令和３年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{\textbf{1}}$ 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2) 中心の x 座標，y 座標，z 座標がすべて正の実数であり，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき，その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$ θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots(*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，O(0) を通る円の中心を C(γ) とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ 座標平面上の点 $(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leqq e^t - xt$ が成立する。　　$\cdots(*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を使ってよい。

(1) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ のうち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 n と実数 $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n\ (a_n \neq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。$\alpha,\ \beta$ を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 $\alpha,\ \beta$ を結ぶ線分上にある点 γ で，

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき，

$\alpha,\ \beta,\ f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $n = 2$ のとき，どのような $\alpha,\ \beta,\ f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha = 1 - i,\ \beta = 1 + i,\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための，実数 $a,\ b,\ c$ に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ \beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

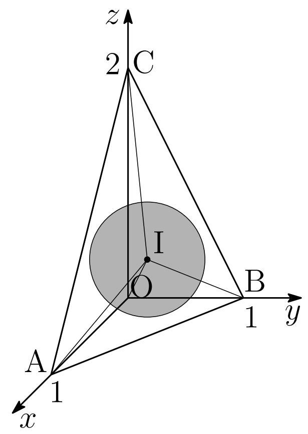
$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 四面体OABCに内接する球の中心をI，半径をdとすると，Iからxy平面, yz平面，zx平面，平面ABCまでの距離はともにdであり，I$(d,\ d,\ d)$とおける$(d>0)$．△OAB，△OBC，△OCA，△ABCの面積は



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2},$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 2)$より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1^2}=\frac{3}{2}$$

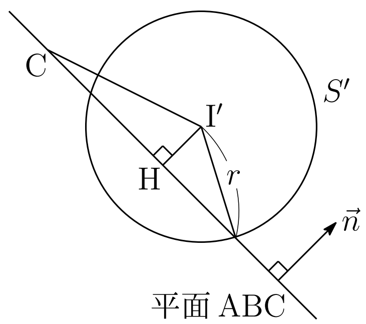
したがって，四面体OABCの表面積をS，体積をVとすると

$$S=\frac{1}{2}+1+1+\frac{3}{2}=4,\quad V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\frac{1}{3}$$

上の結果を$V=\dfrac{1}{3}Sd$に代入すると

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot4d\quad\text{ゆえに}\quad d=\frac{1}{4}\quad\text{よって}\quad \mathrm{I}\boldsymbol{\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)}$$

(2) 条件を満たす球をS'とし，S'の中心を$\mathrm{I}'(r,\ r,\ r)$，半径をrとする$(r>0)$．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$に垂直なベクトルの1つを



$$\vec{n}=(2,\ 2,\ 1)$$

とおき，I'から平面ABCに垂線$\mathrm{I}'\mathrm{H}$を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{CI}'}=(r,\ r,\ r-2)$$

したがって　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CI}'}=2r+2r+r-2=5r-2$

$\overrightarrow{\mathrm{CI}'}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\overrightarrow{\mathrm{HI}'}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HI}'}=5r-2$

$\vec{n}/\!/\overrightarrow{\mathrm{HI}'}$であるから　$|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{HI}'}|=|5r-2|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HI}'}|=\frac{|5r-2|}{|\vec{n}|}=\frac{|5r-2|}{3}$$

S' が平面 ABC と共有点をもつとき，$|\mathrm{HI'}| \leqq r$ であるから

$$\frac{|5r-2|}{3} \leqq r \quad \text{ゆえに} \quad -3r \leqq 5r-2 \leqq 3r$$

これを解いて　$\dfrac{1}{4} \leqq r \leqq 1 \quad \cdots ①$

S' と平面 ABC が交わってできる円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{\mathrm{HI'}}|^2 = r^2 - \left(\frac{|5r-2|}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{9}(16r^2 - 20r + 4) \\ &= -\frac{16}{9}\left(r - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① に注意すると，$r = \dfrac{5}{8}$ のとき，R^2 の最大値は　$\dfrac{1}{4}$

よって，求める円の面積の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 2)$ の外積 (ベクトル積) は [1]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (1{\cdot}2 - 0{\cdot}0,\ 0{\cdot}(-1) - (-1){\cdot}2,\ -1{\cdot}0 - 1{\cdot}(-1)) \\ &= (2,\ 2,\ 1) \end{aligned}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直交する．

3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad 2x + 2y + z - 2 = 0$$

この平面の法ベクトルは [2]　$\vec{n} = (2,\ 2,\ 1)$

点 $\mathrm{I'}(r,\ r,\ r)$ から平面 $2x + 2y + z - 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|2r + 2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|5r-2|}{3}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.179 (物理ページ p.184))
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.171 (物理ページ p.176))

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) x の 2 次方程式

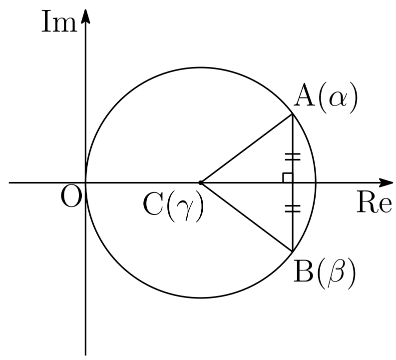
$$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0 \qquad \cdots(*)$$

が実数解をもたないから，係数について

$$D/4=(2\cos\theta)^2-\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\theta}(4\sin\theta\cos\theta-1)=\frac{2\sin 2\theta-1}{\tan\theta}<0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ に注意して解くと　$0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$　よって　$\boldsymbol{0<\theta<\dfrac{\pi}{12}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$\alpha+\beta=4\cos\theta,\quad \alpha\beta=\frac{1}{\tan\theta}$$

α，β は互いに共役で，中心 C(γ) は A，B の垂直二等分線上，すなわち，実軸上の点であるから，γ は実数である．

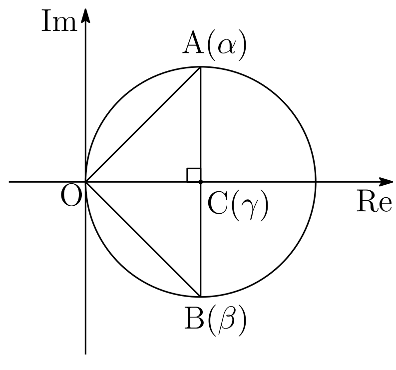
OC = AC より　$|\gamma|=|\gamma-\alpha|$

$$\gamma^2=(\gamma-\alpha)(\gamma-\overline{\alpha})=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

整理すると　$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\beta$

よって　$\gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{4\cos\theta\tan\theta}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4\sin\theta}}$

(3) OC = AC より，△OAC が直角三角形であるとき，$\angle\mathrm{OCA}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，C は AB の中点であるから，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\gamma$ より，(2) の結果から



$$\frac{4\cos\theta}{2}=\frac{1}{4\sin\theta}\quad ゆえに\quad \sin 2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{4}\quad ゆえに\quad \tan^2\theta-8\tan\theta+1=0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<\tan\theta<1$ に注意して　$\boldsymbol{\tan\theta=4-\sqrt{15}}$

3 (1) $f(t)=e^t-xt-y$ とおく．条件 $(*)$ をみたすとき，すべての実数 t に対して

$$f(t) \geqq 0 \qquad \text{(A)}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を求めればよい．

(i) $x<0$ のとき

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}(e^t-xt-y) = -\infty$$

このとき，(A) をみたさない．

(ii) $x=0$ のとき，$f(t)=e^t-y$ は，単調増加であるから

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty}(e^t-y) = -y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq 0$$

(iii) $x>0$ のとき，$f'(t)=e^t-x$ より

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値 $f(\log x)=x-x\log x-y$ であるから，(A) をみたすとき

$$x-x\log x-y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq x-x\log x$$

(i)〜(iii) より

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ x-x\log x & (x>0) \end{cases}$$

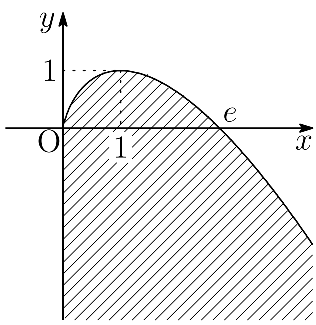
とおくと，条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$x \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad y \leqq g(x)$$

$x>0$ のとき　$g'(x)=-\log x,\ g''(x)=-\dfrac{1}{x}<0$

したがって，$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g''(x)$		$-$	$-$	$-$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$



$$\lim_{x\to+0} g(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$$

よって，点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，右上の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_1^e x^2(1-\log x)^2\,dx$$

$x=e^t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=e^t$

x	$1\longrightarrow e$
t	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^1(e^t)^2(1-t)^2\cdot e^t\,dt=\int_0^1 e^{3t}(t-1)^2\,dt\\&=\frac{1}{3}\Bigg[\,e^{3t}\left\{(t-1)^2-\frac{\{(t-1)^2\}'}{3}+\frac{\{(t-1)^2\}''}{3^2}\right\}\,\Bigg]_0^1\\&=\frac{1}{3}\Bigg[\,e^{3t}\left\{(t-1)^2-\frac{2(t-1)}{3}+\frac{2}{9}\right\}\,\Bigg]_0^1=\frac{2e^3}{27}-\frac{17}{27}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi(2e^3-17)}{27}}$

補足 対数型から指数型の積分に置換すると，次の積分公式が利用できる[3].

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx=\frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

補足 まず，$0<x\leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}}<\log x$ を示す.

$h(x)=\log x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$0<x<1 \text{ のとき}\quad h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}<0$$

$h(x)$ は単調減少で，$h(1)=2$ であるから

$$h(x)>0\quad\text{ゆえに}\quad \log x+\frac{2}{\sqrt{x}}>0$$

よって　　$0<x<1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}}<\log x<0$

したがって　$0<x<1$ のとき　$-2\sqrt{x}<x\log x<0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x})=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0$$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $n=2$ のとき，$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，$f'(x)=2a_2x+a_1$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a_2(\beta^2-\alpha^2)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\alpha+\beta)+a_1$$
$$f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1$$

γ を複素数平面上の 2 点 α, β の中点，すなわち，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とすると

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

よって，どのような α, β, $f(x)$ も平均値の性質をもつ．

(2) $\alpha=1-i$, $\beta=1+i$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{\beta^3-\alpha^3+a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+b\\&=2+2a+b\end{aligned}$$

γ は，複素数平面上の線分 α, β 上の点であるから

$$\gamma=1+ti \quad (-1\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(\gamma)&=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b\\&=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i\end{aligned}$$

平均値の性質をもつとき

$$2+2a+b=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i$$

整理すると　　$1-3t^2=0$　かつ　$2t(3+a)=0$

$-1\leqq t\leqq 1$ に注意して　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $a=-3$

このとき，平均値の性質をもつ．

よって，実数 a, b, c, に関する必要十分条件は

$a=-3$，2 数 b，c は任意の実数

(3) $\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}$, $\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\alpha^7=\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7=\cos\frac{7}{4}\pi-i\sin\frac{7}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\beta$$
$$\beta^7=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=\alpha$$

$f(x)=x^7$, $f'(x)=7x^6$ について

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1,\quad f'(\gamma)=7\gamma^6 \qquad (*)$$

$\arg\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$, $\arg\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\arg\gamma\leqq\dfrac{\pi}{4}$

平均値の性質をもつと仮定すると，$\arg(7\gamma^6)=\arg(-1)$ であるから

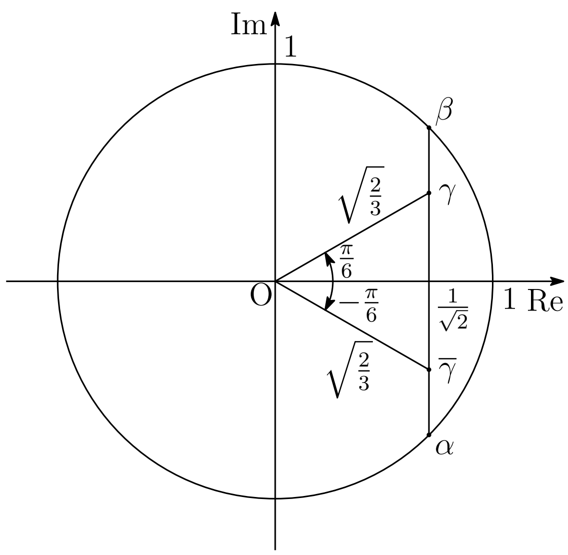
$$6\arg\gamma=\pm\pi \quad \text{ゆえに} \quad \arg\gamma=\pm\frac{\pi}{6}$$

これをみたす2点 α, β を結ぶ線分上の点 γ について

$$|\gamma|=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$
$$|7\gamma^6|=7\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6=\frac{56}{27}\neq|-1|$$

上の第2式から，$7\gamma^6\neq-1$ となり，平均値の性質に反する．

よって，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $f(x)=x^7$ は，平均値の性質をもたない．



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) (i) $2 \leqq k \leqq n-k \leqq n-2$ のとき，$\dfrac{n-j}{j} \geqq 1$ であるから $(j=1, 2, \cdots, k)$

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} \\
&> n\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdots\frac{n-k}{k} \\
&\geqq n\cdot1\cdot1\cdots1 = n
\end{aligned}
$$

(ii) $2 \leqq n-k \leqq k \leqq n-2$ のとき，$k' = n-k$ とおくと

$$2 \leqq k' \leqq n-k' \leqq n-2$$

(i) の結果から　${}_n\mathrm{C}_{k'} > n$　ゆえに　${}_n\mathrm{C}_k > n$

(i),(ii) より，自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき

$${}_n\mathrm{C}_k > n$$

(2) $2 \leqq k \leqq n-2$ について

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} = p \qquad (*)$$

が成立するとき，素数 p は $n,\ n-1, \cdots, n-k+1$ のいずれかの因数で

$${}_n\mathrm{C}_k = p \leqq n$$

これは，(1) の結論に反する．

$k=0,\ n$ のとき，$(*)$ は成立しないから，$k=1,\ n-1$ より

$${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$$

よって　　$\boldsymbol{(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)}$