 式により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0, 4,\ 1)}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき，PR : RQ $=$ P′R : RQ $=3:1$ であるから，R は線分 P′Q を $3:1$ に内分する点である．

$$\left(\frac{1\cdot0+3\cdot4}{3+1}, \frac{1\cdot4+3\cdot0}{3+1}, \frac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{R(3,\ 1,\ 4)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3>0$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{n}=1>0$ であるから，P，Q は平面 α に関して同じ側にある．このとき点 R は，2 点 P$'(0,\ 4,\ 1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を通る直線上にある．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+t\overrightarrow{\mathrm{P'Q}} \qquad (t\text{ は実数})\\&=(0,\ 4,\ 1)+t(4,-4,\ 4)\\&=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\frac{2}{3}\cdot4t-\frac{2}{3}(4-4t)-\frac{1}{3}(1+4t)=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{3}{4}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(3,\ 1,\ 4)$　よって　**R(3，1，4)**　■

2　(1) x^n を $x-\alpha$ で割った商を $Q_1(x)$，余りを C とすると

$$x^n=(x-\alpha)Q_1(x)+C$$

$Q_1(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを B とすると

$$Q_1(x)=(x-\beta)Q_2(x)+B$$

$Q_2(x)$ を $x-\beta$ で割った商を $Q(x)$，余りを A とすると

$$Q_2(x)=(x-\beta)Q(x)+A$$

したがって

$$\begin{aligned}x^n&=(x-\alpha)Q_1(x)+C\\&=(x-\alpha)\{(x-\beta)Q_2(x)+B\}+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x)+B(x-\alpha)+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)Q(x)+A\}+B(x-\alpha)+C\\&=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)+C \qquad (*)\end{aligned}$$

(2) $x=\alpha$ を $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{C=\alpha^n}$

$$\begin{aligned}x^n-\alpha^n &= (x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)\\ \frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha} &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(x-\alpha)-(x^n-\alpha^n)}{(x-\alpha)^2}$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-\beta)^2Q(x)+A(x-\beta)+B,\\ f'(x) &= 2(x-\beta)Q(x)+(x-\beta)^2Q'(x)+A\end{aligned}$$

これから，$B=f(\beta)$，$A=f'(\beta)$ より

$$\boldsymbol{B=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\quad A=\frac{n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)}{(\beta-\alpha)^2}}$$

(3) $g(\beta)=n\beta^{n-1}(\beta-\alpha)-(\beta^n-\alpha^n)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(\beta) &= n(n-1)\beta^{n-2}(\beta-\alpha)\\ g''(\beta) &= n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta-\alpha)+\beta^{n-2}\}\end{aligned}$$

$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$，$g''(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$ より，$g(\beta)$ は $(\beta-\alpha)^2$ を因数にもつから，$g(\beta)=(\beta-\alpha)^2H(\beta)$ とおくと $(A=H(\beta))$

$$\begin{aligned}g'(\beta) &= 2(\beta-\alpha)H(\beta)+(\beta-\alpha)^2H'(\beta)\\ g''(\beta) &= 2H(\beta)+4(\beta-\alpha)H'(\beta)+(\beta-\alpha)^2H''(\beta)\end{aligned}$$

$g''(\alpha)=2H(\alpha)=n(n-1)\alpha^{n-2}$，$A=H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}H(\beta)=H(\alpha)=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると [1]

$$g(\beta)=g(\alpha)+g'(\alpha)(\beta-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^k$$

このとき　$A=\dfrac{g(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{g''(\alpha)}{2!}+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta-\alpha)^{k-2}$

よって　$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{g''(\alpha)}{2!}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf (p.7)

3 (1) $n^4 = 1 + 210m^2 \cdots$ ① の右辺は奇数であるから，n は奇数．

$n^2+1,\ n^2-1$ は偶数であるから，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は整数．

$\dfrac{n^2+1}{2} - \dfrac{n^2-1}{2} = 1$ より，$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素である．

補足 ユークリッドの互除法により $\dfrac{n^2+1}{2} = \dfrac{n^2-1}{2}\cdot 1 + 1$

$\dfrac{n^2+1}{2},\ \dfrac{n^2-1}{2}$ の最大公約数が 1 であるから，これらの 2 数は互いに素．

(2) n が奇数であるから，$n+1,\ n-1$ はともに偶数で，一方は 4 で割り切れるから，次式から n^2-1 は，8 の倍数である．

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

① より $(n^2+1)(n^2-1) = 2\cdot3\cdot5\cdot7m^2 \quad \cdots$ ①$'$

ここで $n^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ より $n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 3 \quad \cdots$ ②

$n^2 \equiv 0,\ 1,\ 4,\ 2 \pmod 7$ より $n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 7 \quad \cdots$ ③

①$'$，②，③ より，n^2-1 は $3\cdot7$ の倍数である．

よって，n^2-1 は，$8\times3\cdot7$，すなわち，168 の倍数である．

(3) (2) の結論から，$n^2-1 = 168N$ (N は整数) とおくと，①$'$ より

$$(168N+2)\cdot168N = 2\cdot3\cdot5\cdot7m^2 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2\sqrt{\frac{2N(84N+1)}{5}}$$

$2N$ は偶数，$84N+1$ は奇数であるから，$N = 2k$ (k は整数) とおくと

$$m = 4\sqrt{\frac{k(168k+1)}{5}}, \quad n = \sqrt{336k+1} \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から，整数 k の必要条件は

$$k \equiv 0 \quad \text{または} \quad 168k+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 0,\ 3 \pmod 5$$

$k=3$ のとき　$m = 4\sqrt{3\cdot101}$，$n = \sqrt{1009}$ より，不適

$k=5$ のとき　$m = 4\sqrt{841} = 4\cdot29 = 116,\ n = \sqrt{1681} = 41$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (116,\ 41)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $F(x),\ G(x)$ が微分可能であるから

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h},\quad G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

$H(x)=F(x)+G(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}H'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\frac{F(x+h)+G(x+h)-F(x)-G(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=F'(x)+G'(x)\end{aligned}$$

よって　　$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$

次に，$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ を満たす $F(x)$，$G(x)$ をとり，

$$H(x)=F(x)+G(x),\quad h(x)=H'(x)$$

とすると，次式が成立する．

$$h(x)=H'(x)=\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned}\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx&=\int_a^b h(x)\,dx=\Big[\,H(x)\,\Big]_a^b=H(b)-H(a)\\&=F(b)+G(b)-\{F(a)+G(a)\}\\&=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\&=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) $G'(x)=g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると，定積分の定義により

$$\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

上式の右辺は平均値の定理により

$$\frac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(c)\quad(a<c<b)$$

$G'(c)=g(c)>0$ であるから，以上の結果から

$$\int_a^b g(x)\,dx=(b-a)g(c)>0$$

(3) 答 **(C)**

(2) と同様に $\displaystyle\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$ に平均値の定理を適用すると $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) f(c_i) = \frac{1}{n} f(c_i) \quad \left(\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n}\right)$$

$f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数であるから

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(c_i) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

以上の結果から，次式を得る．

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(4) 答 **(B)**

S_n の定義により

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

上式に注意すると，② より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ S_n \leqq \int_0^1 f(x)\,dx &\leqq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

よって $\quad 0 \leqq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n}$ ■

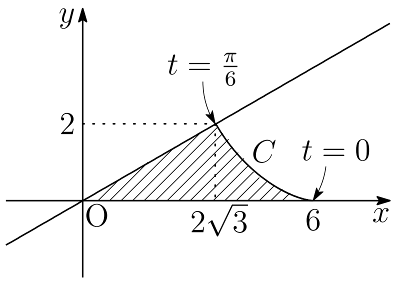
5 (1) $x = 5\cos t + \cos 5t,\quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -5(\sin t + \sin 5t) = -10\sin 3t\cos 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 5(\cos t - \cos 5t) = 10\sin 3t\sin 2t,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = -\tan 2t$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$0 < 2t < 3t < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt} < 0,\quad \dfrac{dy}{dx} < 0}$

(2) (1) の結果および $\dfrac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$		$\nwarrow$	
$(x,\ y)$	$(6,\ 0)$	$\cdots$	$(2\sqrt{3},\ 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^{6} y\,dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} y\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} (5\sin t - \sin 5t)(-5\sin t - 5\sin 5t)\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (5\sin^2 t - \sin^2 5t + 4\sin 5t\sin t)\,dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left\{5\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t)\right\} dt \\
&= 2\sqrt{3} + 5\Big[\,2t - \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{1}{20}\sin 10t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{1}{2}\sin 4t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 2\sqrt{3} + 5\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}
\end{aligned}$$

(3) $f(t) = 5\cos t + \cos 5t,\quad g(t) = 5\sin t - \sin 5t$ とおくと

$$f(-t) = f(t), \quad g(-t) = -g(t)$$

よって，C 上の 2 点 $(f(t),\ g(t))$ と $(f(-t),\ g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$X = f(t)$，$Y = g(t)$ とすると

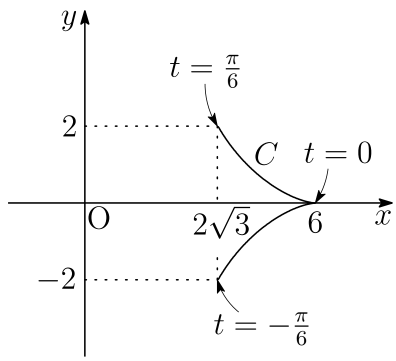
$$\begin{aligned}
x &= (5\cos t + \cos 5t)\cos\frac{\pi}{3} - (5\sin t - \sin 5t)\sin\frac{\pi}{3} \\
&= 5\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3} - \sin t\sin\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\cos\frac{\pi}{3} + \sin 5t\sin\frac{\pi}{3} \\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 5\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = f\left(t+\frac{\pi}{3}\right), \\
y &= (5\cos t + \cos 5t)\sin\frac{\pi}{3} + (5\sin t - \sin 5t)\cos\frac{\pi}{3} \\
&= 5\left(\cos t\sin\frac{\pi}{3} + \sin t\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5t\sin\frac{\pi}{3} - \sin 5t\cos\frac{\pi}{3} \\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 5\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = g\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t),\ g(t))$ は，xy 系における点 $\left(f\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ であるから，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

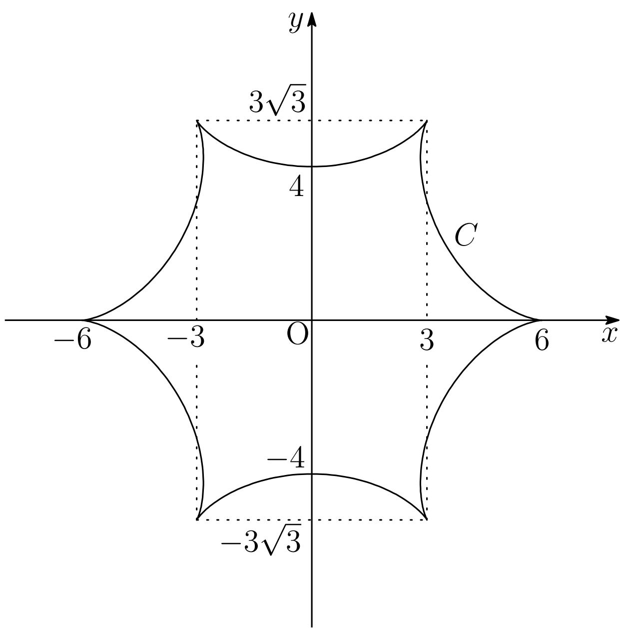
(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\dfrac{dx}{dt} < 0$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{6}\right)$ により，$0 < t < \dfrac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t)\Bigg/\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t}\Bigg/\frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から，C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の部分と $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから，C の $-\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる．



さらに，これを原点を中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある．よって，C の $-\pi \leqq t < \pi$ の概形は，次のようになる．



解説 C 上の点 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t),\ g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{f'(t)}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t)=5\cos t+\cos 5t, \quad g(t)=5\sin t-\sin 5t \quad (-\pi \leqq t<\pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t)&=-5(\sin t+\sin 5t), & g'(t)&=5(\cos t-\cos 5t)\\ f''(t)&=-5(\cos t+5\cos 5t), & g''(t)&=-5(\sin t-5\sin 5t)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)&=25(\sin t-5\sin 5t)(\sin t+\sin 5t)\\ &\qquad +25(\cos t-\cos 5t)(\cos t+5\cos 5t)\\ &=-100+100(\cos 5t\cos t-\sin 4t\sin t)\\ &=-100(1-\cos 6t)\end{aligned}$$

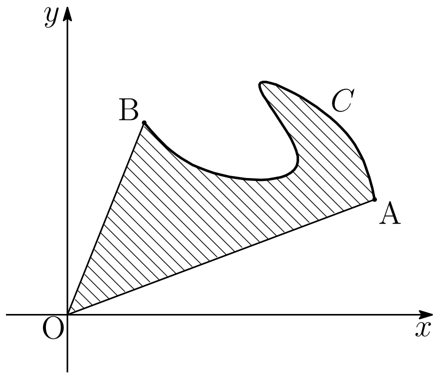
$0<t<\dfrac{\pi}{6}$ において　$f'(t)<0, \quad g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)<0$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}>0$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



本題 (2) は，ガウス・グリーンの定理を用いて求めることもできる．

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (5\cos t + \cos 5t)\cdot 5(\cos t - \cos 5t) \\ &\qquad + 5(\sin t + \sin 5t)\cdot(5\sin t - \sin 5t) \\ &= 20 - 20(\cos 5t\cos t - \sin 5t\sin t) \\ &= 20(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\,dt \\ &= 10\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 - \cos 6t)\,dt = 10\left[\,t - \frac{1}{6}\sin 6t\,\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi} \end{aligned}$$