

令和4年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 座標空間内の5点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1), Q(4, 0, 5)$$

を考える。3点O, A, Bを通る平面を α とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の両方に垂直であり, x 成分が正であるような, 大きさが1のベクトル \vec{n} を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点Pと対称な点P'の座標を求めよ。
- (3) 点Rが平面 α 上を動くとき, $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点Rの座標を求めよ。

2 n を3以上の自然数, α, β を相異なる実数とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

- (2) (1)の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。
- (3) (2)の A について, n と α を固定して, β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

3 自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) $n^2 - 1$ は168の倍数であることを示せ。
- (3) $\textcircled{1}$ をみたす自然数の組 (m, n) を1つ求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を1つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(C) 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq h(x)$ ならば,

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k , l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。定積分の性質 を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式②と定積分の性質 より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

- (1) 関数 $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義 ① を用いて, 定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて, 次を示せ。

$a < b$ のとき, 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば, $\int_a^b g(x) dx > 0$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式 ② を示せ。
- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄 に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また, 不等式 ③ を示せ。

- 5** xy 平面上の曲線 C を, 媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において, $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分, x 軸, 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また, C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \vec{a} = \vec{OA} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = \vec{OB} = (2, 1, 2)$$

$\vec{n} = (x, y, z)$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0, \vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ であるから

$$x + y = 0, \quad 2x + y + 2z = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = -x, \quad z = -\frac{1}{2}x$$

$$\vec{n} = \left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right), \quad |\vec{n}|^2 = 1 \text{ であるから}$$

$$x^2 + x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{ に注意して } x = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \vec{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

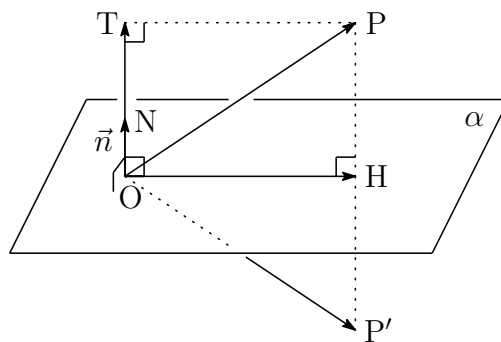
(2) $\vec{ON} = \vec{n}$ とし, P から平面 α および直線 ON に引いた垂線の交点をそれぞれ H, T とすると

$$\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{OT}, \quad \vec{OT} = (\vec{OP} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (*)$$

$$\vec{OP} = (4, 0, -1) \text{ より, } \vec{OP} \cdot \vec{n} = 3 \text{ であるから } \vec{OT} = (2, -2, -1)$$

これと (*) の第 1 式により, $\vec{OH} = (2, 2, 0)$ であるから

$$\vec{OP'} = \vec{OH} + \vec{HP'} = \vec{OH} + (-\vec{OT}) = (0, 4, 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0, 4, 1)}$$



(3) $\vec{OP} \cdot \vec{n} = 3 > 0, Q(4, 0, 5)$ より, $\vec{OQ} \cdot \vec{n} = 1 > 0$ であるから, P, Q は平面 α に関して同じ側にある. このとき, $PR : RQ = P'R : RQ = 3 : 1$ であるから, R は線分 $P'Q$ を $3 : 1$ に内分する点である.

$$\left(\frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 4}{3 + 1}, \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 0}{3 + 1}, \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{3 + 1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{R(3, 1, 4)}$$

別解 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 3 > 0$, $Q(4, 0, 5)$ より, $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{n} = 1 > 0$ であるから, P, Q は平面 α に関して同じ側にある. このとき点 R は, 2点 $P'(0, 4, 1), Q(4, 0, 5)$ を通る直線上にある.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP'} + t\overrightarrow{P'Q} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (0, 4, 1) + t(4, -4, 4) \\ &= (4t, 4 - 4t, 1 + 4t)\end{aligned}$$

点 R は平面 α 上にあるから, $\overrightarrow{OR} \cdot \vec{n} = 0$ より

$$\frac{2}{3} \cdot 4t - \frac{2}{3}(4 - 4t) - \frac{1}{3}(1 + 4t) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{3}{4}$$

したがって $\overrightarrow{OR} = (3, 1, 4)$ よって $\mathbf{R(3, 1, 4)}$ ■

2 (1) x^n を $x - \alpha$ で割った商を $Q_1(x)$, 余りを C とすると

$$x^n = (x - \alpha)Q_1(x) + C$$

$Q_1(x)$ を $x - \beta$ で割った商を $Q_2(x)$, 余りを B とすると

$$Q_1(x) = (x - \beta)Q_2(x) + B$$

$Q_2(x)$ を $x - \beta$ で割った商を $Q(x)$, 余りを A とすると

$$Q_2(x) = (x - \beta)Q(x) + A$$

したがって

$$\begin{aligned}x^n &= (x - \alpha)Q_1(x) + C \\ &= (x - \alpha)\{(x - \beta)Q_2(x) + B\} + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)Q_2(x) + B(x - \alpha) + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)\{(x - \beta)Q(x) + A\} + B(x - \alpha) + C \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)^2Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C \quad (*)\end{aligned}$$

(2) $x = \alpha$ を (*) に代入すると $C = \alpha^n$

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha)$$

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = (x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \beta) + B$$

$$f(x) = \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{nx^{n-1}(x - \alpha) - (x^n - \alpha^n)}{(x - \alpha)^2}$$

$$f(x) = (x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \beta) + B,$$

$$f'(x) = 2(x - \beta)Q(x) + (x - \beta)^2 Q'(x) + A$$

これから, $B = f(\beta)$, $A = f'(\beta)$ より

$$B = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \quad A = \frac{n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)}{(\beta - \alpha)^2}$$

(3) $g(\beta) = n\beta^{n-1}(\beta - \alpha) - (\beta^n - \alpha^n)$ とおくと

$$g'(\beta) = n(n-1)\beta^{n-2}(\beta - \alpha)$$

$$g''(\beta) = n(n-1)\{(n-2)\beta^{n-3}(\beta - \alpha) + \beta^{n-2}\}$$

$g(\alpha) = 0$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = n(n-1)\alpha^{n-2}$ より, $g(\beta)$ は $(\beta - \alpha)^2$ を因数にもつから, $g(\beta) = (\beta - \alpha)^2 H(\beta)$ とおくと ($A = H(\beta)$)

$$g'(\beta) = 2(\beta - \alpha)H(\beta) + (\beta - \alpha)^2 H'(\beta)$$

$$g''(\beta) = 2H(\beta) + 4(\beta - \alpha)H'(\beta) + (\beta - \alpha)^2 H''(\beta)$$

$g''(\alpha) = 2H(\alpha) = n(n-1)\alpha^{n-2}$, $A = H(\beta)$ より

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} H(\beta) = H(\alpha) = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$$

補足 n 次式 $g(\beta)$ を α を極としてテイラー展開すると ¹

$$g(\beta) = g(\alpha) + g'(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \sum_{k=3}^n \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta - \alpha)^k$$

$$\text{このとき } A = \frac{g(\beta)}{(\beta - \alpha)^2} = \frac{g''(\alpha)}{2!} + \sum_{k=3}^n \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta - \alpha)^{k-2}$$

$$\text{よって } \lim_{\beta \rightarrow \alpha} A = \frac{g''(\alpha)}{2!} = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2001.pdf (p.7)

3 (1) $n^4 = 1 + 210m^2 \dots \textcircled{1}$ の右辺は奇数であるから、 n は奇数.

$n^2 + 1, n^2 - 1$ は偶数であるから、 $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は整数.

$\frac{n^2 + 1}{2} - \frac{n^2 - 1}{2} = 1$ より、 $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素である.

補足 ユークリッドの互除法により $\frac{n^2 + 1}{2} = \frac{n^2 - 1}{2} \cdot 1 + 1$

$\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ の最大公約数が1であるから、これらの2数は互いに素.

(2) n が奇数であるから、 $n + 1, n - 1$ はともに偶数で、一方は4で割り切れるから、次式から $n^2 - 1$ は、8の倍数である.

$$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$

$\textcircled{1}$ より $(n^2 + 1)(n^2 - 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2 \dots \textcircled{1}'$

ここで $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ より $n^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{3} \dots \textcircled{2}$

$n^2 \equiv 0, 1, 4, 2 \pmod{7}$ より $n^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{7} \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}'$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より、 $n^2 - 1$ は $3 \cdot 7$ の倍数である.

よって、 $n^2 - 1$ は、 $8 \times 3 \cdot 7$, すなわち、168の倍数である.

(3) (2) の結論から、 $n^2 - 1 = 168N$ (N は整数) とおくと、 $\textcircled{1}'$ より

$$(168N + 2) \cdot 168N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2\sqrt{\frac{2N(84N + 1)}{5}}$$

$2N$ は偶数、 $84N + 1$ は奇数であるから、 $N = 2k$ (k は整数) とおくと

$$m = 4\sqrt{\frac{k(168k + 1)}{5}}, \quad n = \sqrt{336k + 1} \quad (*)$$

(*) の第1式から、整数 k の必要条件は

$$k \equiv 0 \quad \text{または} \quad 168k + 1 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 0, 3 \pmod{5}$$

$k = 3$ のとき $m = 4\sqrt{3 \cdot 101}$, $n = \sqrt{1009}$ より、不適

$k = 5$ のとき $m = 4\sqrt{841} = 4 \cdot 29 = 116$, $n = \sqrt{1681} = 41$

よって $(m, n) = (116, 41)$ ■

4 (1) $F(x)$, $G(x)$ が微分可能であるから

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$H(x) = F(x) + G(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} H'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \frac{F(x+h) + G(x+h) - F(x) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = F'(x) + G'(x) \end{aligned}$$

よって $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$

次に, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ を満たす $F(x)$, $G(x)$ をとり,

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると, 次式が成立する.

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義①により

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b h(x) dx = \left[H(x) \right]_a^b = H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

(2) $G'(x) = g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると, 定積分の定義により

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

上式の右辺は平均値の定理により

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = G'(c) \quad (a < c < b)$$

$G'(c) = g(c) > 0$ であるから, 以上の結果から

$$\int_a^b g(x) dx = (b - a)g(c) > 0$$

(3) 答 (C)

(2) と同様に $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$ に平均値の定理を適用すると ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) f(c_i) = \frac{1}{n} f(c_i) \quad \left(\frac{i-1}{n} < c_i < \frac{i}{n} \right)$$

$f(x)$ は、区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数であるから

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f(c_i) \leq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

以上の結果から、次式を得る.

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(4) 答 (B)

S_n の定義により

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0) \\ &= S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

上式に注意すると、②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\ S_n &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq S_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \end{aligned}$$

よって $0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$ ■

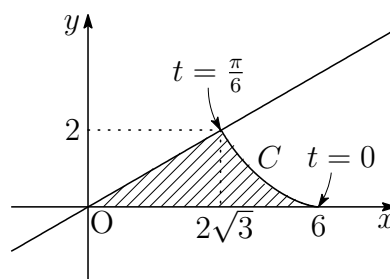
- 5 (1) $x = 5 \cos t + \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$ ($-\pi \leq t < \pi$) より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -5(\sin t + \sin 5t) = -10 \sin 3t \cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} &= 5(\cos 5t - \cos t) = 10 \sin 3t \sin 2t, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = -\tan 2t\end{aligned}$$

$0 < t < \frac{\pi}{6}$ のとき, $0 < 2t < 3t < \frac{\pi}{2}$ であるから $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$

- (2) (1) の結果および $\frac{dy}{dt} > 0$ より

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dx}{dt}$		-	
$\frac{dy}{dt}$		+	
$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$		↖	
(x, y)	(6, 0)	...	$(2\sqrt{3}, 2)$



右上の図の斜線部分が求める面積で, その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 + \int_{2\sqrt{3}}^6 y dx = 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 y \frac{dx}{dt} dt \\ &= 2\sqrt{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^0 (5 \sin t - \sin 5t)(-5 \sin t - 5 \sin 5t) dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 \sin^2 t - \sin^2 5t + 4 \sin 5t \sin t) dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ 5 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1 - \cos 10t}{2} - 2(\cos 6t - \cos 4t) \right\} dt \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \left[2t - \frac{5}{4} \sin 2t + \frac{1}{20} \sin 10t - \frac{1}{3} \sin 6t + \frac{1}{2} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{5}{3} \pi\end{aligned}$$

(3) $f(t) = 5 \cos t + \cos 5t$, $g(t) = 5 \sin t - \sin 5t$ とおくと

$$f(-t) = f(t), \quad g(-t) = -g(t)$$

よって, C 上の 2 点 $(f(t), g(t))$ と $(f(-t), g(-t))$ は x 軸に関して対称.

xy 直交座標系の原点 O を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた直交座標系を XY 系とすると

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= X \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= X \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$X = f(t)$, $Y = g(t)$ とすると

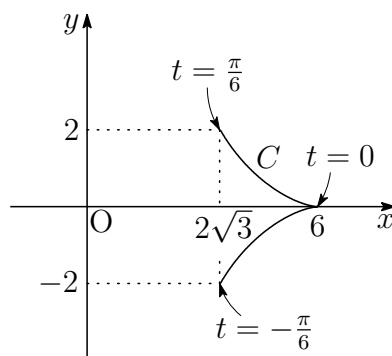
$$\begin{aligned} x &= (5 \cos t + \cos 5t) \cos \frac{\pi}{3} - (5 \sin t - \sin 5t) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \left(\cos t \cos \frac{\pi}{3} - \sin t \sin \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5t \cos \frac{\pi}{3} + \sin 5t \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(5t - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 5 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5 \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = f \left(t + \frac{\pi}{3} \right), \\ y &= (5 \cos t + \cos 5t) \sin \frac{\pi}{3} + (5 \sin t - \sin 5t) \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \left(\cos t \sin \frac{\pi}{3} + \sin t \cos \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5t \sin \frac{\pi}{3} - \sin 5t \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 5 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(5t - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 5 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin 5 \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = g \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

XY 系における点 $(f(t), g(t))$ は, xy 系における点 $\left(f \left(t + \frac{\pi}{3} \right), g \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \right)$ であるから, C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にある.

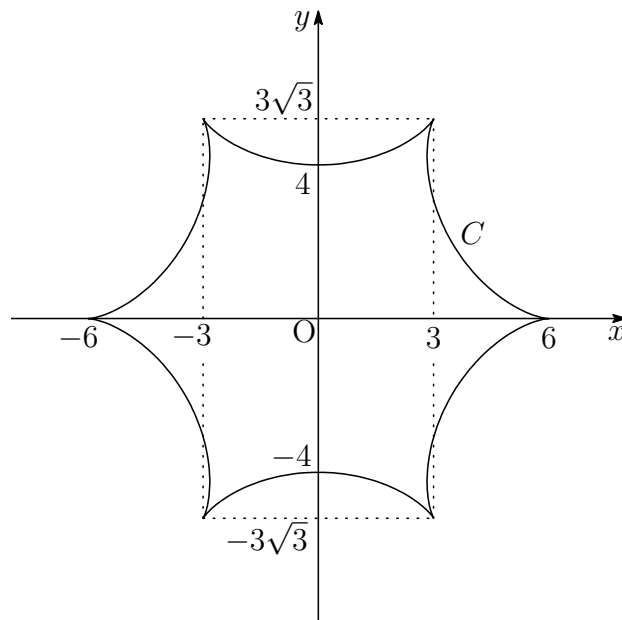
(4) $\frac{dy}{dx} = -\tan 2t$ および $\frac{dx}{dt} < 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{6}$) により, $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tan 2t) \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{\cos^2 2t} \bigg/ \frac{dx}{dt} > 0$$

(3) の結果から, C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分と $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq 0$ の部分は x 軸に関して対称であるから, C の $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の概形は次のようになる.



さらに, これを原点を中心に反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた部分も C 上にある. よって, C の $-\pi \leq t < \pi$ の概形は, 次のようになる.



解説 C 上の点 $(x, y) = (f(t), g(t))$ における接ベクトルは $(f'(t), g'(t))$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{g'(t)}{f'(t)} \right\} \cdot \frac{dt}{dx}$$

逆関数定理により, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f'(t)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2} \cdot \frac{1}{f'(t)} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

本題において

$$f(t) = 5 \cos t + \cos 5t, \quad g(t) = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

したがって

$$\begin{aligned} f'(t) &= -5(\sin t + \sin 5t), & g'(t) &= 5(\cos t - \cos 5t) \\ f''(t) &= -5(\cos t + 5 \cos 5t), & g''(t) &= -5(\sin t - 5 \sin 5t) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) &= 25(\sin t - 5 \sin 5t)(\sin t + \sin 5t) \\ &\quad + 25(\cos t - \cos 5t)(\cos t + 5 \cos 5t) \\ &= -100 + 100(\cos 5t \cos t - \sin 4t \sin t) \\ &= -100(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

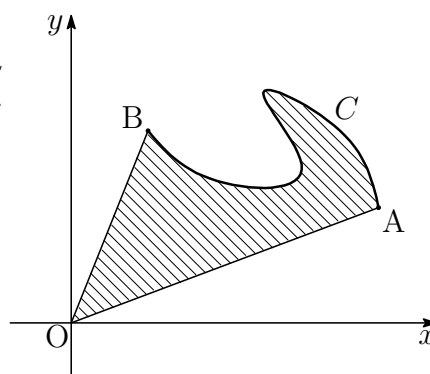
$0 < t < \frac{\pi}{6}$ において $f'(t) < 0$, $g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t) < 0$

したがって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} > 0$

ガウス・グリーン定理

曲線 $C : x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
 について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で
 囲まれた部分の面積を S とすると
 (OB の偏角 $>$ OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



本題 (2) は, ガウス・グリーン定理を用いて求めることもできる.

$$\begin{aligned} f(t)g'(t) - f'(t)g(t) &= (5 \cos t + \cos 5t) \cdot 5(\cos t - \cos 5t) \\ &\quad + 5(\sin t + \sin 5t) \cdot (5 \sin t - \sin 5t) \\ &= 20 - 20(\cos 5t \cos t - \sin 5t \sin t) \\ &= 20(1 - \cos 6t) \end{aligned}$$

したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt \\ &= 10 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 6t) dt = 10 \left[t - \frac{1}{6} \sin 6t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{3} \pi \end{aligned}$$